Universitatea
Transilvania
din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea de Matematică și Informatică

Alexandra Diana MELEȘTEU

TEZĂ DE DOCTORAT

Metode de aproximare folosind operatori liniari și pozitivi
Approximation methods using linear and positive operators

REZUMAT

Conducător ştiințific

Prof.dr. Radu PĂLTĂNEA

BRAȘOV, 2024

Universitatea
Transilvania
din Brașov

Alexandra Diana MELEȘTEU

TEZĂ DE DOCTORAT

TITLU (română): Metode de aproximare folosind operatori liniari și pozitivi

TITLU (engleză): Approximation methods using linear and positive operators

Domeniul de doctorat: Matematică

Comisia de susținere:

Conf. dr. Ion-Gabriel Stan	**Preşedinte, Universitatea "Transilvania" din Brașov**
Prof.dr. Radu Păltănea	**Conducător ştiințific, Universitatea "Transilvania" din Brașov**
Prof.dr. Octavian Agratini	**Referent oficial, Institutul de Calcul Tiberiu Popoviciu, Academia Română, Cluj Napoca**
Prof.dr. Ana-Maria Acu	**Referent oficial, Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu**
Conf. dr. Nicușor Minculete	**Referent oficial, Universitatea "Transilvania" din Brașov**

Cuprins

		Pag. Teză	Pag. Rez.
	Tema abordată	5	3
	Lista de notaţii, simboluri şi abrevieri	6	4
1.	**Introducere**	11	5
	1.1 Teoreme generale de aproximare a funcțiilor prin operatori liniari și pozitivi	11	5
	1.2 Moduli de continuitate și K-funcționale	14	8
	1.3. Operatorii Bernstein	16	10
	1.4. Operatorii Stancu	18	12
	1.5. Operatorii Kantorovich	20	14
	1.6. Operatorii Durrmeyer	21	15
	1.7. Operatorii Beta	22	16
	1.8. Operatorii Balázs	22	16
2.	**Construcția unor noi tipuri de operatori de aproximare**	23	17
	2.1 Operatori construiți cu sume booleene	23	17
	2.2 Operatori de tip Bernstein generalizați obținuți prin trunchierea domeniului	28	19
	2.3. Operatorii de tip Balázs-Stancu	38	22
3.	**Proprietăți de $\mathbb{B}-$concavitate și $\mathbb{BB}-$concavitate în legătură cu operatorii Bernstein**	51	25
	3.1 $\mathbb{B}-$concavitate și $\mathbb{BB}-$concavitate	52	26
	3.2 $\mathbb{BB}-$concavitatea operatorilor Bernstein în simplexul	56	28
	s-dimensional	56	28
4.	**Proprietăți ale unei clase de operatori Stancu modificați construiți cu distribuția Pólya**	63	31
	4.1 Rezultate preliminare referitoare la operatorii construiți cu distribuția Pólya	64	32
	4.2 Estimarea erorii de aproximare a operatorilor Pólya- Stancu	71	34
5.	**Metode de sumare aplicate operatorilor**	73	35
	5.1 Generalități privitoare la metodele de sumare	74	36
	5.2 Sumele parțiale Fourier-Jacobi modificate	78	40
	5.3. Comparația noii metode de sumare cu metodele Cesàro	82	43
	Bibliografie	97	47

Tema abordată

Lucrarea de față este dedicată metodelor de aproximare folosind operatori liniari și pozitivi. Aceștia din urmă sunt esențiali în cadrul teoriei aproximării funcțiilor și realizează nu numai o aproximare oricât de bună a funcțiilor, dar au și capacitatea de a păstra anumite proprietăți speciale ale funcțiilor.

Un rezultat fundamental în teoria aproximării funcțiilor continue îl constituie posibilitatea aproximării oricât de bune în norma uniformă a unei funcții continue pe un interval închis și mărginit cu polinoame algebrice. Acest fapt a fost demonstrat de matematicianul german Karl Weierstrass la sfârșitul secolului al XIX-lea. De asemenea, această teoremă poate fi demonstrată utilizând șiruri de operatori polinomiali, construiți cu operatori liniari și pozitivi, cum ar fi șirul polinoamelor lui Bernstein.

Teoria aproximării prin operatori liniari și pozitivi s-a dezvoltat, în mod deosebit, după descoperirea, în mod independent, a matematicienilor Popoviciu, Bohman și Korovkin a condițiilor de aproximare uniformă a unei funcții continue, folosind astfel de operatori.

O contribuție importantă în acest domeniu l-au avut în ultimii zeci de ani și matematicieni români.

Pentru evaluarea ordinului de aproximare a funcțiilor, instrumente de bază sunt modulii de continuitate și K-funcționalele.

Teoria aproximării prin operatori liniari și pozitivi face apel la aplicarea unor metode generale de analiză clasică, de analiză funcțională, de teoria probabilităților, etc.

Lucrarea prezentată conține mai multe capitole care abordează diferite aspecte ale teoriei aproximării. Aceasta reflectă varietatea de probleme și metode care apar în teoria aproximării. Fundamentul comun ale acestor cercetări îl reprezintă operatorii liniari și pozitivi.

Pentru realizarea acestei lucrări, am beneficiat de ajutorul primit din partea conducătorului de doctorat: prof. univ. dr. Radu Păltănea, cu care am publicat și o lucrare în comun și membrilor din comisia de îndrumare: prof. univ. dr. Marin Marin, prof. univ. dr. Dorina Răducanu, conf. univ. dr. Marius Birou, prof. univ. dr. Mihai N. Pascu, lect. univ. dr. Maria Talpău Dimitriu, cu ultimii doi menționați având articole în colaborare. Le mulțumesc în mod deosebit pe această cale.

