



**Universitatea
Transilvania
din Braşov**

ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Cristina Maria PĂCURAR

NOI CONTRIBUȚII LA TEORIA INTERPOLĂRII
FRACTALE

NEW CONTRIBUTIONS TO FRACTAL
INTERPOLATION THEORY

REZUMAT

Conducător științific
Prof. Dr. Radu MICULESCU

Braşov, 2024

Cuprins

Introducere	1
Considerații asupra interpolării fractale	1
Motivația alegerii temei	2
Structura tezei	3
Rezultate originale conținute în teză	5
Diseminarea rezultatelor	6
Mulțumiri	8
1 Preliminarii	9
1.1 Notății și terminologie	9
1.2 Contractii generalizate	11
1.3 Sisteme iterative de funcții	12
1.4 Spațiul codurilor și proiecția canonică	14
2 Operatorul Read-Bajraktarevic	16
2.1 Funcții de interpolare	16
2.2 Operatori de tip Read-Bajraktarevic	18
3 O nouă schemă de interpolare fractală numărabilă în care sunt implicate contractiile Rakotch	21
3.1 Funcții de interpolare fractală implicând contractiile Rakotch . .	22
3.2 Cazuri particulare de CIFS care implică contractiile Rakotch . .	23
4 O schemă de interpolare fractală pentru seturi de date posibil foarte mari	25
4.1 Câteva rezultate tehnice	26
4.2 Funcții de interpolare fractală asociate unor seturi de date posibil foarte mari	27
5 Sisteme iterative de funcții de tip interpolare	30
5.1 Leme auxiliare	30

5.2	Sisteme iterative de funcții de tip interpolare	31
5.3	Proprietăți ale sistemelor iterative de funcții de tip interpolare	33
5.4	Sistemele iterative de funcții de tip interpolare au atractor și admit proiecție canonică	34
5.5	Un rezultat de punct fix corelat	35
6	Aplicații ale interpolării fractale	36
6.1	Analiza Covid-19 dintr-o perspectivă fractală	36
6.2	Aproximarea funcțiilor de interpolare fractală utilizând contracții Rakotch	37
7	Concluzii	40
	Bibliografie	41

Introducere

Considerații asupra interpolării fractale

Interpolarea presupune obținerea unei funcții atunci când sunt accesibile doar anumite puncte de pe graficul său. Metodele tradiționale de interpolare, care folosesc funcții polinomiale, raționale, exponențiale, trigonometrice sau spline, produc funcții de interpolare care sunt diferentiabile pe porțiuni. Cu toate acestea, astfel de funcții nu sunt potrivite pentru majoritatea situațiilor din lumea reală în care datele prezintă neregularități și sunt lipsite de netezime.

Interpolarea fractală diferă de alte tipuri convenționale de metode de interpolare deoarece funcția continuă de interpolare obținută poate să nu fie diferentiabilă în niciun punct. Prin urmare, interpolarea fractală furnizează interpolanți mai apropiați de fenomenele naturale, dovedindu-se astfel a fi o metodă mai versatilă pentru datele obținute din măsurători. Mai mult, interpolarea fractală conține o gamă largă de interpolanți, incluzând atât interpolanți care nu sunt diferentiabili nicăieri, cât și interpolanți infinit diferentiabili. Conceptul de funcții de interpolare fractală a fost introdus de către M. Barnsley (vezi [5] și [6]) și a constituit subiectul a numeroase studii încă de la apariție.

Interpolarea fractală este o metodă diferită de interpolare, care constă în construirea unei funcții continue care trece prin toate punctele unui sistem de date dat, al cărui grafic este atractorul unui sistem iterativ de funcții. Mai precis, Barnsley a demonstrat că, dată fiind o submulțime reală finită A și o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, există o funcție continuă $F : [\min A, \max A] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

a) $F|_A = f$;

b) există un sistem iterativ de funcții al cărui atractor este graficul lui F .

Funcția F este denumită funcție de interpolare fractală (sau FIF) asociată setului de date $\{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Rezultatele inițiale demonstrate de către Barnsley cu privire la FIF-uri au fost studiate în profunzime, ducând, astfel, la numeroase generalizări și noi direcții de cercetare. Printre aceste direcții de cercetare, amintim:

- a) funcții de interpolare fractală cu mai multe variabile obținute prin sisteme iterative de funcții de dimensiuni superioare sau sisteme iterative de funcții recurente (vezi [8]);
- b) funcții de interpolare fractală cu variabilă ascunsă care presupun proiecția atractorilor sistemelor iterative de funcții cu valori vectoriale în spații de dimensiuni inferioare (vezi [7], [13], [18], [19], [45], [91] și [94]);
- c) funcții de interpolare fractală Hermite sau spline (vezi [58] și [94]);
- d) interpolanți fractali biliniari bazați pe funcții biliniare (vezi [11]);
- e) funcții spline fractale, care combină funcții fractale și funcții spline (vezi [9] și [47]);
- f) suprafețe de interpolare fractală (vezi [14], [15], [24], [30], [44], [46], [76], [79], [92], [97] și [102]);
- g) generalizări ale tehnicii de interpolare fractală a lui Barnsley pentru un set de date numărabil (vezi [31], [70], [82], [83], [84], [85], [86] și [93]).

Motivația alegerii temei

Interpolarea fractală se bazează pe o metodă constructivă, prin intermediul unui procedeu iterativ, spre deosebire de alte metode clasice de interpolare (cum ar fi interpolarea liniară, polinomială, Hermite sau spline) care presupun o metodă descriptivă. Mai mult, interpolarea fractală permite atât aproximări folosind funcții netede, cât și funcții care nu sunt diferentiabile în toate punctele, fiind astfel mai potrivită pentru date obținute din măsurători.

Funcțiile de Interpolare Fractală (FIF) au numeroase aplicații în domenii diverse de cercetare. Printre acestea, menționăm:

- compresia imaginilor (vezi [10] și [25]);
- scalarea imaginilor (vezi [69]);
- compresia imaginilor video (vezi [1]);
- reconstrucția imaginilor satelitare (vezi [20]);

- criptarea imaginilor (vezi [100]);
- teoria bazelor Schauder (vezi [61] și [64]);
- procesarea semnalelor (vezi [60], [62] și [101]);
- reconstrucția amprentei digitale (vezi [3]);
- reconstrucția perfuziei tumorale (vezi [17]);
- cuantificarea proceselor cognitive ale creierului (vezi [59]);
- analiza financiară (vezi [39]);
- prognoza indicelui prețurilor acțiunilor (vezi [96]);
- reconstrucția datelor seismice (vezi [41]);
- identificarea suprafețelor de fractură în roci (vezi [98]);
- prognoza cantității de oxigen dizolvat în râuri cu bazine hidrografice complexe (vezi [42]);
- prognoza vitezei vântului (vezi [99] și [103]);
- studiul epidemiilor (vezi [2] și [67]);
- îmbunătățirea calității datelor în etapa de preprocesare a algoritmilor de predicție, Machine Learning (vezi [73]).

Versatilitatea interpolării fractale este subliniată de varietatea de aplicații în care este utilizată. Mai mult, teoria interpolării fractale prezintă un interes din ce în ce mai mare în rândul cercetătorilor, existând o multitudine de direcții diferite și captivante de cercetare (de exemplu, direcțiile de cercetare a)-g) din secțiunea anterioară).

Motivația alegerii temei acestei teze se bazează atât pe interesul semnificativ pe care interpolarea fractală îl are în cercetare, cât și pe numărul în creștere de domenii în care apar aplicații ale interpolării fractale.

Structura tezei

În această teză, prezentăm noi contribuții la teoria interpolării fractale, organizate în șase capitole. În primul capitol prezentăm notațiile și terminologia de bază, urmată de un studiu detaliat al operatorului Read-Bajraktarevic

în al doilea capitol. Al treilea capitol este dedicat conceptului de interpolare fractală numărabilă, în timp ce al patrulea capitol introduce o nouă schemă pentru interpolarea fractală. În al cincilea capitol, introducem un nou tip de sistem iterativ de funcții, iar în ultimul capitol, prezentăm aplicații ale interpolării fractale, inclusiv o analiză a răspândirii Covid-19.

Primul capitol este dedicat principalelor notații și terminologiei care vor fi utilizate pe parcursul tezei, precum și conceptelor de bază, esențiale pentru înțelegerea conținutului tezei. Capitolul conține noțiuni fundamentale legate de contractii generalizate, sisteme iterative de funcții, spațiul codurilor și proiecția canonică.

Capitolul al doilea este dedicat studiului operatorului Read-Bajraktarevic, un concept fundamental în domeniul teoriei interpolării fractale. Principalele rezultate conținute în acest capitol fac parte din articolul „**Scale-free fractal interpolation**”, „*Fractal Fract.*” **6** (2022) (vezi [66]), care este publicat în colaborare cu Maria Navascués și Vasileios Drakopoulos. În acest capitol prezentăm câteva proprietăți ale operatorului Read-Bajraktarevic în cazul seturilor de date finite. Mai mult, studiem condițiile în care operatorul Read-Bajraktarevic produce funcții de interpolare netede pentru un anumit set de date.

În cel de al treilea capitol, sunt prezentate rezultatele legate de interpolarea fractală numărabilă, publicate în articolul „**A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions**”, „*Results Math.*” **76** (2021) (vezi [68]). Acest capitol este dedicat FIF-urilor asociate sistemelor de date numărabile, al căror grafic este atractorul unui sistem iterativ de funcții constituit din contractii mai generale. Mai precis, funcțiile constitutive sunt contractii Rakotch, deci nu sunt neapărat contractii Banach. În acest capitol, demonstrăm că pentru un set de date numărabil există o funcție de interpolare continuă al cărei grafic este atractorul unui sistem iterativ numărabil de funcții compus din contractii Rakotch. În ultima parte a capitolului, prezentăm câteva exemple de cazuri particulare de sisteme iterative numărabile de funcții în care sunt implicate contractii Rakotch.

În capitolul următor, al patrulea al acestei teze, prezentăm conținutul articolului „**A fractal interpolation scheme for a possible sizeable set of data**”, „*J. Fractal Geom.*” **9** (2022) (vezi [55]), care este rezultatul unei colaborări cu Radu Miculescu și Alexandru Mihail. În acest capitol, introducem o nouă schemă de interpolare fractală. Mai precis, pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și $A \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\{a, b\} \subseteq A = \bar{A} \subseteq [a, b]$ și interiorul lui A este vid, demonstrăm că pentru orice funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ există o funcție continuă $g^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și un sistem iterativ de funcții posibil infinit al cărui atractor este graficul lui g^* , astfel încât $g^*|_A = f$. Cu alte cuvinte, rezultatele noastre demonstrează existența unei FIF corespunzătoare setului

de date $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Schema noastră permite ca mulțimea A să fie nenumărabilă, așa cum este cazul mulțimii triadice a lui Cantor, aducând, astfel, o contribuție semnificativă în domeniul FIF-urilor.

Al cincilea capitol introduce un nou tip de sistem iterativ de funcții, mai precis conceptul de sistem iterativ de funcții de tip interpolare, și prezintă conținutul articolului „**Interpolation type iterated function systems**”, „*J. Math. Anal. Appl.*” **519** (2023) (vezi [56]), care este publicat în colaborare cu Radu Miculescu și Alexandru Mihail. În acest capitol prezentăm proprietățile sistemelor iterative de funcții de tip interpolare și demonstrăm că un astfel de sistem are atractor și admite proiecție canonică. Ca un rezultat auxiliar, prezentăm o teoremă de punct fix.

Ultimul capitol este dedicat aplicațiilor interpolării fractale și conține rezultate din articolele „**An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension**”, „*Chaos Solitons Fractals*” **139** (2020) (vezi [67]) și „**A concretization of an approximation method for non-affine fractal interpolation functions**”, „*Mathematics*” **9** (2021) (vezi [16]). În prima parte a acestui capitol, prezentăm o aplicație a interpolării fractale pentru recuperarea datelor lipsă înregistrate în primele luni (prima jumătate a anului 2020) ale pandemiei de Covid-19. Mai mult, folosim dimensiunea *box-counting* pentru a evalua complexitatea răspândirii Covid-19. În a doua parte a capitolului, prezentăm doi algoritmi, unul determinist și unul probabilistic, care permit vizualizarea aproximărilor FIF obținute prin schema prezentată în capitolul trei.

Pentru a rezuma, această teză prezintă o cercetare cuprinzătoare a interpolării fractale, acoperind concepte fundamentale, metode noi și aplicații în lumea reală. Astfel, prezenta teză aduce contribuții atât în domeniul teoretic, cât și în cel al aplicațiilor.