Lista de notații, simboluri și abrevieri

Vom introduce notațiile necesare înțelegerii de deplin a lucrării de față.

i) $F(X)$ este spațiul tuturor funcțiilor reale definite pe mulțimea X;
$C(X)$ este spațiul tuturor funcțiilor reale continue pe mulțimea X;
$B(X)$ este spațiul tuturor funcțiilor reale mărginite pe mulțimea X;
$C_B(X) := C(X) \cap B(X)$;
$W^2_\infty([a,b])$ este spațiul tuturor funcțiilor f pe intervalul $[a,b]$ pentru care f' este absolut continuă și $|f''| \leq M$ pentru un anumit M;
$UC_B(X)$ este spațiul tuturor funcțiilor reale mărginite și uniform continue pe mulțimea X;

ii) $L_p(I)$ este spațiul claselor de funcții definite pe I cu puterea p a modulului integrabilă, $p > 0$;

iii) $L(f)$ sau Lf este funcția obținută prin aplicarea operatorul L asupra funcției f, iar $L(f)(x)$ este valoarea lui $L(f)$ calculată în punctul x. Vom mai nota ocazional $(Lf)(x)$ și $L(f,x)$ în loc de $L(f)(x)$;

iv) $e_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, 2, ...$ sunt funcțiile monomiale;

v) $\Psi(x) = x(1-x)$ este o funcție definită pe intervalul $[0,1]$;

vi) $B(x,y)$ este funcția Beta cu două variabile $x > 0$ și $y > 0$ definită astfel: $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ și $\Gamma(x)$ este funcția Gamma definită astfel: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$;

vii) Folosim notațiile standard:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}^s_+ = \{\overline{x} = (x_1, ..., x_s) | x_i \geq 0\},$$

$$\overline{x} = (x_1, ..., x_s) \in \mathbb{R}^s_+, \ s \in \mathbb{N}, \quad |\overline{x}| = x_1 + ... + x_s,$$

$$\overline{k} = (k_1, ..., k_s) \in \mathbb{N}^s_0, \quad |\overline{k}| = k_1 + ... + k_s, \quad \overline{k}! = (k_1!, ..., k_s!),$$

$$\overline{x}^{\overline{k}} = (x_1^{k_1}, ..., x_s^{k_s}), \quad \binom{n}{\overline{k}} = \frac{n!}{\overline{k}! \cdot (n - |\overline{k}|)!}, \ n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\overline{k}}{n} = \left(\frac{k_1}{n}, ... \frac{k_s}{n}\right),$$

$$\Delta = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^s_+ | \ |\overline{x}| \leq 1\}, \quad \Lambda_n = \{\overline{k} \in \mathbb{N}^s_0 | \ |\overline{k}| \leq n\}. \tag{1}$$

Capitolul 1

Introducere

În acest capitol vom evidenția fundamentele teoretice care stau la baza domeniului studiat.

1.1 Teoreme generale de aproximare a funcțiilor prin operatori liniari și pozitivi

Teorema formulată de matematicianul român Tiberiu Popoviciu ([56]) este prima teoremă generală care dă condiții suficiente, exprimate cu ajutorul momentului de ordin doi, pentru ca anumite șiruri de operatori liniari și pozitivi să aproximeze uniform funcțiile continue.

Teorema lui Bochmann ([14]) arată că pentru ca un șir de operatori dintr-o anumită clasă de operatori liniari și pozitivi să aibă proprietăți de aproximare, este suficient ca șirul să reușească să aproximeze trei funcții, numite funcții test, formate din primele funcții monomiale.

Teorema lui Korovkin ([34]) extinde teorema lui Bochmann prin faptul că șirul de operatori liniari și pozitivi este general, iar cele trei funcții test pot fi orice trei funcții care formează un sistem Cebâșev [7].

În ceea ce urmeză, vom prezenta cele trei teoreme amintite anterior.

Teorema 1.1.1. *(Popoviciu, [56])*

Fie $L_n : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ *un şir de operatori de forma:*

$$L_n(f)(x) = \sum_{i=1}^{m_n} f(x_{n,i})\rho_{n,i}(x),$$

cu $x_{n,i} \in [a,b], \rho_{n,i}(x) \geq 0, x \in [a,b], m_n \in \mathbb{N}$.

Dacă:

i) $L_n(e_0)(x) = 1, x \in [a,b]$;

ii) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} L_n((e_1 - x)^2)(x) = 0$ *uniform în raport cu x, atunci*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f)(x) = f(x)$$

uniform pe $[a,b], \forall f \in [a,b]$.

Teorema 1.1.2. *(Bochmann, [14])*

Fie $L_n : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ *un şir de operatori de forma:*

$$L_n(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})\rho_{n,i}(x),$$

cu $f \in C([a,b]), x_{n,i} \in [a,b], \rho_{n,i}(x) \geq 0$.

Dacă:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(e_j)(x) = e_j(x),\ j = 0,1,2$$

uniform în raport cu $x \in [a,b]$, *atunci:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f)(x) = f(x)$$

uniform pentru $x \in [a,b], \forall f \in [a,b]$.

Definiţia 1.1.1. *Un operator* $L : C([a,b]) \longrightarrow F([a,b])$ *se numeşte liniar şi pozitiv dacă verifică condiţiile:*

i) liniaritate: $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), f, g \in C([a,b]), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

ii) pozitivitate: $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$.

Teorema 1.1.3. *(Korovkin, [34])*

Fie $L_n : V \subset C([a,b]) \longrightarrow F([a,b])$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi, unde* V *este un subspaţiu a lui* $F([a,b])$ *care conţine funcţiile* $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \in C([a,b])$ *care formează un sistem Cebâşev.*

Dacă:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(\rho_j)(x) = \rho_j(x),\ j = 0,1,2$$

uniform în raport cu $x \in [a,b], j = 0,1,2,...$ *atunci:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f)(x) = f(x)$$

uniform pentru $x \in [a,b], \forall f \in [a,b]$.

Varianta periodică a acestei teoreme este următoarea.

Teorema 1.1.4. *(Korovkin, [34])*

Fie spaţiul

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \ \ \textit{este}\ 2\pi - \textit{periodică}\}.$$

Fie $(L_n)_{n \geq 1}$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi din* $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ *la* $F(\mathbb{R})$ *astfel încât:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(g) = g$$

uniform pe $\mathbb{R}$ *pentru orice* $g \in \{1, cos, sin\}$.

Atunci:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f) = f$$

uniform pe $\mathbb{R}$ *pentru orice* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Este important de subliniat că Teorema lui Korovkin nu se poate aplica în cazul funcțiilor continue definite pe un interval care nu este compact. Există rezultate care extind teorema lui Korovkin impunând condiții suplimentare. Menționăm următoarele rezultate.

Teorema 1.1.5. *(Altomare, [7])*

Fie (X, d) *un spaţiu metric şi un subspaţiu latice* E *din* $F(X)$ *care conţine toate funcţiile constante şi toate funcţiile* d_x^2, *unde notăm cu* $d_x(y) =: d(x, y)$. *Fie* $(L_n)_{n \geq 1}$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi din* E *în* $F(X)$ *şi* Y, *o submulţime a lui* X *astfel încât:*

i) $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(1) = 1$ *uniform pe* Y;

ii) $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(d_x^2) = 0$ *uniform cu* $x \in Y$.

Atunci $\forall f \in E \bigcap UC_B(X)$ *are loc* $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f) = f$ *uniform pe* Y.

Teorema 1.1.6. *(Altomare, [7])*

Fie (X, d) *un spaţiu metric local compact şi un subspaţiu latice* E *din* $F(X)$ *care conţine toate funcţiile constante* 1 *şi toate funcţiile* d_x^2. *Fie* $(L_n)_{n \geq 1}$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi din* E *în* $F(X)$ *astfel încât:*

i) $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(1) = 1$ *uniform pe* X;

ii) $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(d_x^2) = 0$ *uniform pe submulţimile compacte ale lui* X.

Atunci $\forall f \in E \bigcap UC_B(X)$ *are loc* $\lim_{n \longrightarrow \infty} L_n(f) = f$ *uniform pe submulţimile compacte ale lui* X.

Forma generală a unei teoreme de tip Voronovskaja pentru un șir de operatori liniari și pozitivi $(L_n)_n$, este următoarea.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n (L_n(f)(x) - f(x)) = E(x, f'(x), f''(x), ...). \tag{1.1}$$

1.2 Moduli de continuitate și K-funcționale

Estimarea cu ajutorul modulilor de continuitate este o tehnică des folosită în teoria aproximării funcțiilor. Modulul de continuitate este o măsură a variației valorilor funcției pe un interval sau, în alte cuvinte, al uniform continuității unei funcții pe un interval.

K-funcționalele reprezintă un instrument important în teoria aproximării funcțiilor și sunt echivalente cu modulii de continuitate. Acestea dau informații asupra funcțiilor folosind aproximarea lor cu alte funcții mai netede.

Definiția 1.2.1. *Fie $f \in B([a,b])$ şi $h > 0$.*

Definim modulul de continuitate de ordinul 1:

$$\omega(f,h) = sup\{\mid f(x) - f(y) \mid, x, y \in [a,b], \mid x - y \mid \leq h\}. \tag{1.2}$$

Propoziţia 1.2.1. *(DeVore, Lorenz,[23])*

Proprietăţile modulului ω sunt următoarele:

i) $\omega(f+g,h) \leq \omega(f,h) + \omega(g,h), \quad f, g \in B([a,b]), h > 0;$

ii) $\omega(f,h_1+h_2) \leq \omega(f,h_1) + \omega(f,h_2), \quad f \in B([a,b]), h_1, h_2 > 0;$

iii) $f \in C([a,b]) \Rightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \omega(f,h) = 0, \quad h > 0;$

iv) $\omega(f,\lambda) \leq (1 + \dfrac{\lambda}{\delta})\omega(f,\delta), \quad f \in B([a,b]), h > 0, \lambda > 0, \delta > 0;$

v) $\omega(f,h_1) \leq \omega(f,h_2), \quad f \in B([a,b]), 0 \leq h_1 \leq h_2.$

Definiția 1.2.2. *Fie $f \in B([a,b])$ şi $h > 0$.*

Definim modulul de continuitate de ordinul k:

$$\omega_k(f,h) = sup\{\mid \Delta_\rho^k f(x) \mid x, x + k\rho \in [a,b], 0 < \rho \leq h\}, \tag{1.3}$$

unde

$$\Delta_\rho^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + k\rho). \tag{1.4}$$

Propoziţia 1.2.2. *Proprietăţile modulului ω_k sunt următoarele:*

i) $\omega_k(f+g,h) \leq \omega_k(f,h) + \omega_k(g,h), \quad f, g \in B([a,b]), h > 0;$

ii) $f \in C([a,b]) \Rightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \omega_k(f,h) = 0, \quad h > 0;$

iii) $\omega_k(f,\lambda) \leq \Big[1 + \Big(\dfrac{\lambda}{\delta}\Big)^k\Big]\omega_k(f,\delta), \quad f \in B([a,b]), h > 0, \lambda > 0, \delta > 0;$

iv) $\omega_k(f,h_1) \leq \omega_k(f,h_2), \quad f \in B([a,b]), 0 \leq h_1 \leq h_2.$

Teorema 1.2.1. *(Shisha şi Mond,[60])*

Fie $L_n : C([a,b]) \longrightarrow F([a,b])$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi.*

Avem:

$$\begin{aligned} & \mid L_n(f)(x) - f(x) \mid \leq \mid f(x) \mid\mid L_n(e_0)(x) - 1 \mid + (L_n(e_0)(x) \\ + \quad & \frac{1}{h}\sqrt{L_n((e_1-x)^2)(x)L_n(e_0)(x)})\omega_1(f,h), \end{aligned}$$

unde $f \in C([a,b]), x \in [a,b],\ h > 0.$

Observaţia 1.2.1. Dacă luăm: $h = \sqrt{L_n((e_1-x)^2)(x)L_n(e_0)(x)}$, rezultă:

$$\mid L_n(f)(x) - f(x) \mid \leq \mid f(x) \mid\mid L_n(e_0)(x) - 1 \mid + (1 + L_n(e_0)(x))\omega_1(f, \mu_n(x)),$$

unde:

$$\mu_n(x) = \sqrt{L_n((e_1-x)^2)(x)L_n(e_0)(x)}.$$

Observaţia 1.2.2. Dacă în teorema precedentă alegem $h = \mu_n$, unde μ_n este norma funcţiei $\mu_n(x)$, obţinem:

$$\parallel L_n(f) - f \parallel \leq \parallel f \parallel\parallel L_n(e_0) - e_0 \parallel + (1 + \parallel L_n(e_0) \parallel)\omega_1(f, \mu_n).$$

Din această formulă rezultă că şirul de operatori L_n verifică condiţiile din teorema lui Korovkin, atunci $L_n f$ converge uniform la f; aceasta deoarece în acest caz, $\mu_n \longrightarrow 0$.