Rezultate originale conținute în teză

Principalele rezultate originale conținute în această teză sunt următoarele:

- A.** *O nouă schemă de interpolare fractală numărabilă în care sunt implicate contracții Rakotch*

Noutatea principală adusă în domeniul de cercetare legat de FIF-uri este utilizarea sistemelor iterative de funcții numărabile compuse din contracții Rakotch. Am demonstrat că există o FIF care interpolatează un sistem de date numărabil, al cărei grafic este atractorul unui sistem iterativ de funcții numărabil.

B. *O schemă de interpolare fractală pentru date posibil mari*

Introducem rezultate noi care extind tehnica de interpolare fractală a lui Barnsley. Mai precis, principalul rezultat original pe care îl introducem ne asigură că pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $A \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\{a, b\} \subseteq A = \overline{A} \subseteq [a, b]$ și $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, dată o funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, există o FIF care interpoalează datele $\{(a, f(a)) : a \in A\}$. Subliniem faptul că rezultatele noastre permit ca mulțimea A să fie nenumărabilă (cum este cazul mulțimii triadice a lui Cantor), ceea ce reprezintă o contribuție semnificativă în teoria FIF-urilor.

C. *Conceptul de sistem iterativ de funcții de tip interpolare*

Introducem un concept nou, acela de sistem iterativ de funcții de tip interpolare. Noua noțiune derivă din teoria FIF-urilor. Pentru acest nou sistem iterativ de funcții de tip interpolare stabilim două rezultate importante: demonstrăm că un astfel de sistem are atractor și că admite proiecție canonică.

Mai mult, prezentăm un rezultat nou de punct fix, obținut ca un corolar al principalelor rezultate.

D. *Funcții de interpolare netede generate de operatori de tip Read-Bajraktarevic*

Demonstrăm că operatorii de tip Read-Bajraktarevic pot furniza funcții de interpolare netede pentru anumite sisteme de date.

E. *Aplicații ale interpolării fractale*

Prezentăm o aplicație a interpolării fractale în studiul epidemiilor. Mai precis, utilizăm interpolarea fractală pentru a recupera date lipsă legate de primele luni ale pandemiei de Covid-19 și utilizăm dimensiunea „*box-counting*” pentru a evalua complexitatea răspândirii Covid-19.

De asemenea, prezentăm un algoritm determinist și unul probabilistic, care permit vizualizarea aproximărilor FIF.

Diseminarea rezultatelor

Rezultatele originale menționate în secțiunea anterioară (**A**, **B**, **C**, **D** și **E**) au fost diseminate în comunitatea matematică atât sub forma unor articole publicate în reviste internaționale de specialitate, cât și sub forma

unor comunicări orale la conferințe, workshop-uri sau simpozioane, după cum urmează:

- A. În cadrul conferinței „7th International Workshop on Nonlinear Analysis, Fixed Point Theory & Applications”, XGEN, în data de 19 mai 2021, am prezentat lucrarea „*A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions*”.

În cadrul conferinței „International Conference on Mathematics and Computer Science” (MACOS) care a avut loc între 15 și 17 septembrie 2022 în Brașov, România, în data de 16 septembrie 2022, am susținut prezentarea intitulată „*A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions*”.

Am publicat articolul:

C.M. Păcurar, „*A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions*” în „*Results in Mathematics*” 76 (2021), 161.

și, în colaborare cu A. Băicoianu și M. Păun, articolul „*A Concretization of an Approximation Method for Non-Affine Fractal Interpolation Functions*” în „*Mathematics*” 9 (2021), 767.

- B. În cadrul „44th Summer Symposium in Real Analysis” desfășurat între 20 și 24 iunie 2022 la Paris & Orsay, în data de 24 iunie 2022, am susținut prezentarea intitulată „*New Contributions to Fractal Interpolation Theory*”.

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu și A. Mihail, articolul „*A fractal interpolation scheme for a possible sizeable set of data*” în „*Journal of Fractal Geometry*” 9 (2022), 337–355.

- C. În cadrul „14th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications” desfășurat între 11 și 14 iulie 2023 în Brașov, România, în data de 13 iulie 2023, am susținut prezentarea intitulată „*Interpolation type iterated function systems*”.

Am publicat, în colaborare cu R. Miculescu și A. Mihail, articolul „*Interpolation type iterated function systems*” în „*Journal of Mathematical Analysis and Applications*” 519 (2023), 126747.

- D. În cadrul „International Conference on Approximation Theory and its Applications”, desfășurat între 12-14 septembrie 2022 în Sibiu, România, am susținut prezentarea cu titlul „*On some operators appearing in fractal interpolation theory*”.

Am publicat, în colaborare cu M. Navascués și V. Drakopoulos, articolul „*Scale-Free Fractal Interpolation*” în „*Fractal and Fractional*” 6 (2022), 602.

E. Am publicat, în colaborare cu B. Necula, articolul „*An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension*” în „*Chaos Solitons and Fractals*” 139 (2020).

Mulțumiri

Aș dori să îi mulțumesc conducătorului meu de doctorat, domnul prof. dr. Radu Miculescu, pentru ajutorul inestimabil și sprijinul pe care l-am primit pe parcursul studiilor mele doctorale.

Doresc, de asemenea, să îmi exprim sincera recunoștință față de Departamentul de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov, pentru crearea unui mediu propice și extrem de plăcut pentru cercetarea mea. În plus, sunt recunoscătoare colegilor mei de la Școala Doctorală Interdisciplinară de la care am putut învăța multe. Sunt profund recunoscătoare pentru sprijinul constant pe care l-am primit de la Universitatea Transilvania din Brașov, care mi-a permis să particip activ la numeroase conferințe, workshop-uri și vizite de cercetare pe parcursul studiilor mele.

Sunt, de asemenea, foarte recunoscătoare familiei mele pentru înțelegerea și susținerea morală constantă pe care am primit-o în această perioadă solicitantă.

1. Preliminarii

Capitolul curent prezintă notațiile și terminologia necesare pentru parcurgerea și înțelegerea acestei teze, precum și noțiunile fundamentale care sunt esențiale pentru rezultatele conținute în capitolele următoare.

1.1 Notății și terminologie

Prin \mathbb{N} ne referim la mulțimea $\{1, 2, \dots\}$.

Pentru o funcție $f : A \rightarrow B$, prin G_f ne referim la graficul funcției f , adică mulțimea $\{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Pentru o funcție $f : X \rightarrow X$ și $n \in \mathbb{N}$, notăm compunerea de n ori a lui f cu ea însăși prin $f^{[n]}$.

Pentru o mulțime de indici I , o familie de funcții $(f_i)_{i \in I} : X \rightarrow X$ și $k \in \mathbb{N}$ fixat, notăm cu $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$ compunerea funcțiilor f_{i_k} , adică $f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}$, unde $(i_j)_{j \in \{1, \dots, k\}} \subseteq I$.

Pentru un spațiu metric (X, d) și $A \subseteq X$, vom folosi următoarele notații:

- $\sup_{x, y \in A} d(x, y) := \text{diam}(A)$;
- $\{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ și } A \text{ este mărginită}\} := P_b(X)$;
- $\{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ și } A \text{ este închisă}\} := P_{cl}(X)$;
- $P_b(X) \cap P_{cl}(X) := P_{b,cl}(X)$;
- $\{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ și } A \text{ este compactă}\} := P_{cp}(X)$.

În plus, pentru $A, B \in P_b(X)$ și $x \in X$, vom folosi și următoarele notații:

- $\inf_{a \in A} d(x, a) := d(x, A)$
- $\sup_{a \in A} d(a, B) := d(A, B)$.

Definiția 1.1. Fie (X, d) un spațiu metric. Pentru o funcție $f : X \rightarrow X$, definim constanta Lipschitz a lui f ca

$$\sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} := \text{lip}(f) \in [0, +\infty].$$

Dacă $lip(f) < +\infty$, atunci funcția f se numește funcție Lipschitz.

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, (Y, ρ) un spațiu metric și $\alpha, \beta \in Y$, considerăm mulțimile

$$\{f : [a, b] \rightarrow Y : f \text{ este continuă}\} := C_Y([a, b])$$

și

$$\{f : [a, b] \rightarrow Y : f \text{ este continuă, } f(a) = \alpha \text{ și } f(b) = \beta\} := C_Y^{\alpha, \beta}([a, b]).$$

Pentru $(Y, \rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ vom folosi notația $C_{\mathbb{R}}([a, b]) = C([a, b])$ și $C_{\mathbb{R}}^{\alpha, \beta}([a, b]) = C^{\alpha, \beta}([a, b])$.

Toate spațiile de funcții menționate mai sus, înzestrate cu metrica uniformă d_u (adică $d_u(g, h) = \sup_{x \in [a, b]} \rho(g(x), h(x))$ pentru orice $g, h \in C_Y([a, b])$), sunt complete.

Pentru $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, notăm mulțimea

$$\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ este de } k \text{ ori diferentiabilă și } f^{(k)} \in C([a, b])\}$$

cu $C^k([a, b])$, unde prin $f^{(0)}$ înțelegem f .

$$\hat{\text{Inzestrată cu norma }} \|f\|_k = \max_{p \in \{0, 1, \dots, k\}} \|f^{(p)}\|_{\infty} = \max_{p \in \{0, 1, \dots, k\}} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(p)}(x)|,$$

$C^k([a, b])$ este complet.

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n$. Considerăm polinomul Bell parțial sau incomplet (vezi [12]) dat de

$$\begin{aligned} & B_{n,k}(x_1; \dots; x_{n-k+1}) = \\ = & \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k \\ j_1 + 2j_2 + \dots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n}} \frac{n!}{j_1! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}. \end{aligned}$$

Pentru $f, g \in C^k([a, b])$, conform formulei Faà di Bruno (vezi [23] și [28]), avem

$$(f \circ g)^{(p)}(x) = \sum_{i=1}^p f^{(i)}(g(x)) B_{p,i}(g^{(1)}(x); g^{(2)}(x); \dots; g^{(p-i+1)}(x)), \quad (1.1)$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și $p \in \{1, 2, \dots, k\}$.

1.2 Contractiile generalizate

Definiția 1.2. Fie (X, d) un spațiu metric. O aplicație $f : X \rightarrow X$ se numește contractie (sau contractie Banach) dacă există $C \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Definiția 1.3. (vezi [34], [48], [72] și [74]) Fie $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ și (X, d) un spațiu metric. O aplicație $f : X \rightarrow X$ se numește:

i) φ -contractie dacă

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)),$$

pentru orice $x, y \in X$.

ii) contractie Rakotch dacă este o φ -contractie pentru funcția φ astfel încât funcția $\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, dată de $\alpha(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ pentru orice $t > 0$, este descrescătoare și $\alpha(t) < 1$ pentru orice $t > 0$.

iii) contractie Browder dacă este o φ -contractie, unde funcția φ este crescătoare, $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$ și φ este continuă la dreapta.

iv) contractie Matkowski dacă este o φ -contractie, unde funcția φ este crescătoare și $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{[n]}(t) = 0$ pentru orice $t > 0$.

Remarca 1.1 (vezi diagrama de la pagina 144 din [34]).

i) Orice contractie Banach este contractie Rakotch (pentru o funcție φ dată de $\varphi(t) = \alpha t$ pentru orice $t \geq 0$, unde $\alpha \in [0, 1)$).

ii) Orice contractie Rakotch este contractie Browder.

iii) Orice contractie Browder este contractie Matkowski.

iv) Cele două afirmații de mai sus ne asigură că orice contractie Rakotch este și contractie Matkowski.

Definiția 1.4. Fie (X, d) un spațiu metric, iar $f : X \rightarrow X$ un operator. Acesta se numește operator Picard dacă are un unic punct fix $x_* \in X$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x) = x_*,$$

pentru orice $x \in X$.

Teorema 1.1 (vezi [4]). Fie (X, d) un spațiu metric complet. Dacă $f : X \rightarrow X$ este o contractie Banach, atunci f este un operator Picard.

Teorema 1.2 (vezi Teorema 1.2 din [48]). Fie (X, d) un spațiu metric complet. Dacă $f : X \rightarrow X$ este o contractie Matkowski, atunci f este un operator Picard.

1.3 Sisteme iterative de funcții

Conceptul de sistem iterativ de funcții este o noțiune introdusă de Hutchinson (vezi [33]). Acest concept a creat un cadru teoretic riguros pentru obținerea fractalilor, fiind intens studiat datorită acestui fapt.

Definiția 1.5. Fie (X, d) un spațiu metric. Funcția

$$h : P_{b,cl}(X) \times P_{b,cl}(X) \rightarrow [0, \infty),$$

definită ca

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

pentru orice $A, B \in P_{b,cl}(X)$, care este o metrică, se numește metrica Hausdorff-Pompeiu pe X .

Definiția 1.6. Fie (X, d) un spațiu metric complet, I o mulțime finită și familia de funcții continue $(f_i)_{i \in I}$ unde $f_i : X \rightarrow X$. Perechea $((X, d), (f_i)_{i \in I})$ se numește sistem iterativ de funcții (iterated function system). În continuare, vom numi un astfel de sistem, pe scurt, IFS.

Vom face referire la un astfel de IFS ca $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$.

Operatorul fractal asociat IFS-ului \mathcal{S} este funcția $F_{\mathcal{S}} : P_{cp}(X) \rightarrow P_{cp}(X)$, definită ca

$$F_{\mathcal{S}}(K) = \bigcup_{i \in I} f_i(K),$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Dacă operatorul fractal $F_{\mathcal{S}}$ este Picard, atunci spunem că IFS-ul \mathcal{S} are atractor și unicul punct fix al lui $F_{\mathcal{S}}$ se numește atractorul IFS-ului \mathcal{S} care se notează cu $A_{\mathcal{S}} \in P_{cp}(X)$.

1.3.1 Sistem iterativ de funcții numărabil

Conceptul de IFS poate fi generalizat pentru o familie numărabilă de funcții constitutive. Astfel, a apărut conceptul de sistem iterativ de funcții numărabil (vezi [29], [43], [81] și [87]).

Definiția 1.7. Fie (X, d) un spațiu metric compact și funcțiile $f_n : X \rightarrow X$ continue pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Perechea $((X, d), (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ se numește sistem iterativ de funcții numărabil (countable iterated function system). În continuare, vom numi un astfel de sistem, pe scurt, CIFS.

Vom face referire la un astfel de CIFS ca $\mathcal{S}_C = ((X, d), (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Operatorul fractal asociat CIFS-ului \mathcal{S}_C este funcția $F_{\mathcal{S}_C} : P_{cp}(X) \rightarrow P_{cp}(X)$, definită ca

$$F_{\mathcal{S}_C}(K) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(K)},$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Dacă operatorul fractal $F_{\mathcal{S}_C}$ este Picard, atunci spunem că CIFS-ul \mathcal{S}_C are atractor și unicul punctul fix al lui $F_{\mathcal{S}_C}$ se numește atractorul CIFS-ului \mathcal{S}_C care se notează cu $A_{\mathcal{S}_C} \in P_{cp}(X)$.

Teorema 1.3 (vezi Teorema 4.6 din [86] și Teorema 3.9 din [88]). *Dacă funcțiile constitutive f_n ale CIFS-ului $\mathcal{S}_C = ((X, d), (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ sunt contracții Matkowski unde funcțiile $\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sunt astfel încât $\sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(t) < t$ pentru orice $t \geq 0$, atunci \mathcal{S}_C are atractor.*

1.3.2 Sisteme iterative de funcții posibil infinite

Un concept mai general este acela de sistem iterativ de funcții posibil infinit. Astfel de sisteme cuprind atât cazul unui număr finit sau numărabil de funcții constitutive, cât și cazul unui număr infinit nenumărabil de funcții constitutive.

Definiția 1.8. Fie (X, d) un spațiu metric complet și o familie de funcții $(f_i)_{i \in I}$ cu următoarele proprietăți:

- $f_i : X \rightarrow X$ sunt contracții Banach astfel încât $\sup_{i \in I} lip(f_i) < 1$,

- familia de funcții $(f_i)_{i \in I}$ este mărginită, adică $\bigcup_{i \in I} f_i(A) \in P_b(X)$ pentru orice $A \in P_b(X)$.

Perechea $((X, d), (f_i)_{i \in I})$ se numește sistem iterativ de funcții posibil infinit. În continuare, vom numi un astfel de sistem, pe scurt, PIIFS.

Vom face referire la un astfel de PIIFS ca $\mathcal{S}_I = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$.

Operatorul fractal asociat PIIFS-ului \mathcal{S}_I este funcția $F_{\mathcal{S}_I} : P_{b,cl}(X) \rightarrow P_{b,cl}(X)$, dată de

$$F_{\mathcal{S}_I}(B) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(B)},$$

pentru orice $B \in P_{b,cl}(X)$.

Teorema 1.4 (vezi Teorema 4.1 din [57]). *Pentru orice $\mathcal{S}_I = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$, există un unic $A_{\mathcal{S}_I} \in P_{b,cl}(X)$, numit atractorul sistemului \mathcal{S}_I , astfel încât*

$$F_{\mathcal{S}_I}(A_{\mathcal{S}_I}) = A_{\mathcal{S}_I}.$$

În plus, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(F_{\mathcal{S}_I}^{[n]}(B), A_{\mathcal{S}_I}) = 0,$$

pentru orice $B \in P_{b,cl}(X)$.

1.4 Spațiul codurilor și proiecția canonică

Fie I o mulțime nevidă și $n \in \mathbb{N}$. În continuare, vom utiliza următoarele notații:

- $I^{\mathbb{N}} := \Lambda(I)$
- $I^{\{1,2,\dots,n\}} := \Lambda_n(I)$.

$\Lambda(I)$ este mulțimea cuvintelor infinite cu litere din alfabetul I și un element standard ω din $\Lambda(I)$ are forma $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots$.

$\Lambda_n(I)$ este mulțimea cuvintelor de lungime n cu litere din alfabetul I și un element standard ω din $\Lambda_n(I)$ are forma $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n$.

$\Lambda(I)$ înzestrat cu distanța dată de

$$d_{\Lambda}(\omega, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \omega = \theta \\ \frac{1}{2^{\min\{k \in \mathbb{N} : \omega_k \neq \theta_k\}}}, & \text{dacă } \omega \neq \theta \end{cases},$$

unde $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots$ și $\theta = \theta_1\theta_2\theta_3\dots\theta_n\theta_{n+1}\dots$, devine un spațiu metric.

Pentru $m \in \mathbb{N}$ și $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots \in \Lambda(I)$, vom folosi următoarea notație

$$\omega_1\omega_2\dots\omega_m := [\omega]_m.$$

Să observăm că dacă I este finit, atunci spațiul metric $(\Lambda(I), d_{\Lambda})$ este compact. Dacă I este infinit, atunci spațiul metric $(\Lambda(I), d_{\Lambda})$ este complet.

Pentru $i \in I$, putem considera funcția $\tau_i : \Lambda(I) \rightarrow \Lambda(I)$ dată de

$$\tau_i(\omega) = i\omega_1\omega_2\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots, \quad (1.2)$$

pentru orice $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n\omega_{n+1}\dots \in \Lambda(I)$.

Fie $f_i : X \rightarrow X$, $i \in I$ și $\omega = \omega_1\omega_2\dots\omega_n \in \Lambda_n(I)$. Vom folosi următoarea notație $f_{\omega_1\omega_2\dots\omega_n} := f_{\omega}$.

În cazul particular în care I are un singur element, i , avem $f_{\underset{n \text{ times}}{i\dots i}} = f_i^{[n]}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Proiecția canonică asociată unui IFS este o funcție surjectivă care duce spațiul codurilor $\Lambda(I)$ în atractorul IFS-ului considerat. Proiecția canonică permite caracterizări alternative ale atractorului unui IFS și este un instrument util în studiul fractalilor.

Definiția 1.9. Pentru IFS-ul $\mathcal{S} = ((X, d), (f_i)_{i \in I})$, având atractor, spunem că acesta admite proiecție canonică dacă:

- i) Pentru orice $\omega = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n\omega_{n+1} \dots \in \Lambda(I)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\omega_1\omega_2 \dots \omega_n}(x)$ - notată $\pi(\omega)$ - există și nu depinde de $x \in X$.
- ii) $\pi(\omega) \in A_{\mathcal{S}}$ pentru orice $\omega \in \Lambda(I)$.
- iii) Funcția $\pi : \Lambda(I) \rightarrow A_{\mathcal{S}}$ are următoarele proprietăți:
 - a) este continuă;
 - b) este surjectivă;
 - c) $\pi \circ \tau_i = f_i \circ \pi$ pentru orice $i \in I$.

Remarca 1.2. Funcția π din Definiția 1.9, iii) este denumită proiecția canonică de la $\Lambda(I)$ la $A_{\mathcal{S}}$.

2. Operatorul Read-Bajraktarevic

În acest capitol, studiem operatori de tip Read-Bajraktarevic, care sunt esențiali în teoria interpolării fractale. Partea finală a capitolului este dedicată studiului operatorilor de tip Read-Bajraktarevic care furnizează funcții de interpolare netede.

2.1 Funcții de interpolare

2.1.1 Sisteme finite de date

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un compact real și Γ un sistem finit de puncte definit de

$$\Gamma = \{(x_n, y_n) \in I \times \mathbb{R} : n \in \{0, \dots, N\}\},$$

unde $N \in \mathbb{N}$.

Dacă $x_{n-1} < x_n$ pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, sistemul de puncte Γ este numit un sistem de date. În acest caz, considerăm $I = [x_0, x_N]$.

Definiția 2.1. O funcție de interpolare corespunzătoare sistemului de date Γ este o funcție continuă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface $f(x_n) = y_n$, pentru orice $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Fie familia de homeomorfisme afine $k_n : I \rightarrow [x_{n-1}, x_n]$ astfel încât

$$k_n(x_0) = x_{n-1} \quad \text{și} \quad k_n(x_N) = x_n,$$

pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ și există $\zeta_n \in [0, 1)$ astfel încât

$$|k_n(x) - k_n(x')| \leq \zeta_n |x - x'|,$$

pentru orice $x, x' \in I$ și orice $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Fie familia de funcții continue $F_n : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$F_n(x_0, y_0) = y_{n-1} \quad \text{și} \quad F_n(x_N, y_N) = y_n,$$

pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Pentru $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, definim funcțiile $K_n : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R}$ astfel

$$K_n(x, y) = (k_n(x), F_n(x, y)),$$

pentru orice $x \in I$ și $y \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Sisteme numărabile de date

Fie (Y, d) un spațiu metric compact și Δ un sistem numărabil de puncte

$$\Delta = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times Y : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}. \quad (2.1)$$

Sistemul de puncte definit în relația (2.1) este numit un sistem numărabil de date dacă șirul $(x_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este strict crescător și mărginit, iar șirul $(y_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este convergent.

Vom folosi următoarele notații:

$$x_0 = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad y_0 = m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = M.$$

Definiția 2.2. În contextul descris mai sus, o funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow Y$ astfel încât $f(x_n) = y_n$ pentru orice $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ se numește funcție de interpolare corespunzătoare sistemului numărabil de date Δ .

Fie $\Delta = \{(x_n, y_n) \in [a, b] \times Y : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ un sistem numărabil de date.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $l_n : [a, b] \rightarrow [x_{n-1}, x_n]$ un homeomorfism pentru care există $L_n \in [0, 1)$ astfel încât

- i) $|l_n(x) - l_n(x')| \leq L_n|x - x'|$ pentru orice $x, x' \in [a, b]$;
- ii) $l_n(a) = x_{n-1}$ și $l_n(b) = x_n$;
- iii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} L_n < 1$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $W_n : [a, b] \times Y \rightarrow Y$ o funcție continuă astfel încât

- j) $W_n(a, m) = y_{n-1}$ și $W_n(b, M) = y_n$;
- jj) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(\text{Im } W_n) = 0$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, definim $f_n : [a, b] \times Y \rightarrow [a, b] \times Y$ astfel încât

$$f_n(x, y) = (l_n(x), W_n(x, y)),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și $y \in Y$.

2.2 Operatori de tip Read-Bajraktarevic

2.2.1 Operatorul de tip Read-Bajraktarevic pentru cazul finit

Considerăm contextul descris în secțiunea 1.1.1 și spațiul $C^{y_0, y_N}(I)$ înzestrat cu metrica uniformă d_u . În continuare, vom folosi notația $C^{y_0, y_N}(I) = \mathcal{C}$.

Fie $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, operatorul de tip Read-Bajraktarevic definit ca

$$\mathcal{T}(f)(x) = F_n(k_n^{-1}(x), f(k_n^{-1}(x))),$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}$ și orice $x \in [x_{n-1}, x_n]$.

Operatorul \mathcal{T} este bine definit și $\mathcal{T}(f)(x_n) = y_n$, pentru orice $f \in \mathcal{C}$ și orice $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Teorema 2.1. *În contextul anterior, fie F_n contracții Matkowski în a doua variabilă, adică există funcțiile crescătoare $\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_n^{[m]}(t) = 0$ pentru orice $t > 0$ și*

$$|F_n((x, y)) - F_n((x, y'))| \leq \varphi_n(|y - y'|)$$

pentru orice $x \in I$ și $y, y' \in \mathbb{R}$. Dacă funcția $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definită ca $\varphi(t) = \sup_{n \in \{1, 2, \dots, N\}} \varphi_n(t)$ satisface condiția $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi^{[m]}(t) = 0$ pentru orice $t > 0$, atunci operatorul \mathcal{T} este o contracție Matkowski și, în consecință, are un unic punct fix $f_* \in \mathcal{C}$ care este o funcție de interpolare pentru sistemul de date Γ .