Teorema 1.2.2. *(Păltănea, [53])*

Dacă $L : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ *este un operator liniar şi pozitiv, cu proprietatea că* $L(e_j) = e_j, j = 0, 1,$ *atunci:*

$$\parallel L(f) - f \parallel \leq \frac{3}{2}\omega_2(f, \mu),$$

unde $\mu = \sup\limits_{x\in[a,b]} \sqrt{L((e_i - x)^2, x)}.$

Definiția 1.2.3. *Fie* $(X, \parallel \cdot \parallel_X)$ *un spaţiu normat. Fie* $Y \subset X$ *subspaţiu, înzestrat cu seminorma* $\mid \cdot \mid_Y$ *. Se defineşte:*

$$K(X, Y, x, t) = inf\{\parallel x - y \parallel + t \mid y \mid_Y,\ y \in Y\},\ x \in X,\ t > 0.$$

Definiția 1.2.4. *În cazul particular,* $X = C([a,b]), Y = C^k([a,b]), k \in \mathbb{N}, k \geq 1,$ *avem:*

$$K_k(f, t^k) = K(C([a,b]), C^k([a,b]), f, t^k) = inf\{\parallel f - g \parallel + t^k \parallel g^{(k)} \parallel, g \in C^k([a,b])\}.$$

Teorema 1.2.3. *(Johnen,[32])*

Pentru orice interval $[a,b]$ *şi orice* $k \in \mathbb{N}$ *există două constante* C_1^k, C_2^k *care depind numai de* k *şi de intervalul* $[a,b]$ *astfel încât:*

$$C_1^k\omega_k(f,t) \leq K_k(f, t^k) \leq C_2^k\omega_k(f,t), \forall f \in C([a,b]), \forall t > 0.$$

Prezentăm tipurile de operatori clasici pe care îi vom utiliza în lucrare.

1.3 Operatorii Bernstein

Operatorii Bernstein reprezintă o clasă de operatori care a captivat atenția matematicienilor prin abilitatea lor de a aproxima funcții într-un mod elegant și eficient. Numele lor poartă numele matematicianului rus Serghei Natanovich Bernstein, care a jucat un rol crucial în dezvoltarea teoriei aproximării și în formularea rezultatelor semnificative asociate acestor operatori.

În afară de faptul că operatorii Bernstein reușesc să aproximeze funcțiile continue, au o serie de alte proprietăți remarcabile, cum ar fi: aproximarea simultană și păstrarea anumitor clase de funcții. În plus, ei sunt ușor de calculat, ceea ce-i face deosebit de utili în practică.

Acești operatori au constituit punctul de plecare pentru construcția multor altor șiruri de operatori de aproximare. Există o foarte bogată literatură legată de operatorii lui Bernstein din care menționăm doar monografia [37] sau recenta monografie [17].

În esență, operatorii Bernstein se construiesc folosind polinoamele fundamentale, notate $b_{n,k}$, cu $0 \leq k \leq n$, definite mai jos, care formează o bază algebrică a polinoamelor de grad n, numită baza Bernstein.

Fie $n \in \mathbb{N}$. Introducem operatorii Bernstein: $B_n : C([0,1]) \to C([0,1])$,

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) f(\frac{k}{n}),$$

unde

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, k = \overline{0,n}, x \in [0,1].$$

Teorema 1.3.1. *(Bustamante, [17])*

Operatorii Bernstein au următoarele proprietăți:

i) *sunt liniari și pozitivi;*

ii) *Pentru orice $n \geq 1$, avem:*

$$B_n(f)(0) = f(0), B_n(f)(1) = f(1);$$

iii) $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1;$

iv) $B_n(e_0)(x) = 1;$
$B_n(e_1)(x) = x;$
$(B_n(e_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n};$

v) $||B_n|| = 1$;

vi) *(1) Dacă* f *este convexă pe* $[0,1]$ *atunci*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0,1), B_n(f)(x) \geq B_{n+1}(f)(x),$$

iar dacă f *este concavă pe* $[0,1]$ *atunci are loc inegalitatea inversă;*

(2)Dacă f *este convexă pe* $[0,1]$ *atunci*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in (0,1), B_n(f)(x) \geq f(x),$$

iar dacă f *este concavă pe* $[0,1]$ *atunci are loc inegalitatea inversă;*

vii) *Există o constantă* $C > 0$ *pentru care:*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq C\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}), \forall x \in [0,1];$$

viii) *Există o constantă* $C > 0$ *pentru care:*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq C\frac{1}{\sqrt{n}}\omega(f', \frac{1}{\sqrt{n}}), \forall f \in C^1([0,1]), \forall x \in [0,1].$$

Observaţia 1.3.1. Putem calcula integrala funcției din $b_{n,\nu}(x)$ pe intervalul $[0,1]$ cu ajutorul funcției Beta:

$$\begin{aligned} \int_0^1 b_{n,\nu}(x)dx &= \binom{n}{\nu}\int_0^1 x^\nu(1-x)^{n-\nu}dx \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

In continuare prezentăm câteva rezultate de bază privitoare la operatorii lui Bernstein.

Teorema 1.3.2. *(Lorenz, [38])*

Pentru o funcție $f(x)$ *mărginită pe [0,1], relația:*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = f(x)$$

are loc în fiecare punct de continuitate x *al funcției* f*. De asemenea, relația are loc pe intervalul* $[0,1]$ *dacă* $f(x)$ *este continuă pe interval.*

Reamintim notaţia $\Psi(x) = x(1-x)$, $x \in [0,1]$.