2.2.2 Operatorul de tip Read-Bajraktarevic pentru cazul numărabil

Fie contextul descris în secțiunea 1.2. Considerăm spațiul $C_Y^{m, M}([a, b])$ înzestrat cu metrica uniformă d_u . Vom nota $C_Y^{m, M}([a, b])$ cu \mathfrak{C} .

Pentru $f \in \mathfrak{C}$, considerăm funcția $\mathbf{T}_f : [a, b] \rightarrow Y$ definită astfel:

$$\mathbf{T}_f(x) = \begin{cases} W_n(l_n^{-1}(x), f(l_n^{-1}(x))), & \text{dacă } x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n \in \mathbb{N} \\ M, & \text{dacă } x = b. \end{cases}$$

Deoarece \mathbf{T}_f este bine definită și $\mathbf{T}_f \in \mathfrak{C}$, putem considera operatorul $T : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$, definit ca

$$T(f) = \mathbf{T}_f$$

pentru fiecare $f \in \mathfrak{C}$, care este bine definit.

2.2.3 Funcții de interpolare netede

Chiar dacă interpolarea fractală are o importanță deosebită pentru modelarea datelor neregulate, care necesită funcții care nu sunt diferentiabile în niciun punct, ea include și funcții netede. Această secțiune prezintă rezultate care fac parte din [66].

Fie $k \in \mathbb{N}$ arbitrar, dar fixat. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și intervalul real $I = [a, b]$. Pentru $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, să considerăm $x_i \in [a, b]$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ astfel încât $x_0 = a$, $x_N = b$ și $x_{i-1} < x_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Vom nota cu I_i intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Considerăm sistemul finit de date

$$\Delta' = \{(x_i, y_{i,p}) \in I \times \mathbb{R} : i \in \{0, 1, \dots, N\}, p \in \{0, 1, \dots, k\}\}.$$

Fie $l_i : I \rightarrow I_i$ definit astfel:

$$l_i(x) = \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a}x + \frac{bx_{i-1} - ax_i}{b - a} = a_i x + b_i,$$

pentru fiecare $x \in I$.

Considerăm $S_i \in C^k(I)$ și $R_i \in C^k(\mathbb{R})$, unde $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Pentru $f \in C^k(I)$ astfel încât $f^{(p)}(x_i) = y_{i,p}$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ și $p \in \{0, 1, \dots, k\}$, definim familia de funcții continue $W_i : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel:

$$W_i(x, y) = f(l_i(x)) + R_i(y) - S_i(x),$$

pentru orice $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ și orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

În plus, presupunem că pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ și $p \in \{1, 2, \dots, k\}$ sunt satisfăcute următoarele condiții:

$$S_i^{(p)}(a) = \sum_{j=1}^p R_i^{(j)}(y_{0,0}) B_{p,j}(y_{0,1}; y_{0,2} \dots; y_{0,p-j+1}), \quad (2.2)$$

$$S_i^{(p)}(b) = \sum_{j=1}^p R_i^{(j)}(y_{N,0}) B_{p,j}(y_{N,1}; y_{N,2} \dots; y_{N,p-j+1}), \quad (2.3)$$

$$S_i(a) = R_i(y_{0,0}) \quad \text{și} \quad S_i(b) = R_i(y_{N,0}),$$

unde $B_{p,j}$ sunt polinoamele Bell definite în secțiunea 1.1.

Considerăm

$$\mathcal{A}^k(I) = \{g \in C^k(I) : g^{(p)}(a) = y_{0,p} \text{ și } g^{(p)}(b) = y_{N,p} \text{ pentru fiecare } p \in \{0, 1, \dots, k\}\},$$

înzestrată cu norma $\|\cdot\|_k$ (definită în secțiunea 1.1).

Fie operatorul de tip Read-Bajraktarevic $\mathcal{D} : \mathcal{A}^k(I) \rightarrow \mathcal{A}^k(I)$ definit ca

$$\mathcal{D}(g)(x) = W_i(l_i^{-1}(x), g(l_i^{-1}(x))) = f(x) + R_i(g(l_i^{-1}(x))) - S_i(l_i^{-1}(x)),$$

pentru orice $x \in I_i$ și orice $g \in \mathcal{A}^k(I)$.

Propoziția 2.1. *Operatorul \mathcal{D} este bine definit.*

Teorema 2.2 (vezi Teorema 5 din [66]). *În contextul menționat mai sus, există $f^R \in C^k(I)$ care satisface următoarele ecuații funcționale:*

$$\begin{aligned} (f^R)^{(p)}(x) &= f^{(p)}(x) + \\ &+ a_i^{-p} \sum_{j=1}^p R_i^{(j)}(f^R(l_i^{-1}(x))) B_{p,j}((f^R)^{(1)}(l_i^{-1}(x)); \dots; (f^R)^{(p-j+1)}(l_i^{-1}(x))) - \\ &- a_i^{-p} S_i^{(p)}(l_i^{-1}(x)) = f^{(p)}(x) + a_i^{-p} (R_i \circ f^R)^{(p)}(l_i^{-1}(x)) - a_i^{-p} S_i^{(p)}(l_i^{-1}(x)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $p \in \{1, \dots, N\}$, $x \in I_i$ și

$$f^R(x) = f(x) + (R_i \circ f^R)(l_i^{-1}(x)) - S_i(l_i^{-1}(x)), \quad (2.5)$$

pentru orice $x \in I_i$. Funcția f^R interpolează sistemul de date Δ' .

3. O nouă schemă de interpolare fractală numărabilă în care sunt implicate contractii Rakotch

O direcție de interes în ceea ce privește funcțiile de interpolare fractală (FIF) se axează pe utilizarea unor teoreme de punct fix mai generale decât teorema de punct fix a lui Banach (vezi Teorema 1.1) pentru a demonstra existența FIF-urilor. După lucrarea inițială a lui Barnsley, multe extinderi ale interpolării fractale s-au bazat predominant pe teorema lui Banach pentru a stabili existența FIF-urilor. Cu toate acestea, dezvoltările recente au deschis noi posibilități prin utilizarea altor teoreme cu punct fix. În acest context, au apărut contribuții semnificative, dintre care menționăm pe cea a lui S. Ri, care a utilizat contractii de tip Rakotch pentru a obține rezultate noi (vezi [75]), J. Kim et al. care au apelat la contractii de tip Geraghty (vezi [38]) și S. Ri și V. Drakopoulos care au extins rezultatele pentru suprafețe (vezi [77]). Aceste noi rezultate evidențiază diversificarea instrumentelor și tehnicilor matematice utilizate în cercetarea existenței FIF-urilor, oferind noi căi de explorare în această zonă de cercetare.

O altă direcție legată de FIF-uri se referă la considerarea unei mulțimi numărabile de puncte în locul uneia finite. În această direcție, N. Secelean a introdus interpolarea fractală numărabilă (vezi [82]) bazată pe sisteme iterative de funcții numărabile (CIFS) (vezi [29], [81], [87]). Secelean a demonstrat existența FIF pentru un set de date $\Delta = \{(x_n, y_n) \in I \times \mathbb{R} : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$, unde $(x_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este un șir strict crescător și mărginit cu $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, astfel încât $I = [x_0, b]$, iar $(y_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este un șir convergent (vezi [82]). A. Gowrisankar și R. Uthayakumar au extins aceste rezultate pentru date în care $(x_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este un șir monoton și mărginit, iar $(y_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ este un șir mărginit (vezi [31]). Această direcție de cercetare a fost dezvoltată în lucrări

ulterioare, inclusiv [83], [84] și [93], evidențiindu-se interesul în creștere asupra interpolării fractale numărabile.

În acest capitol, combinăm cele două linii distincte de cercetare inițiate de Secelean și Ri. Astfel, introducem o nouă schemă de interpolare fractală pentru sisteme numărabile de date și CIFS-uri compuse din contracții Rakotch. Conținutul acestui capitol se bazează pe rezultatele din „**A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions**”, publicat în „*Results in Mathematics*” de C. Păcurar (see [68]).

3.1 Funcții de interpolare fractală implicând contracții Rakotch

Fie (Y, d) un spațiu metric compact, familiile de funcții $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și familia de numere $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definite în secțiunea 2.1.2.

Operatorul T este operatorul Read-Bajraktarevich pentru cazul numărabil, introdus în secțiunea 2.2.2, pentru sistemul numărabil de date (2.1).

Primul rezultat demonstrează că operatorul T este o contracție Matkowski dacă funcțiile W_n sunt contracții Matkowski în al doilea argument. Astfel, deoarece (\mathfrak{C}, d_u) este complet, teorema următoare demonstrează că operatorul T are un unic punct fix dacă funcțiile W_n sunt contracții Matkowski în al doilea argument.

Teorema 3.1 (vezi Teorema 3 din [68]). *Fie $\Delta = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times Y : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ un sistem numărabil de date. Dacă funcțiile W_n sunt contracții Matkowski în cel de al doilea argument, adică există o funcție crescătoare $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ pentru orice $t > 0$ și*

$$d(W_n((x, y)), W_n((x, y'))) \leq \varphi(d(y, y')) \quad (3.1)$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și $y, y' \in Y$, atunci T este o contracție Matkowski.

Următorul rezultat demonstrează că dacă funcțiile W_n sunt Lipschitz în primul argument și contracții Rakotch în a doua variabilă, atunci funcțiile f_n sunt contracții Rakotch în raport cu o metrică echivalentă cu cea inițială pe $[a, b] \times Y$. Funcțiile f_n sunt funcțiile constitutive ale CIFS care vor furniza FIF.

Teorema 3.2 (vezi Teorema 4 din [68]). *Fie $\Delta = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times Y : n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ un sistem numărabil de date astfel încât W_n sunt Lipschitz în prima variabilă și contracții Rakotch în a doua variabilă, adică există*

$L > 0$ și o funcție crescătoare $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât funcția $\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, dată de $\alpha(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$, pentru orice $t > 0$ să fie descrescătoare și $\alpha(t) < 1$ pentru orice $t > 0$, astfel încât

$$d(W_n((x, y)), W_n((x', y'))) \leq L|x - x'| + \varphi(d(y, y')),$$

pentru orice $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times Y$, $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, f_n sunt contracții Rakotch în raport cu metrica d_θ dată de

$$d_\theta((x, y), (x', y')) := |x - x'| + \theta d(y, y'),$$

pentru orice $(x, y), (x', y') \in [a, b] \times Y$, unde $\theta = \frac{1 - \sup_{n \in \mathbb{N}} L_n}{2(L+1)} \in (0, 1)$.

Teorema 3.3 (vezi Teorema 6 din [68]). În contextul Teoremei 3.1, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{T^{[n]}(f_0)} = G_{f_*},$$

pentru orice $f_0 \in \mathfrak{C}$.

3.2 Cazuri particulare de CIFS care implică contracții Rakotch

Această secțiune prezintă câteva cazuri particulare de CIFS-uri care implică contracții de tip Banach și Rakotch.

În contextul secțiunii 2.1.2, putem alege

$$l_n(x) = \frac{x_n - x_{n-1}}{b - a}x + \frac{bx_{n-1} - ax_n}{b - a},$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prezentăm două moduri de a alege funcțiile W_n , presupunând că $Y \subseteq [0, \infty)$:

A.

$$\begin{aligned} W_n(x, y) &= \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{b - a} - d_n \frac{M - m}{b - a} \right) x + d_n y + \frac{by_{n-1} - ay_n}{b - a} - d_n \frac{bm - aM}{b - a} = \\ &= c_n x + d_n y + g_n, \end{aligned}$$

unde $d_n \in [0, 1)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

W_n sunt contracții Banach în a doua variabilă, ceea ce implică faptul că sunt contracții Rakotch în a doua variabilă pentru funcția φ dată de $\varphi(t) = c \cdot t$ pentru orice $t \geq 0$.

În acest caz, funcțiile f_n sunt definite ca:

$$f_n(x, y) = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} x + \frac{bx_{n-1} - ax_n}{b-a}, \right. \\ \left. \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{b-a} - d_n \frac{M-m}{b-a} \right) x + d_n y + \frac{by_{n-1} - ay_n}{b-a} - d_n \frac{bm - aM}{b-a} \right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b]$, $y \in Y$.

B.

$$W_n(x, y) = c_n x + \frac{y}{1+ny} + g_n,$$

unde

$$c_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{b-a} - \frac{1}{b-a} \left(\frac{M}{1+nM} - \frac{m}{1+nm} \right)$$

și

$$g_n = y_{n-1} - a \frac{y_n - y_{n-1}}{b-a} + \frac{a}{b-a} \frac{M}{1+nM} - \frac{b}{b-a} \frac{m}{1+nm},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

W_n sunt contracții Rakotch în a doua variabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În acest caz, funcțiile f_n pot fi alese astfel:

$$f_n(x, y) = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} x + \frac{bx_{n-1} - ax_n}{b-a}, \right. \\ \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{b-a} - \frac{1}{b-a} \left(\frac{M}{1+nM} - \frac{m}{1+nm} \right) \right) x + \frac{y}{1+ny} + \\ \left. + y_{n-1} - a \frac{y_n - y_{n-1}}{b-a} + \frac{a}{b-a} \frac{M}{1+nM} - \frac{b}{b-a} \frac{m}{1+nm} \right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [a, b]$, $y \in Y$.

4. O schemă de interpolare fractală pentru seturi de date posibil foarte mari

În acest capitol, extindem metoda de interpolare fractală a lui Barnsley. Considerăm $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\{a, b\} \subseteq A = \bar{A} \subseteq [a, b]$ și interiorul lui A , notat cu $\overset{\circ}{A}$, este vid. Rezultatul principal afirmă că pentru orice funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ există o funcție continuă $g^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și un PIIFS al cărui atractor este graficul funcției g^* și $g^*|_A = f$. Cu alte cuvinte, rezultatul principal asigură existența unei FIF corespunzătoare setului de date $\{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Dacă A este finit, obținem schema de interpolare fractală a lui Barnsley din [5]. Pe de altă parte, atunci când A are forma $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător, $x_1 = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ și $x_n \in [a, b]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, obținem schema de interpolare prezentată de Secelean în [82]. Subliniem faptul că schema noastră de interpolare permite ca mulțimea A să fie nenumărabilă, cum este cazul mulțimii triadice a lui Cantor.

Principalul instrument utilizat pentru trecerea de la date numărabile la date nenumărabile este teorema de structură a submulțimilor deschise din \mathbb{R} . Această teoremă furnizează un șir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale deschise și disjuncte care au proprietatea că $[a, b] \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Folosind acest șir, considerăm operatorul $T : C^{f(a), f(b)}([a, b]) \rightarrow C^{f(a), f(b)}([a, b])$. Aspectul cel mai dificil care apare în contextul datelor nenumărabile este demonstrarea bunei definiții a operatorului, T deoarece trebuie să depășim unele dificultăți tehnice.

Rezultatele cuprinse în acest capitol, care fac parte din articolul „**A fractal interpolation scheme for a possible sizeable set of data**” publicat în colaborare cu R. Miculescu și A. Mihail în „*Journal of Fractal Geometry*” (vezi [55]), sunt mai generale decât rezultatele existente în literatura de specialitate.

4.1 Câteva rezultate tehnice

Să considerăm $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $A \subseteq \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

- i) $\{a, b\} \subseteq A = \overline{A} \subseteq [a, b]$;
- ii) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

Atunci există un șir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale deschise și disjuncte astfel încât

$$[a, b] \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

unde $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom studia separat punctele de acumulare ale lui $A \cap (x, \infty)$, respectiv $A \cap (-\infty, x)$, și punctele care nu sunt puncte de acumulare.

Remarca 4.1 (vezi Remarca 3.2. din [55]). *a) Dacă $x \in A$ nu este un punct de acumulare al lui $A \cap (x, \infty)$, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = \alpha_n$.*

b) Similar, dacă x nu este un punct de acumulare al lui $A \cap (-\infty, x)$, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = \beta_n$.

Remarca 4.2 (vezi Remarca 3.3. din [55]). *a) Dacă $x \in A$ este un punct de acumulare al lui $A \cap (x, \infty)$, atunci pentru orice șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (x, b) \setminus A$ având proprietatea că $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, există un șir $((\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ de elemente din familia $\{(\alpha_n, \beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ astfel încât:*

- i) $x < \alpha_{n_k} < \beta_{n_k}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- ii) $x_k \in (\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- iii) mulțimea $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$ este finită pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = x$.*

b) Similar, dacă $x \in A$ este un punct de acumulare al lui $A \cap (-\infty, x)$, atunci pentru orice șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (a, x) \setminus A$ având proprietatea că $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, există un șir $((\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ de elemente din familia $\{(\alpha_n, \beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ astfel încât:

- i) $\alpha_{n_k} < \beta_{n_k} < x$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- ii) $x_k \in (\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- iii) mulțimea $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cap (\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})$ este finită pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
- iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = x$.*

4.2 Funcții de interpolare fractală asociate unor seturi de date posibil foarte mari

Considerăm funcțiile $l_n : [a, b] \rightarrow [\alpha_n, \beta_n]$ date de

$$l_n(x) = \frac{\beta_n - \alpha_n}{b - a}x + \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b - a} = a_n x + b_n,$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 4.3 (vezi Remarca 3.4. din [55]). *Pentru funcțiile l_n , sunt satisfăcute următoarele:*

a) $l_n(a) = \alpha_n$ și $l_n(b) = \beta_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) $l_n^{-1} : [\alpha_n, \beta_n] \rightarrow [a, b]$ este dată de

$$l_n^{-1}(x) = \frac{b - a}{\beta_n - \alpha_n}x + \frac{\beta_n a - \alpha_n b}{\beta_n - \alpha_n},$$

pentru orice $x \in [\alpha_n, \beta_n]$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

c) $l_n^{-1}(\alpha_n) = a$ și $l_n^{-1}(\beta_n) = b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru o funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, considerăm funcțiile $g_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ date de

$$\begin{aligned} g_n(x, y) &= \\ &= \left(\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{b - a} - d_n \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) x + d_n y + \frac{bf(\alpha_n) - af(\beta_n)}{b - a} - d_n \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \\ &= c_n x + d_n y + e_n, \end{aligned}$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ și orice $n \in \mathbb{N}$, unde $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1)$ este astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$.

Remarca 4.4 (vezi Remarca 3.5. din [55]). *Pentru funcțiile g_n , sunt satisfăcute condițiile: $g_n(a, f(a)) = f(\alpha_n)$ și $g_n(b, f(b)) = f(\beta_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Să considerăm spațiul $C^{f(a), f(b)}([a, b])$ înzestrat cu metrica uniformă d_u . Vom nota $C^{f(a), f(b)}([a, b])$ cu \mathbf{C} .

Pentru $g \in \mathbf{C}$, să considerăm funcția $T_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$T_g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ c_n l_n^{-1}(x) + d_n g(l_n^{-1}(x)) + e_n, & \text{dacă } x \in (\alpha_n, \beta_n) \end{cases} .$$

Remarca 4.5 (vezi Remarca 3.6. din [55]). a) Avem $T_g(\alpha_n) = c_n l_n^{-1}(\alpha_n) + d_n g(l_n^{-1}(\alpha_n)) + e_n$, pentru orice $g \in \mathbf{C}$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

b) În mod similar, avem $T_g(\beta_n) = c_n l_n^{-1}(\beta_n) + d_n g(l_n^{-1}(\beta_n)) + e_n$, pentru orice $g \in \mathbf{C}$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Propoziția 4.1 (vezi Propoziția 3.7. din [55]). În contextul de mai sus, avem $T_g \in \mathbf{C}$, pentru orice $g \in \mathbf{C}$.

Propoziția 4.1 ne permite să definim operatorul $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ dat de

$$T(g) = T_g,$$

pentru orice $g \in \mathbf{C}$.

Propoziția 4.2 (vezi Propoziția 3.8. din [55]). În contextul menționat mai sus, avem

$$d_u(T(g_1), T(g_2)) \leq \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} d_n \right) d_u(g_1, g_2),$$

pentru orice $g_1, g_2 \in \mathbf{C}$, deci T este o contractie Banach în raport cu metrica uniformă d_u .

Deoarece (\mathbf{C}, d_u) este un spațiu metric complet, folosind Teorema 1.1, Propoziția 4.2 asigură existența unui unic $g^* \in \mathbf{C}$ astfel încât

$$T(g^*) = g^*.$$

Remarca 4.6 (vezi Remarca 3.9. din [55]). Avem $g_{1A}^* = f$.

Vom demonstra că există un PIIFS al cărui atractor este graficul funcției g^* . În acest sens, considerăm funcțiile $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ date de

$$f_n(x, y) = (a_n x + b_n, c_n x + d_n y + e_n),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 4.7 (vezi Remarca 3.10. din [55]). a) Avem $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < 1$.

b) Șirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit.

Remarca 4.7 ne permite să considerăm $\theta \in \left(0, \frac{1 - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n}{C} \right)$, unde $C > 0$ este astfel încât $|c_n| \leq C$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și metrica ρ , pe \mathbb{R}^2 , dată de

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta |y_1 - y_2|,$$

pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Propoziția 4.3 (vezi Propoziția 3.11. din [55]). *În contextul descris mai sus, funcțiile f_n sunt contractii Banach în raport cu metrica ρ .*

Remarca 4.8 (vezi Remarca 3.12. din [55]). *a) Spațiul metric (\mathbb{R}^2, ρ) este un spațiu metric complet.*

b) Avem $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{lip}(f_n) \leq \max\{\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n + \theta C, \sup_{n \in \mathbb{N}} d_n\} < 1$.

c) Familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginită deoarece șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt mărginite.

Datorită Remarcii 4.8, putem considera PIIFS (vezi secțiunea 1.3.2.) $\mathcal{S}_I = ((\mathbb{R}^2, \rho), (f_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Teorema 4.1 (vezi Teorema 3.13. din [55]). *În contextul menționat mai sus, avem*

$$G_{g^*} = \{(x, g^*(x)) : x \in [a, b]\} = A_{\mathcal{S}_I}.$$

Vom prezenta câteva exemple de mulțimi A care satisfac condițiile menționate mai sus:

- A. Dacă A este finită, obținem schema clasică de interpolare a lui Barnsley (vezi [5]).
- B. Dacă $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător, $x_1 = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, obținem schema de interpolare prezentată în [82].
- C. Putem alege $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a, b\}$, unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $x_n \in [a, \frac{a+b}{2}]$ și $y_n \in [\frac{a+b}{2}, b]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- D. Putem alege A să fie mulțimea triadică a lui Cantor. Acesta este un exemplu important deoarece A nu este numărabilă. Prin urmare, schema noastră este o generalizare a celei prezentate de Secelean în [82].

Partea finală a acestui capitol prezintă un rezultat care arată că, pentru orice $g \in \mathbf{C}$, dacă n este destul de mare, graficul FIF poate fi aproximat, oricât de bine, de graficul lui $T^{[n]}(g)$.

Teorema 4.2 (vezi Teorema 3.14. din [55]). *În contextul descris mai sus, avem $F_{\mathcal{S}_I}(G_g) = G_{T(g)}$, pentru orice $g \in \mathbf{C}$.*

Teorema 4.3 (vezi Teorema 3.15. din [55]). *În contextul menționat mai sus, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} h(G_{T^{[n]}(g)}, G) = 0$, pentru orice $g \in \mathbf{C}$.*

5. Sisteme iterative de funcții de tip interpolare

În acest capitol introducem un concept nou de IFS, mai precis, noțiunea de sistem iterativ de funcții de tip interpolare. Conceptul se bazează pe proprietățile IFS-urilor folosite în construirea FIF-urilor. Demonstrăm mai multe proprietăți pe care aceste sisteme le au, iar rezultatul principal afirmă că un astfel de sistem are atractor și că admite proiecție canonică. În plus, prezentăm un rezultat de punct fix, pe care îl obținem ca un corolar al rezultatului nostru principal.

Conținutul acestui capitol se bazează pe articolul „**Interpolation type iterated function systems**”, publicat în „*Journal of Mathematical Analysis and Applications*” în colaborare cu Radu Miculescu și Alexandru Mihail (vezi [56]).

5.1 Leme auxiliare

Prima secțiune este dedicată unor leme preliminare esențiale în demonstrarea rezultatelor principale ale acestui capitol.

Lemma 5.1 (vezi Lema 2.7 din [56]). *Fie două spații metrice (X, d) și (Y, ρ) și o mulțime finită nevidă I . Presupunem că următoarele mulțimi de funcții din Y în Y $\{A_{\omega, n} : \omega \in \Lambda(I), n \in \mathbb{N}\}$ și $\{A_{\omega, x, n, k} : \omega \in \Lambda(I), x \in X, n, k \in \mathbb{N}\}$ au proprietățile următoare:*

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}, \omega \in \Lambda(I), x \in K_1, y \in Y} \rho(A_{\omega, x, n, k}(y), A_{\omega, n}(y)) = 0, \text{ pentru orice } K_1 \in P_{cp}(X).$$

ii) *Există o funcție $b : \Lambda(I) \rightarrow Y$ astfel încât pentru orice $K_2 \in P_{cp}(Y)$ avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Lambda(I), y \in K_2} \rho((A_{\omega, 1} \circ \dots \circ A_{\omega, n})(y), b(\omega)) = 0.$$

iii) Există $C \in [0, 1)$ astfel încât

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}, \omega \in \Lambda(I), x \in K_1} \text{lip}(A_{\omega,x,n,k}) \leq C,$$

pentru orice $K_1 \in P_{cp}(X)$.