Teorema 1.3.3. *(Voronovskaja, [72])*

Dacă f *este mărginită pe intervalul* $[0,1]$*, derivabilă într-o vecinătate a lui* x *și are a doua derivată* $f''(x)$ *pentru* $x \in [0,1]$*, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[B_n(f)(x) - f(x)\Big] = \frac{\Psi(x)}{2}f''(x). \tag{1.5}$$

Dacă $f \in C^2([0,1])$, *convergența este uniformă.*

Teorema 1.3.4. *(Păltănea, [53])*
Pentru orice funcție $f \in C([0,1])$, *are loc:*

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{3}{2}\omega_2\Big(f, \sqrt{\frac{\Psi(x)}{n}}\Big), x \in [0,1].$$

În cazul particular când $f \in C^1([0,1])$, *avem:*

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Psi(x)}{n}}\omega\Big(f', 2\sqrt{\frac{\Psi(x)}{n}}\Big), x \in [0,1].$$

Avem urmatoarea proprietate de saturaţie locală.

Teorema 1.3.5. *(Lorenz, [37]) Fie* $M > 0$. *Inegalitatea*

$$B_n(f)(x)| \leq M\frac{\Psi(x)}{2n} + o_x\Big(\frac{1}{n}\Big), x \in [0,1], n = 1, 2, \cdots \tag{1.6}$$

este echivalentă cu condiţia

$$f \in W^2_\infty \text{ şi } ||f''||_\infty \leq M, \tag{1.7}$$

unde $o_x\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ *este simbolul lui Landau.*

Dacă vom considera polinoamele Bernstein pentru valori complexe z în afara segmentului $z \in [0,1]$, presupunând că $f(z)$ este o funcție analitică pe un domeniu care conține segmentul $[0,1]$, atunci avem următorul rezultat.

Teorema 1.3.6. *(Lorenz, [38])*
Fie $a \in [0,1]$ *astfel încât* $R \geq a$ *și* $R \geq 1-a$ *ceea ce asigură faptul că segmentul* $[0,1]$ *este conținut în cercul* $|z-a| \leq R$. *Dacă funcția:*

$$f(z) = \sum_{z=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

este analitică pe un deschis care conţine discul $|z-a| \leq R$, *atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(z) = f(z) \text{ uniform pentru punctele } z \text{ din discul } |z-a| \leq R.$$

1.4 Operatorii Stancu

Operatorii Bernstein-Stancu reprezintă o extensie și o generalizare a conceptului de operatori Bernstein, aducând o îmbunătățire a capacității de aproximare a funcțiilor. Acești operatori sunt denumiți astfel în onoarea matematicianului român D. D. Stancu ([62]) care i-a introdus și a contribuit semnificativ la dezvoltarea și studiul lor.

Deși baza teoretică rămâne înrădăcinată în polinoamele Bernstein, operatorii Bernstein-Stancu permit o aproximare mai bună a anumitor clase de funcții, datorită utilizării a trei parametrii ce pot fi aleşi convenabil.

Fie $0 \leq \alpha \leq \beta, m \in \mathbb{N}$. Introducem operatorii Bernstein-Stancu: $P_m^{(\alpha,\beta)}$: $C\Big(\Big[\dfrac{\alpha}{m+\beta}, \dfrac{m+\alpha}{m+\beta}\Big]\Big) \to C([0,1])$

$$P_m^{\alpha,\beta}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} b_{m,k}(x) f(\frac{k+\alpha}{m+\beta}),$$

unde $b_{m,k}$ sunt polinoamele lui Bernstein.

Teorema 1.4.1. *(Stancu, [62])*
Operatorii Stancu au proprietățile:

i) $P_m^{\alpha,\beta}(e_0)(x) = 1$;

ii) $P_m^{\alpha,\beta}(e_1)(x) = x + \dfrac{\alpha - \beta x}{m+\beta}$;

iii) $P_m^{\alpha,\beta}(e_2)(x) = x^2 + \dfrac{mx(1-x) + (\alpha+\beta x)(2mx+\beta x+\alpha)}{(m+\beta)^2}$;

iv) $\forall f \in C([0,1]), \lim\limits_{m\to\infty} P_m^{(\alpha,\beta)}(f)(x) = f(x)$ *uniform pe* $[0,1]$;

v) Dacă $\alpha \in [0, \frac{1}{4}], \beta \in [\alpha, 2\alpha]$ *sau* $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \beta \in [4\alpha^2, 2\alpha]$ *atunci*

$$|P_m^{(\alpha,\beta)}(f)(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\Big(f, \frac{1}{\sqrt{m+4\alpha^2}}\Big);$$

vi) Dacă $\alpha \in \Big[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\Big], \beta \in [\alpha, 4\alpha^2]$ *sau* $\alpha \geq \frac{1}{2}, \beta \in [\alpha, 2\alpha]$ *atunci*

$$|P_m^{(\alpha,\beta)}(f)(x) - f(x)| \leq \Big(1 + \frac{4\alpha^2+1}{2(\beta+1)}\Big)\omega\Big(f, \frac{1}{\sqrt{m+4\alpha^2}}\Big);$$

vii) Dacă $\beta \in [\frac{1}{4}, 1], \alpha \in [0, \beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}]$ *sau* $\beta \geq 1, \alpha \in [0, \frac{\beta}{2}]$ *atunci*

$$|P_m^{(\alpha,\beta)}(f)(x) - f(x)| \leq \Big(1 + \frac{4(\beta-\alpha)^2+1}{2(\beta+1)}\Big)\omega\Big(f, \frac{1}{\sqrt{m+4(\beta-\alpha)^2}}\Big);$$

viii) Dacă $\beta \leq 1, \alpha \in [\beta - \frac{\sqrt{\beta}}{2}, \frac{\beta}{2}] \bigcap [0, \infty]$ *atunci*

$$|P_m^{(\alpha,\beta)}(f)(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\Big(f, \frac{1}{\sqrt{m+4(\beta-\alpha)^2}}\Big).$$

În [64], D. D. Stancu oferă o nouă generalizare:

$$(S_{n,r,s}f)(x) = \sum_{j=0}^{n-rs} p_{n-rs,j}(x) \sum_{i=0}^{s} p_{s,i}(x) f\left(\frac{j+ir}{n}\right), \tag{1.8}$$

$f \in C([0,1])$, $x \in [0,1]$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $r, s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sunt fixate astfel încât $rs < n$.