Atunci, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Lambda(I), x \in K_1, y \in K_2} \rho((A_{\omega,x,1,n} \circ A_{\omega,x,2,n-1} \circ \dots \circ A_{\omega,x,n-1,2} \circ A_{\omega,x,n,1})(y), b(\omega)) = 0,$$

pentru orice $K_1 \in P_{cp}(X)$ și $K_2 \in P_{cp}(Y)$.

5.2 Sisteme iterative de funcții de tip interpolare

În această secțiune prezentăm definiția unui sistem iterativ de funcții de tip interpolare și furnizăm câteva exemple de astfel de sisteme.

Fie spațiile metrice (X, d) și (Y, ρ) , și $d_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\}$, pentru orice $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Considerăm spațiul metric $(X \times Y, d_{\max})$.

Definiția 5.1 (vezi Definiția 3.1 din [56]). Un sistem iterativ de funcții de tip interpolare \mathcal{S} constă în:

- două spații metrice complete (X, d) și (Y, ρ)
- o familie finită de funcții $(f_i)_{i \in I}$ astfel încât:
 - i) Pentru fiecare $i \in I$, există funcțiile continue $g_i : X \rightarrow X$ și $h_i : X \times Y \rightarrow Y$ cu proprietatea că $f_i : X \times Y \rightarrow X \times Y$ este dată de $f_i(x, y) = (g_i(x), h_i(x, y))$, pentru orice $(x, y) \in X \times Y$.
 - ii) Pentru orice $\omega \in \Lambda(I)$, există $a_\omega \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K, \omega \in \Lambda(I)} d(g_{[\omega]_n}(x), a_\omega) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

iii) Există $C \in [0, 1)$ astfel încât

$$\rho(h_i(x, y_1), h_i(x, y_2)) \leq C \rho(y_1, y_2),$$

pentru orice $x \in X, y_1, y_2 \in Y$ și $i \in I$.

În continuare, un astfel de sistem iterativ de funcții de tip interpolare reprezintă perechea $\mathcal{S} = ((X \times Y, d_{\max}), (f_i)_{i \in I})$ și, ne vom referi la el, pe scurt, ca I-tIFS.

Remarca 5.1. a) Un exemplu de I-tIFS este $\mathcal{S} = ((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\infty}), (f_i)_{i \in I})$ unde există $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}$, $a_i, d_i \in [0, 1)$ astfel încât

$$f_i(x, y) = (a_i x + b_i, c_i x + d_i y + e_i),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ și $i \in I$.

b) Condiția ii) din definiția anterioară este legată de conceptul de „point-fibred IFS”, introdus inițial de B. Kieninger (vezi [37]) în cazul în care (X, d) este un spațiu metric compact. Bazându-ne pe Teorema 3.7 și Corolarul 3.11 din [40], această condiție este îndeplinită dacă funcțiile g_i sunt contracții Browder (care includ contracțiile Rakotch).

Prin urmare, un exemplu mai subtil decât primul ar putea fi construit luând funcțiile g_i contracții Browder, care nu sunt contracții Banach. Pentru a ilustra acest lucru, prezentăm un alt exemplu de I-tIFS: fie $\mathcal{S} = (([0, 1] \times \mathbb{R}, |\cdot|), (f_i)_{i \in \{1, 2\}})$, pentru care există $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in [0, 1)$ astfel încât

$$f_i(x, y) = (\sin x, a_i x + b_i y + c_i),$$

pentru orice $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ și $i \in \{1, 2\}$.

c) Prezentăm două exemple de I-tIFS-uri pentru care spațiile metrice (X, d) și (Y, ρ) sunt compacte.

Primul este $(([0, 1] \times [0, 1], \|\cdot\|_{\infty}), (f_i)_{i \in \{1, 2\}})$ unde

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{2x+y+1}{4} \right) \quad \text{și} \quad f_2(x, y) = \left(\frac{x+2}{4}, \frac{x+y+2}{4} \right)$$

pentru orice $x, y \in [0, 1]$.

Al doilea este $(([0, 1] \times [0, 1], \|\cdot\|_{\infty}), (f_i)_{i \in \{1, 2\}})$ unde

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x+7}{8}, \frac{x+2y+1}{4} \right) \quad \text{și} \quad f_2(x, y) = \left(\sin x, \frac{3x+2y+1}{6} \right)$$

pentru orice $x, y \in [0, 1]$.

5.3 Proprietăți ale sistemelor iterative de funcții de tip interpolare

Această secțiune prezintă proprietățile I-tIFS-urilor. Aceste proprietăți sunt de o importanță deosebită în demonstrarea rezultatului principal, care asigură existența atractorului unui I-tIFS.

Lemma 5.2 (vezi Lema 3.3. din [56]). *Pentru orice I-tIFS $\mathcal{S} = ((X \times Y, d_{max}), (f_i)_{i \in I})$ avem*

$$\{a_\omega : \omega \in \Lambda(I)\} \in P_{cp}(X).$$

În particular,

$$\{a_\omega : \omega \in \Lambda(I)\} \in P_b(X).$$

Lemma 5.3 (vezi Lema 3.4. din [56]). *Pentru orice I-tIFS $\mathcal{S} = ((X \times Y, d_{max}), (f_i)_{i \in I})$, IFS-ul $\mathcal{G} = ((X, d), (g_i)_{i \in I})$ are attractor.*

Să luăm în considerare un I-tIFS $\mathcal{S} = ((X \times Y, d_{max}), (f_i)_{i \in I})$ și două familii de funcții din Y în Y : $\{A_{\omega,n} : \omega \in \Lambda(I), n \in \mathbb{N}\}$ și $\{A_{\omega,x,n,k} : \omega \in \Lambda(I), x \in X, n, k \in \mathbb{N}\}$, definite ca

$$A_{\omega,x,n,k}(y) = \begin{cases} h_{\omega_n}(g_{\omega_{n+1}\omega_{n+2}\dots\omega_{n+k-1}}(x), y), & \text{dacă } k \geq 2 \\ h_{\omega_n}(x, y), & \text{dacă } k = 1 \end{cases}$$

și

$$A_{\omega,n}(y) = h_{\omega_n}(a_{\omega_{n+1}\omega_{n+2}\dots\omega_m}\dots(x), y)$$

pentru orice $y \in Y$.

Lemma 5.4 (vezi Lema 3.5. din [56]). *În contextul descris mai sus, avem*

$$f_{[\omega]_n}(x, y) = (g_{[\omega]_n}(x), (A_{\omega,x,1,n} \circ A_{\omega,x,2,n-1} \circ \dots \circ A_{\omega,x,n-1,2} \circ A_{\omega,x,n,1})(y)),$$

pentru orice $x \in X, y \in Y$ și $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lemma 5.5 (vezi Lema 3.6. din [56]). *În contextul menționat anterior, avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}, \omega \in \Lambda(I), x \in K_1, y \in K_2} \rho(A_{\omega,x,n,k}(y), A_{\omega,n}(y)) = 0,$$

pentru orice $K_1 \in P_{cp}(X)$ și $K_2 \in P_{cp}(Y)$.

Lemma 5.6 (vezi Lema 3.7. din [56]). *În contextul descris mai sus, avem*

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}, \omega \in \Lambda(I), x \in K} \text{lip}(A_{\omega,x,n,k}) \leq C,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.

Lemma 5.7 (vezi Lema 3.8. din [56]). *În contextul descris mai sus există o funcție $b : \Lambda(I) \rightarrow Y$ astfel încât*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{\omega,1} \circ \dots \circ A_{\omega,n})(y) = b(\omega),$$

pentru orice $y \in Y$.

Mai mult,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Lambda(I), y \in K} \rho((A_{\omega,1} \circ \dots \circ A_{\omega,n})(y), b(\omega)) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(Y)$.

5.4 Sistemele iterative de funcții de tip interpolare au atractor și admit proiecție canonică

În această secțiune stabilim rezultatul principal al acestui capitol.

Propoziția 5.1 (vezi Propoziția 4.1. din [56]). *Fie $S = ((X \times Y, d_{\max}), (f_i)_{i \in I})$ un I-IFS astfel încât (Y, ρ) este compact. Atunci există o funcție $b : \Lambda(I) \rightarrow Y$ astfel încât pentru orice $K \in P_{cp}(X \times Y)$ avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Lambda(I), (x,y) \in K} d_{\max}(f_{[\omega]_n}(x, y), (a_\omega, b(\omega))) = 0.$$

În contextul Propoziției de mai sus, folosind notația $b(\omega) := b_\omega$, considerăm funcția $\pi : \Lambda(I) \rightarrow X \times Y$, definită prin

$$\pi(\omega) = (a_\omega, b_\omega),$$

pentru orice $\omega \in \Lambda(I)$ și

$$\pi(\Lambda(I)) = \{(a_\omega, b_\omega) : \omega \in \Lambda(I)\} := A_S.$$

Propoziția 5.2 (vezi Propoziția 4.2. din [56]). Fie $S = ((X \times Y, d_{\max}), (f_i)_{i \in I})$ un *I*-IFS astfel încât (Y, ρ) este compact. Atunci:

- a) π este continuă.
- b) $f_i \circ \pi = \pi \circ \tau_i$, pentru orice $i \in I$.
- c) $F_S(A_S) = A_S$.
- d) $A_S \in P_{cp}(X \times Y)$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_S^{[n]}(K) = A_S$, pentru orice $K \in P_{cp}(X \times Y)$.
- f) A_S este unicul punct fix al lui F_S .

Rezultatele prezentate în Propoziția anterioară pot fi rezumate în următoarea teoremă centrală a acestui capitol:

Teorema 5.1 (vezi Teorema 4.3. din [56]). Orice *I*-IFS $S = ((X \times Y, d_{\max}), (f_i)_{i \in I})$ cu (Y, ρ) compact are attractor și admite proiecție canonică.

5.5 Un rezultat de punct fix corelat

Ca rezultat suplimentar ce decurge din Teorema 5.1, în cazul particular când I are un singur element, obținem următorul rezultat de punct fix legat de Teorema 2.2 din [80].

Teorema 5.2 (vezi Teorema 4.4. din [56]). Fie (X, d) un spațiu metric complet și (Y, ρ) un spațiu metric compact, $g : X \rightarrow X$ și $h : X \times Y \rightarrow Y$ continue astfel încât:

- i) Există $a \in X$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} d(g^{[n]}(x), a) = 0$, pentru orice $K \in P_{cp}(X)$.
- ii) Există $C \in [0, 1)$ cu proprietatea că $\rho(h(x, y_1), h(x, y_2)) \leq C\rho(y_1, y_2)$, pentru orice $x \in X, y_1, y_2 \in Y$.

Atunci $f : X \times Y \rightarrow X \times Y$, dată de $f(x, y) = (g(x), h(x, y))$, pentru orice $(x, y) \in X \times Y$, este un operator Picard.

Mai mult,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x, y) \in K} d_{\max}(f^{[n]}(x, y), (a, b)) = 0,$$

pentru orice $K \in P_{cp}(X \times Y)$, unde (a, b) este unicul punct fix al lui f .

6. Aplicații ale interpolării fractale

Acest capitol este dedicat aplicațiilor interpolării fractale. Prima secțiune se bazează pe articolul „**An analysis of Covid-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension**” publicat în „*Chaos Solitons Fractals*” (vezi [67]), în colaborare cu B. Necula, iar a doua secțiune se bazează pe articolul „**A Concretization of an Approximation Method for Non-Affine Fractal Interpolation Functions**” publicat în „*Mathematics*” (vezi [16]), în colaborare cu A. Băicoianu și M. Păun.

În prima secțiune, analizăm pandemia de Covid-19 dintr-o perspectivă fractală. Curbele epidemiologice sunt reconstruite folosind interpolare fractală, pe baza similarităților dintre aceste curbe și fractali clasici (de exemplu, graficul funcției lui Takagi).

În a doua secțiune, propunem doi algoritmi, folosind o schemă probabilistică și o schemă deterministă, care pot fi folosiți pentru obținerea aproximărilor funcțiilor de interpolare fractală.