Operatorii Bernstein se obțin în cazurile particulare $s = 0$ sau $s = 1$, $r = 0$ sau $s = 1$, $r = 1$.

1.5 Operatorii Kantorovich

Operatorii Kantorovich sunt o clasă importantă de operatori de aproximare utilizați în teoria aproximării funcțiilor. Acești operatori sunt aplicabili numai funcțiilor integrabile. Ei au proprietatea remarcabilă de a invaria integrala $\int_0^1 f(t)dt$, dacă f este funcția de aproximat.

Operatorii Kantorovich sunt definiți astfel: $K_m : L_1(0,1) \to C([0,1])$

$$K_m(f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^{m} b_{m,k}(x) \int_{k/(m+1)}^{(k+1)/(m+1)} f(t)dt,$$

unde $b_{m,k}$ sunt polinoamele Bernstein.

Teorema 1.5.1. *(Agratini, [4]) Operatorii Kantorovich au următoarele proprietăți:*

i) $K_m(e_0)(x) = 1;$

ii) $K_m(e_1)(x) = \dfrac{m}{m+1}x + \dfrac{1}{2(m+1)};$

iii) $K_m(e_2)(x) = \dfrac{m(m-1)}{(m+1)^2}x^2 + \dfrac{2m}{(m+1)^2}x + \dfrac{1}{3(m+1)^2};$

iv) $\lim\limits_{m\to\infty} K_m(f)(x) = f(x)$ *uniform pe* $[0,1], \forall f \in C([0,1]),$
$\lim\limits_{m\to\infty} K_m(f)(x) = f(x), \forall f \in L_p([0,1]), p \geq 1;$

v) Dacă $f \in C([0,1])$ *și* $x \in [0,1]$ *atunci*

$$|K_m(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega\Big(f, \frac{1}{2\sqrt{m+1}}\Big).$$

1.6 Operatorii Durrmeyer

Operatorii Durrmeyer au fost descoperiți de Durrmeyer și independent de Lupaș ([39]).

Operatorii Durrmeyer sunt operatori Bernstein modificați. Acești operatori au proprietăți remarcabile de convergență și de aproximare, precum și proprietăți remarcabile legate de structura spectrală și de verificarea unor ecuații diferențiale.

Fie $m \in \mathbb{N}$. Operatorii Durrmeyer sunt definiți astfel: $D_m : L_1([0,1]) \to C([0,1])$

$$D_m(f)(x) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} b_{m,k}(x)\int_0^1 b_{m,k}(t)f(t)dt,$$

unde $b_{m,k}$ sunt polinoamele Bernstein.

Teorema 1.6.1. *(Derrienic, [24])*
Operatorii Durrmeyer au următoarele proprietăți:

i) $D_m(e_0)(x) = 1$;

ii) *Transformă orice polinom de grad* $p, p \leq m$ *într-un polinom de grad* p;

iii) $\lim\limits_{m\to\infty} D_m(f) = f(x)$ *uniform pe* $[0,1]\forall f \in C([0,1])$;

iv) *Dacă* f *și* g *sunt funcții integrabile pe* $[0,1]$ *atunci*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^1 D_m(f)(x)g(x)dx = \int_0^1 f(t)D_m(g)(t)dt;$$

v) *Polinoamele lui Legendre sunt vectori proprii ai operatorului* $D_m, \forall m \in \mathbb{N}$. *Valoarea proprie asociată polinomului Legendre de gradul* n *este:*

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{(m+1)!m!}{(m-n)!(m+n+1)!}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases};$$

vi) *Fie* f *integrabilă și mărginită pe* $[0,1]$. *Dacă într-un punct* $x \in [0,1]$ *este de două ori derivabilă, atunci*

$$\lim_{m\to\infty} m(D_m(f)(x) - f(x)) = (1-2x)f'(x) + x(1-x)f''(x);$$

vii) *Fie* f *integrabilă și mărginită pe* $[0,1]$. *Dacă* f *admite o derivată de ordinul* r *în* $x \in [0,1]$, *atunci:*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d^r}{dx^r} D_m(f)(x) = \frac{d^r}{dx^r} f(x);$$

viii) $|D_m(f)(x) - f(x)| \leq 2\omega\Big(f, \dfrac{1}{\sqrt{2m+6}}\Big), \forall f \in C([0,1]), \forall m \geq 3.$

1.7 Operatorii Beta

Funcția Beta $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, unde $x,y>0, t\in[0,1]$ este utilizată ca funcție pondere în definirea operatorilor Beta. Operatorii Beta, introduși de A. Lupaş ([39]), sunt definiți astfel:

$$\mathbb{B}_n(f)(x)=\int_0^1 \frac{t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}}{B(nx+1,n+1-nx)}f(t)dt,\ f\in C([0,1]),\ x\in[0,1], \tag{1.9}$$

unde $B(u,v)$ este funcția Beta.

Teorema 1.7.1. *(Lupaș, [39]) Operatorii Beta au următoarele proprietăți:*

i) $(\mathbb{B}_n e_p)(x)=\dfrac{(nx+p)(nx+p-1)\cdots(nx+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p+1)}$;

ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{B}_n(f)(x)=f(x)$ *uniform* $\forall f\in C([0,1])$.

1.8 Operatorii Balázs

Operatorii Balázs pot fi folosiți pentru a aproxima o funcție pe intervalul nemărginit $[0,\infty)$. Pentru $f\in C([0,\infty))$, operatorii Balázs ([8]) sunt definiți astfel:

$$\begin{aligned}(R_nf)(x) &= \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(a_nx)^j f\left(\frac{j}{b_n}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} p_{n,j}\left(\frac{a_nx}{1+a_nx}\right) f\left(\frac{j}{b_n}\right),\ x\geq 0,\ n\in\mathbb{N},\end{aligned} \tag{1.10}$$

unde

$$p_{n,j}(z)=\binom{n}{j}z^j(1-z)^{n-j}, z\geq 0,$$

și $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două șiruri de numere reale pozitive alese corespunzător.

Teorema 1.8.1. *(Balázs, [8])*
Operatorii Balázs au următoarele proprietăți:

i) $\dfrac{1}{1+\alpha_nx}\sum_{j=0}^{n}\dbinom{n}{j}(\alpha_nx)^j=1$;

ii) $\dfrac{1}{1+\alpha_nx}\sum_{j=0}^{n}(j-b_nx)\dbinom{n}{j}(\alpha_nx)^j=\dfrac{-\alpha_nb_nx^2}{1+\alpha_nx}$;

iii) $\dfrac{1}{1+\alpha_nx}\sum_{j=0}^{n}(j-b_nx)^2\dbinom{n}{j}(\alpha_nx)^j=\dfrac{\alpha_n^2b_n^2x^4+b_nx}{(1+\alpha_nx)^2}$,
$\forall x\geq 0$ *și* $\alpha_n=\dfrac{b_n}{n}, b_n>0$.

Capitolul 2

Construcția unor noi tipuri de operatori de aproximare

În acest capitol, vom prezenta câteva metode de construcție a unor noi operatori de aproximare. Capitolul este organizat în trei secțiuni, fiecare secțiune este corespunzătoare unei metode de construcție a acestor operatori. Prima secțiune este dedicată construcției cu ajutorul sumelor boolene, a doua secțiune este adusă în prim plan construcția unui nou operator bazată pe o modificare a operatorilor lui Bernstein, iar în ultima secțiune este evidențiată o generalizare de tip Stancu.

2.1 Operatori construiți cu sume booleene

Această secțiune conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [40].

Folosind combinații de operatori liniari și pozitivi este posibil să îmbunătățim ordinul de aproximare al operatorilor Beta. O metodă este utilizarea sumelor booleene. Prin suma booleană a doi operatori S și T înțelegem operatorul $S + T - S \circ T$.

Considerăm șirul de operatori $(L_n)_n$, definit după cum urmează:

$$L_n := 2\mathbb{B}_n - \mathbb{B}_n \circ \mathbb{B}_n. \tag{2.1}$$

Pentru a studia operatorul L_n, avem nevoie de calculul momentelor operatorilor $\mathbb{B}_n$.

Dacă $k = 0, 1, 2, \ldots$, $n \geq 1$, $x \in [0, 1]$, notăm:

$$m_{n,k}(x) \quad = \quad \mathbb{B}_n((e_1 - xe_0)^k)(x).$$

Utilizând formulele anterioare și funcția $\Psi(x) = x(1 - x)$, obținem:

Lema 2.1.1. *[40] Avem:*

$$m_{n,1}(x) = A_{n,1}\Psi'(x) \tag{2.2}$$
$$m_{n,2}(x) = A_{n,2}\Psi(x) + B_{n,2} \tag{2.3}$$
$$m_{n,3}(x) = A_{n,3}\Psi(x)\Psi'(x) + B_{n,3}\Psi'(x) \tag{2.4}$$
$$m_{n,4}(x) = A_{n,4}\Psi(x)^2 + B_{n,4}\Psi(x) + C_{n,4}, \tag{2.5}$$

unde

$$A_{n,1} = \frac{1}{n+2},\ A_{n,2} = \frac{n-6}{(n+2)(n+3)},\ B_{n,2} = \frac{2}{(n+2)(n+3)} \tag{2.6}$$
$$A_{n,3} = \frac{5n-12}{(n+2)(n+3)(n+4)},\ B_{n,3} = \frac{6}{(n+2)(n+3)(n+4)} \tag{2.7}$$
$$A_{n,4} = \frac{3n^2-86n+120}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \tag{2.8}$$
$$B_{n,4} = \frac{26n-120}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \tag{2.9}$$
$$C_{n,4} = \frac{24}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}. \tag{2.10}$$

În plus,

$$m_{n,6}(x) = O\Big(\frac{1}{n^3}\Big). \tag{2.11}$$

Teorema 2.1.1. *[40] Operatorii L_n satisfac următoarea condiție:*
Dacă $f \in C([0,1])$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)(x) = f(x),\ \textit{uniform pentru}\ x \in [0,1].$$

Folosim sume booleene a operatorilor Beta pentru a obține o imbunătățire a ordinului de aproximare exprimat prin teorema de tip Voronovskaja. Astfel, se obține un șir de operatori liniari și pozitivi $(L_n)_n$, $L_n : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ pentru care: $\exists \alpha_n$ cu $\dfrac{\alpha_n}{n} \longrightarrow \infty$ asfel încât relația (1.1) este satisfăcută.

Pentru operatorii Beta, următorul rezultat este cunoscut.

Teorema 2.1.2. *(Lupaș, [39]) Dacă $f \in C^{IV}([0,1])$, pentru fiecare $x \in [0,1]$ avem:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} n[\mathbb{B}_n(f)(x) - f(x)] = (1-2x)f'(x) + \frac{1}{2}x(1-x)f''(x). \tag{2.12}$$

Prin urmare, operatorii Beta satisfac teorema Voronovskaja pentru $\alpha_n = n$. Pentru a obține un ordin de aproximare mai bun in teorema Voronovskaja, considerăm șirul de operatori $(L_n)_n$, definiți în (2.1).

Teorema 2.1.3. *[40] Dacă $f \in C^4([0,1])$ și $x \in [0,1]$, atunci:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} n^2[L_n(f)(x) - f(x)] &= 2f'(x)\Psi'(x) + f''(x)\Big[-\frac{3}{2} + 8\Psi(x)\Big] \\ &\quad -2f'''(x)\Psi(x)\Psi'(x) - \frac{1}{2}f^{IV}(x)\Psi^2(x). \end{aligned}$$

2.2 Operatori de tip Bernstein generalizați obținuți prin trunchierea domeniului

Această secțiune conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [41].