6.1 Analiza Covid-19 dintr-o perspectivă fractală

Analiza răspândirii pandemiei Covid-19 dintr-o perspectivă fractală ar putea conduce la o înțelegere mai profundă a subtilităților bolii și a modului în care această epidemie se deosebește de alte epidemii istorice. Privind răspândirea epidemiei ca pe o structură fractală obținem potențiale avantaje pentru domeniul medical, îmbunătățind înțelegerea crizei în domeniul sănătății indusă de Covid-19. De asemenea, în acest fel putem obține un instrument valoros pentru evaluarea evoluției altor epidemii.

În această secțiune, am examinat pandemia de Covid-19 dintr-o perspectivă fractală, folosind interpolarea fractală. În plus, am folosit dimen-

siunea „box-counting”, cunoscută și sub numele de dimensiune Minkowski-Bouligand, pentru a evalua și cuantifica răspândirea pandemiei Covid-19 în mai multe țări europene.

6.1.1 Concluzii

Abordarea curbelor epidemiologice ca fiind structuri fractale are două principale avantaje.

În primul rând, dată fiind iregularitatea datelor și dificultatea de a prezice creșterea zilnică a numărului de cazuri, considerarea datelor ca fractali ar putea deschide o nouă direcție pentru prezicerea evoluției epidemiei. Deoarece graficul cazurilor zilnice este considerat un fractal, pe lângă caracterul său neregulat, acesta posedă o anumită arhitectură fractală predispusă la auto-similaritate. Această similaritate joacă un rol crucial în evaluarea situației la momentul curent și în prezicerea schimbărilor viitoare în curbele epidemiologice.

Pe de altă parte, tratarea curbei epidemiologice ca fractal și aplicarea interpolării fractale pentru datele disponibile pot fi un instrument puternic pentru reconstrucția datelor. În acest sens, trebuie să subliniem că numărul de cazuri înregistrate depinde în mare măsură de numărul de teste efectuate de fiecare țară într-o anumită zi. Analizând datele obținute prin interpolare fractală, putem acoperi unele bucăți de date care lipsesc, pentru a obține o imagine mai bună a epidemiei, îmbunătățind astfel înțelegerea adevăratei extinderi a epidemiei.

6.2 Aproximarea funcțiilor de interpolare fractală utilizând contractii Rakotch

Prezentul capitol propune o implementare a unei metode de aproximare pentru funcțiile de interpolare fractală care implică funcții atât afine, cât și non-afine. În timp ce au existat studii anterioare care abordează aspectele computaționale ale atractorilor sistemelor iterative de funcții (vezi [21], [22], [27] și [53]), din câte știm, nu a existat o cercetare dedicată în mod specific funcțiilor de interpolare fractală non-afine în acest context.

Pentru a construi aproximări ale funcției de interpolare fractală, propunem doi algoritmi, unul probabilistic și unul determinist.

6.2.1 Doi algoritmi pentru obținerea unor aproximări ale funcției de interpolare fractală

Propunem doi algoritmi pentru obținerea funcției de interpolare fractală asociată unui sistem iterativ de funcții cu funcții constitutive atât afine, cât și non-afine. Algoritmul 1 propune o schemă probabilistică, în timp ce Algoritmul 2 prezintă o schemă deterministă. Prezentăm algoritmi mai jos, așa cum apar în secțiunea 4 din [16].

Algorithm 1 The Probabilistic Scheme.

- 1: Consider an empty set of points $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ and p a significant big signed positive integer.
 - 2: Generate an arbitrary point $(x_c, y_c) \in [0, 1] \times [0, 1]$.
 - 3: Determine $\mathcal{P} \cup \{(x_c, y_c)\}$.
 - 4: Generate a random signed integer $0 < k \leq 100$.
 - 5: Compute $(x_c, y_c) = f_k(x_c, y_c)$.
 - 6: Repeat steps 3, 4 and 5 p times.
 - 7: Sort the elements of the set \mathcal{P} in ascending order with respect to the first component of the elements.
 - 8: Plot the function passing through all the points of the set \mathcal{P} .
-

Algorithm 2 The Deterministic Scheme.

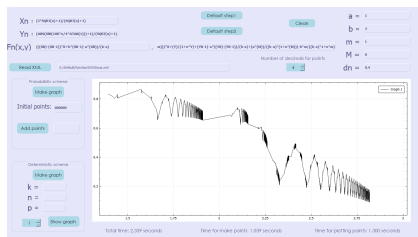
- 1: Consider k the number of initial points, n the number of functions involved, p the number of steps and define an empty set of points $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$.
 - 2: Generate randomly a set K_0 of k points in $[0, 1] \times [0, 1]$.
 - 3: Determine $\mathcal{P} \cup K_0$.
 - 4: Compute $\mathcal{P} = f_1(\mathcal{P}) \cup f_2(\mathcal{P}) \cup \dots \cup f_n(\mathcal{P})$.
 - 5: Repeat step 4 p times.
 - 6: Sort the elements of the set \mathcal{P} in ascending order regarding the first component of the elements.
 - 7: Plot the function passing through all the points of the set \mathcal{P} .
-

6.2.2 Rezultate ale algoritmilor de aproximare

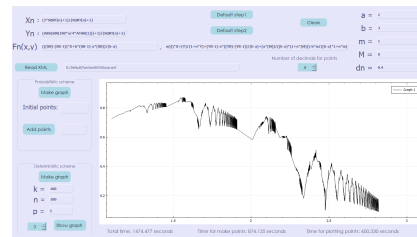
Fie șirul $(x_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$, dat de $x_n = \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, care este pozitiv, crescător și convergent, și $(y_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ dat de $y_n = \frac{|\sin(\frac{180 \cdot n}{\pi})| + 1}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, care este convergent. Fie $m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ și $M = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Considerăm șirul de funcții $f_n : [x_0, m] \times \mathbb{R} \rightarrow [x_0, m] \times \mathbb{R}$, definite ca: $f_n(x, y) = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{m - x_0} x + \frac{m x_{n-1} - x_0 x_n}{m - x_0}, \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{m - x_0} - \frac{1}{m - x_0} \left(\frac{M}{1 + nM} - \frac{y_0}{1 + n y_0} \right) \right) x + \frac{y}{1 + n y} + y_{n-1} - x_0 \frac{y_n - y_{n-1}}{m - x_0} + \frac{x_0}{m - x_0} \frac{M}{1 + nM} - \frac{m}{m - x_0} \frac{y_0}{1 + n y_0} \right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, care sunt non-afine în a doua variabilă.

Folosind limbajul de programare C++, obținem graficul aproximării funcției de interpolare fractală în cazul non-afin utilizând cei doi algoritmi.



(a) Schema probabilistică, cazul non-afin cu 100 000 de puncte



(b) Schemă deterministă, cazul non-afin cu 100 000 000 de puncte

Figura 6.1: Aproximare a funcției de interpolare fractală

După 100 000 de pași, în cazul probabilistic, utilizând Algoritmul 1, obținem rezultatul prezentat în Figura 6.1(a). Timpul de procesare pentru generarea punctelor este de 1.039 secunde, iar timpul pentru obținerea graficului este de 1.3 secunde.

Prin utilizarea Algoritmului 2, cu parametrii specificați $k = 100$, $n = 100$ și $p = 3$, obținem graficul afișat în Figura 6.1(b). Timpul total de procesare în acest caz particular este de 1474.477 secunde.

6.2.3 Concluzii

Cei doi algoritmi considerați, cel probabilistic și cel determinist, furnizează rezultate similare atunci când sunt folosiți pentru a aproxima FIF în cazul afîn, dar și non-afîn. În cazul Algoritmului probabilistic 1, se obțin rezultate semnificative după depășirea a 10 000 de pași, iar timpul necesar pentru generarea graficului este mai mic de 3 secunde.

7. Concluzii

În această teză, am adus contribuții noi la teoria interpolării fractale. Am demonstrat existența FIF asociată unui CIFS compus din contracții Rakotch. În plus, am introdus o nouă schemă de interpolare fractală aplicabilă unui set de date posibil infinit (incluzând mulțimi nenumărabile) și am demonstrat existența unei FIF al cărei grafic este atractorul unui PIIFS. În plus, bazându-ne pe teoria funcțiilor de interpolare fractală, am introdus un nou tip de IFS, denumit sistem iterativ de funcții de tip interpolare. Pentru acest nou I-tIFS am demonstrat că are atractor și admite proiecție canonică. În plus, am prezentat două aplicații ale FIF, una în studiul curbelor epidemiologice (pentru epidemia Covid-19) și a doua axându-se pe metode computaționale pentru obținerea aproximărilor graficului FIF.

În ceea ce privește cercetări viitoare, teza actuală deschide anumite noi direcții de cercetare. O nouă direcție de generalizare și cercetare ar putea fi considerarea IFS-urilor compuse din contracții mai generale. În acest sens, în legătură cu rezultatele din Capitolul 3, ne așteptăm ca CIFS-uri compuse din funcții care sunt contracții mai generale (de exemplu, contracții Matkowski) să poată fi utilizate pentru a obține FIF.

În ceea ce privește aplicațiile FIF, pornind de la rezultatele din secțiunea 1 a Capitolului 6, o direcție de cercetare este legată de îmbunătățirea preciziei algoritmilor de predicție utilizând interpolarea fractală în etapa de preprocesare.

În concluzie, această teză aduce contribuții semnificative la teoria interpolării fractale prin introducerea unor noi cadre și concepte.

Bibliografie

- [1] M. Ali, T. Clarkson, Using linear fractal interpolation functions to compress video images, *Fractals* **2** (1994), 417-421.
- [2] E. Agrawal, S. Verma, Dimensional study of COVID-19 via fractal functions, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **232** (2023), 1061–1070.
- [3] A. Bajahzar, H. Guedri, Reconstruction of fingerprint shape using fractal interpolation, *Int. J. Adv. Comput. Sci. Appl.* **10** (2019), 103-114.
- [4] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications, *Fund. Math.* **3** (1922), 133–181.
- [5] M. Barnsley, Fractal functions and interpolation, *Constr. Approx.* **2** (1986), 303–329.
- [6] M. Barnsley, Fractals everywhere, *Academic Press, Inc., Boston, MA*, 1988.
- [7] M. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, P. Massopust, Hidden variable fractal interpolation functions, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 1218–1242.
- [8] M. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, Recurrent iterated function systems. Fractal approximation, *Constr. Approx.* **5** (1989), 3-31.
- [9] M. Barnsley, A. Harrington, The calculus of fractal interpolation functions, *J. Approx. Theory* **57** (1989), 14-34.
- [10] M. Barnsley, Fractal image compression, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996), 657-662.
- [11] M. Barnsley, P. Massopust, Bilinear fractal interpolation and box dimension, *J. Approx. Theory* **192** (2015), 362-378.
- [12] E. Bell, Exponential polynomials, *Ann. of Math.* **35** (1934), 258-277.

- [13] P. Bouboulis, L. Dalla, Hidden variable vector valued fractal interpolation functions, *Fractals* **13** (2005), 227–232.
- [14] P. Bouboulis, L. Dalla, A general construction of fractal interpolation functions on grids of \mathbb{R}^n , *European J. Appl. Math.* **18** (2007), 449-476.
- [15] P. Bouboulis, L. Dalla, Fractal interpolation surfaces derived from fractal interpolation functions, *J. Math. Anal. Appl.* **336** (2007), 919-936.
- [16] A. Băicoianu, **C. Păcurar**, M. Păun, A concretization of an approximation method for non-affine fractal interpolation functions, *Mathematics* **9** (2021), 767.
- [17] O. Crăciunescu, S. Das, J. Poulson, T. Samulski, Three-dimensional tumor perfusion reconstruction using fractal interpolation functions, *IEE Trans. Biomed. Eng.* **48** (2001), 462-473.
- [18] A. Chand, G. Kapoor, Hidden variable bivariate fractal interpolation surfaces, *Fractals* **11** (2003), 277–288.
- [19] A. Chand, G. Kappor, Stability of affine coalescence hidden variable fractal interpolation functions, *Nonlinear Anal.* **68** (2008), 3757-3770.
- [20] C. Chen, S. Cheng, Y. Huang, The reconstruction of satellite images based on fractal interpolation, *Fractals* **19** (2011), 347-354.
- [21] I. Chițescu, R. Miculescu, Approximation of fractals generated by Fredholm integral equations, *J. Comput. Anal. Appl.* **11** (2009), 286–293.
- [22] I. Chițescu, H. Georgescu, R. Miculescu, Approximation of infinite dimensional fractals generated by integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* **234** (2010), 1417–1425.
- [23] I. Chițescu, Around the formula of Faà di Bruno, *Editions Universitaires Europeennes*, 2017.
- [24] L. Dalla, Bivariate fractal interpolation functions on grids, *Fractals* **10** (2002), 53–58.
- [25] V. Drakopoulos, P. Bouboulis, S. Theodoridis, Image compression using affine fractal interpolation on rectangular lattices, *Fractals* **14** (2006), 259-269.
- [26] J. Dureau, K. Kalogeropoulos, M. Baguelin, Capturing the time-varying drivers of an epidemic using stochastic dynamical systems, *Biostatistics* **14** (2013), 541-55.

- [27] S. Dubuc, A. Elqortobi, Approximations of fractal sets, *J. Comput. Appl. Math.* **29** (1990), 79–89.
- [28] F. Faà di Bruno, Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel, *Quarterly J. Pure App. Math.* **1** (1857), 359–360.
- [29] H. Fernau, Infinite iterated function systems, *Math. Nachr.* **170** (1994), 79–91.
- [30] J. Geronimo, D. Hardin, Fractal interpolation surfaces and a related 2-D multiresolution analysis, *J. Math. Anal. Appl.* **176** (1993), 561–586.
- [31] A. Gowrisankar, R. Uthayakumar, Fractional calculus on fractal interpolation for a sequence of data with countable iterated function system, *Mediterr. J. Math.* **13** (2016), 3887–3906.
- [32] M. Hohenwarter, M. Borchers et al., *GeoGebra* 5.0.507.0 (2018), URL: <http://www.geogebra.org>.
- [33] J. Hutchinson, Fractals and self similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), 713–747.
- [34] J. Jachymski, I. Jóźwik, Nonlinear contractive conditions: A comparison and related problems, *Banach Center Publ.* **77** (2007), 123–146.
- [35] J. Jachymski, Equivalence of some contractivity properties over metrical structures, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 2327–2335.
- [36] J. Jachymski, Around Browder’s fixed point theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.* **5** (2009), 47–61.
- [37] B. Kieninger, Iterated function systems on compact Hausdorff spaces, Ph. D. diss., University of Augsburg, Shaker-Verlag, Aachen, 2002.
- [38] J. Kim, H. Kim, H. Mun, Nonlinear fractal interpolation curves with function vertical scaling factors, *Indian J. Pure Appl. Math.* **51** (2020), 483–499.
- [39] M. Leon-Ogazon, E. Romero-Flores, T. Morales-Acoltzi, A. Machorro, M. Salazar-Medina, Fractal interpolation in the financial analysis of a company, *Int. J. Bus. Adm.* **8** (2017), 80–86.
- [40] K. Lésniak, N. Snigireva, F. Strobil, Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual, *J. Difference Equ. Appl.* **26** (2020), 1114–1173.

- [41] X. Li, X. Li, Seismic data reconstruction with fractal interpolation, *Chinese J. Geophys.* **51** (2008), 855-861.
- [42] J. Lu, J. Wu, H. Yao, J. Qian, Z. Wang, J. Wang, Predicting river dissolved oxygen in complex watershed by using sectioned variable dimension fractal method and fractal interpolation, *Environ. Earth Sci.* **66** (2012), 2129-2135.
- [43] R. Mauldin, M. Urbański, Dimensions and measures in infinite iterated functions systems, *Proc. London Math. Soc.* **73** (1996), 105–154.
- [44] P. Massopust, Fractal surfaces, *J. Math. Anal. Appl.* **151** (1990), 275-290.
- [45] P. Massopust, Vector-valued fractal interpolation functions and their box dimension, *Aequationes Math.* **42** (1991), 1-22.
- [46] P. Massopust, *Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.
- [47] P. Massopust, *Interpolation and approximation with splines and fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [48] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, *Dissertationes Math.* **127** (1975), 68.
- [49] E. Mathieu, H. Ritchie, L. Rodés-Guirao, C. Appel, C. Giattino, J. Hassell, B. Macdonald, S. Dattani, D. Beltekian, E. Ortiz-Ospina, M. Roser (2020) Coronavirus Pandemic (COVID-19). Published online at OurWorldInData.org. Retrieved from: 'https://ourworldindata.org/coronavirus'
- [50] R. Miculescu, A. Mihail, Lipscomb's space ω^A is the attractor of an infinite IFS containing affine transformations of $l^2(A)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 587–592.
- [51] R. Miculescu, A. Mihail, The shift space for an infinite iterated function system, *Math. Rep. (Bucur.)* **11** (2009), 21–32.
- [52] R. Miculescu, A. Mihail, A generalization of Istrăţescu's fixed point theorem for convex contractions, *Fixed Point Theory* **18** (2017), 689-702.
- [53] R. Miculescu, A. Mihail, S. Urziceanu, A new algorithm that generates the image of the attractor of a generalized iterated function system, *Numer. Algorithms* **83** (2020), 1399–1413.

- [54] R. Miculescu, A. Mihail, Diameter diminishing to zero IFSs, *Monats. Math.* **196** (2021), 861-876.
- [55] R. Miculescu, A. Mihail, **C. Păcurar**, A fractal interpolation scheme for a possible sizeable set of data, *J. Fractal Geom.* **9** (2022), 337–355.
- [56] R. Miculescu, A. Mihail, **C. Păcurar**, Interpolation type iterated function systems, *J. Math. Anal. Appl.* **519** (2023), 126747.
- [57] A. Mihail, R. Miculescu, The shift space for an infinite iterated function system, *Math. Rep. Bucur.* **11** (2009), 21-32.
- [58] M. Navascués, M. Sebastián, Generalization of Hermite functions by fractal interpolation, *J. Approx. Theory* **131** (2004), 19-29.
- [59] M. Navascués, M. Sebastián, Fitting curves by fractal interpolation: An application to the quantification of cognitive brain processes, *Thinking in patterns*, 143–154, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [60] M. Navascués, M. Sebastián, Spectral and affine fractal methods in signal processing, *Int. Math. Forum* **1** (2006), 1405-1422.
- [61] M. Navascués, M. Sebastián, Construction of affine fractal functions close to classical interpolants, *J. Comput. Anal. Appl.* **9** (2007), 271-283.
- [62] M. Navascués, Reconstruction of sampled signals with fractal functions, *Acta Appl. Math.* **110** (2010), 1199-1210.
- [63] M. Navascués, A. Chand, V. Veedu, M. Sebastián, Fractal interpolation functions: A short survey, *Appl. Math.* **5** (2014), 1834-1841.
- [64] M. Navascués, Affine fractal functions as bases of continuous functions, *Quaest. Math.* **37** (2014), 415-428.
- [65] M. Navascués, P. Viswanathan, A. Chand, M. Sebastián, S. Katiyar, Fractal bases for Banach spaces of smooth functions, *Bull. Aust. Math. Soc.* **92** (2015), 405-419.
- [66] M. Navascués, **C. Păcurar**, V. Drakopoulos, Scale-free fractal interpolation, *Fractal Fract.* **6** (2022), 602.
- [67] **C. Păcurar**, B. Necula, An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension, *Chaos Solitons Fractals* **139** (2020), 110073.

- [68] C. Păcurar, A countable fractal interpolation scheme involving Rakotch contractions, *Results Math.* **76** (2021), 161.
- [69] G. Pandey, U. Ghanekar, A hybrid single image super-resolution technique using fractal interpolation and convolutional neural network, *Pattern Recognit. Image Anal.* **31** (2021), 18–23.
- [70] K. Pandey, P. Viswanathan, Countable zipper fractal interpolation and some elementary aspects of the associated nonlinear zipper fractal operator, *Aequationes Math.* **95** (2021), 175–200.
- [71] G. Preda, URL: https://github.com/gabrielpreda/covid_19_ro.git. Accessed on 1 June 2020.
- [72] E. Rakotch, A note on contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 459–465.
- [73] S. Raubitzek, T. Neubauer, A fractal interpolation approach to improve neural network predictions for difficult time series data, *Expert Syst. Appl.* **169** (2021), 114474.
- [74] B. Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **226** (1977), 257–290.
- [75] S. Ri, A new idea to construct the fractal interpolation function, *Indag. Math.* **29** (2018), 962–971.
- [76] S. Ri, A new nonlinear bivariate fractal interpolation function, *Fractals* **26** (2018), 1850054.
- [77] S. Ri, V. Drakopoulos, How are fractal interpolation functions related to several contractions? *Mathematical Theorems - Boundary Value Problems and Approximations*, Lyudmila Alexeyeva, IntechOpen, 2020.
- [78] N. Rougier, URL: <https://gist.github.com/rougier/e5eafc276a4e54f516ed5559df4242c0>. Accessed on 1 June 2020.
- [79] H. Ruan, Q. Xu, Fractal interpolation surfaces on rectangular grids, *Bull. Aust. Math. Soc.* **91** (2015), 435–446.
- [80] I. Rus, Fiber Picard operators theorem and applications, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* **44** (1999), 89–97.
- [81] N. Secelean, Countable iterated function systems, *Far East J. Dym. Syst.* **3** (2001), 149–167.

- [82] N. Secelean, The fractal interpolation for countable systems of data, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **14** (2003), 11–19.
- [83] N. Secelean, The fractal interpolation in the case of countable system of data, *Proceedings of the VI Annual Conference of the Romanian Society of Mathematical Sciences, Vol. I (Romanian) (Sibiu, 2002)*, 184–192, Soc. Științe Mat. România, Bucharest, 2003.
- [84] N. Secelean, Fractal countable interpolation scheme: existence and affine invariance, *Math. Rep. (Bucur.)* **13** (2011), 75–87.
- [85] N. Secelean, Continuous dependence on a parameter of the countable fractal interpolation functions, *Carpathian J. Math.* **27** (2011), 131–141.
- [86] N. Secelean, The existence of the attractor of countable iterated function systems, *Mediterr. J. Math.* **9** (2012), 61–79.
- [87] N. Secelean, Countable iterated function systems, LAP Lambert Academic Publishing, 2013.
- [88] N. Secelean, Generalized iterated function systems on the space $l^\infty(X)$, *J. Math. Anal. Appl.* **410** (2014), 847–858.
- [89] T. Takagi, A simple example of the continuous function without derivative, *Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn.* **1** (1901), 176–177.
- [90] D. Tall, The Blancmange function: Continuous everywhere but differentiable nowhere, *Math. Gaz.* **66** (1982), 11–22.
- [91] R. Uthayakumar, M. Rajkumar, Hidden variable bivariate fractal interpolation surfaces with function vertical scaling factor, *Int. J. Pure Appl. Math.* **106** (2016), 21–32.
- [92] S. Verma, P. Viswanathan, A fractal operator associated with bivariate fractal interpolation functions on rectangular grids, *Results Math.* **75** (2020), 28.
- [93] P. Viswanathan, Fractal approximation of a function from a countable sample set and associated fractal operator, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* **114** (2020), 32.
- [94] P. Viswanathan, A. Chand, On cubic Hermite coalescence hidden variable fractal interpolation functions, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B* **30** (2015), 55–76.

- [95] H. Wang, J. Yu, Fractal interpolation functions with variable parameters and their analytic properties, *J. Approx. Theory* **175** (2013), 1-18.
- [96] H. Wang, H. Li, J. Shen, A novel hybrid fractal interpolation SVM model for forecasting stock price indexes, *Fractals* **27** (2019), 1950055.
- [97] H. Xie, H. Sun, The study of bivariate fractal interpolation functions and creation of fractal interpolation surfaces, *Fractals* **5** (1997), 625-634.
- [98] H. Xie, H. Sun, Y. Ju, Z. Feng, Study on generation of rock fracture surfaces by using fractal interpolation, *Int. J. Solid Struct.* **38** (2001), 5765-5787.
- [99] C. Xiu, T. Wang, M. Tian, Y. Li, Y. Cheng, Short term prediction method of wind speed based on fractal interpolation, *Chaos, Solitons Fractals* **68** (2014), 89-97.
- [100] R. Ye, H. Lan, Q. Wu, A fractal interpolation based image encryption scheme, *2018 IEEE International Conference on Computer and Communication Engineering Technology (CCET)*, Beijing, China, 2018, 291-295.
- [101] M. Zhai, J. Fernández-Martínez, J. Rector, A new fractal interpolation algorithm and its applications to self-affine signal reconstruction, *Fractals* **19** (2011), 355-365.
- [102] N. Zhao, Construction and application of fractal interpolation surfaces, *Vis. Comput.* **12** (1996), 132-146.
- [103] Y. Zhou, J. Wang, H. Lu, W. Zhao, Short-term wind power prediction optimized by multi-objective dragonfly algorithm based on variational mode decomposition, *Chaos Solitons Fractals* **157** (2022), 111982.
- [104] URL: <https://www.nytimes.com/interactive/2020/world/coronavirus-maps.html>. Accessed on 1 June 2020.
- [105] URL: <https://covid19.geo-spatial.org/statistici/relationare-cazuri>. Accessed on 15 May 2020.