În [21] a fost introduși următorii operatori de tip Bernstein. Notăm cu V_n operatorii definiți astfel:

$$V_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \cdot f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

unde

$$b_{n,k}(x) = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot \Big(\frac{n}{n+1} - x\Big)^{n-k}$$

și

$$f \in C([0,1]),\ x \in \Big[0, 1 - \frac{1}{n+1}\Big],\ n \in \mathbb{N}.$$

În mod similar, introducem următorii operatori generalizați [41]:

$$S_n^t : C([0,1]) \to C\Big[0, \frac{n}{n+t}\Big],\ t > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^t(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}(x) \cdot f\Big(\frac{k}{n+t}\Big),\ \forall f \in C([0,1]),\ \ x \in \Big[0, \frac{n}{n+t}\Big], \tag{2.13}$$

unde

$$s_{n,k}(x) = \Big(\frac{n+t}{n}\Big)^n \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot \Big(\frac{n}{n+t} - x\Big)^{n-k}.$$

Operatorii S_n^t pot fi definiți, de asemenea, în spațiul $C\Big[0, \frac{n}{n+t}\Big]$, și notăm funcția $f \in C([0,1])$ și restricția ei la intervalul $\Big[0, \frac{n}{n+t}\Big]$ cu același simbol. În continuare, folosim simbolul lui Pochhammer: $(a)_r = a(a-1)\dots(a_r+1)$, pentru $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$.

Propoziţia 2.2.1. *[41]*
Operatorii S_n^t satisfac următoarele relații:

i) $S_n^t(f)(x) \geq 0$, *dacă* $f \in C\Big[0, \dfrac{n}{n+t}\Big]$, $f \geq 0$;

ii) $S_n^t(e_0)(x) = 1$;

iii) $S_n^t(e_1)(x) = x$;

iv) $S_n^t(e_2)(x) = x\Big(\dfrac{n-1}{n} \cdot x + \dfrac{1}{n+t}\Big)$,

unde $x \in \Big[0, 1 - \dfrac{1}{n+t}\Big]$.

Propoziţia 2.2.2. *[41] Are loc următoarea relație de recurență:*

$$x\Big(\frac{n}{n+t} - x\Big)s'_{n,k}(x) = n \cdot \Big(\frac{k}{n+t} - x\Big)s_{n,k}(x).$$

Teorema 2.2.1. *[41] Fie momentul de ordin m pentru operatorii (2.13) definiți astfel:*

$$\mu_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k}(x)\Big(\frac{k}{n+t} - x\Big)^m, m = 0, 1, 2, ...$$

Atunci avem:

i) $\mu_{n,0}(x) = 1$;

ii) $\mu_{n,1}(x) = 0$;

iii) $n\mu_{n,m+1}(x) = x\Big(\dfrac{n}{n+t} - x\Big)\Big(\mu'_{n,m}(x) + m\mu_{n,m-1}(x)\Big)$;

iv) $\mu_{n,2}(x) = \dfrac{x}{n}\Big(\dfrac{n}{n+t} - x\Big)$;

v) $\mu_{n,3}(x) = \dfrac{x}{n}\Big(\dfrac{n}{n+t} - x\Big)\Big(\dfrac{1}{n+t} - \dfrac{2x}{n}\Big)$;

vi) $\mu_{n,4}(x) = \dfrac{x}{n}\Big(\dfrac{n}{n+t} - x\Big)\Big[\dfrac{1}{n} \cdot \Big(\dfrac{n}{n+t} - x\Big) \cdot \Big(\dfrac{1}{n+t} - \dfrac{4x}{n} + 3\Big) - \dfrac{x}{n}\Big(\dfrac{1}{n+t} - \dfrac{2x}{n}\Big)\Big]$.

Teorema 2.2.2. *[41] Pentru orice $t > 0$, $f \in C([0,1])$ și $0 < \epsilon < 1$, este adevărată următoarea relație:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n^t(f)(x) = f(x)$$

uniform pe intervalul $[0, 1-\epsilon]$.

Teorema 2.2.3. *[41] Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită și de două ori derivabilă în punctul $x \in (0,1)$. Atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[S_n^t(f)(x) - f(x)\Big] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Amintim următoarele definiții cunoscute:

Definiția 2.2.1. *O funcție $g : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, se numește convexă de ordin $r \geq -1$ dacă toate diferențele divizate pe $r+2$ puncte pe intervalul I sunt pozitive.*

Prin urmare, o funcție pozitivă este o funcție convexă de ordin -1, o funcție crescătoare este convexă de ordin 0 și așa mai departe. Cu alte cuvinte, pentru $r \geq 0$ dacă $f \in C^{r+1}(I)$, atunci f este convexă de ordin r dacă și numai dacă $f^{(r+1)} \geq 0$.

Definiția 2.2.2. *Un operator liniar este numit operator convex de ordin r, $r \geq -1$ dacă el transformă orice funcție r convexă intr-o funcție r convexă.*

Următoarea proprietate este esențială pentru demonstrarea existenței aproximării simultane.

Teorema 2.2.4. *[41] Operatorii S_n^t sunt convecși de ordin $r-1$, $\forall r \in [0,n]$.*

Studiul aproximării simultane este bazat pe utilizare operatorilor Kantorovich de ordin superior.

Teorema 2.2.5. *[41]*
Scriind $T_{n,r}(x) = S_n^t(e_r)(x)$, avem:

$$T_{n,r+1}(x) = x \cdot T_{n,r}(x) + \frac{x}{n}\Big(\frac{n}{n+t} - x\Big) T'_{n,r}(x).$$

Teorema 2.2.6. *[41]*
Pentru $n \geq 1, r \geq 0, x \in [0,1]$, avem:

$$T_{n,r}(x) = A_{n,r}x^r + B_{n,r}x^{r-1} + C_{n,r}x^{r-2} + R_{n,r}(x)$$

unde

$$\begin{aligned} A_{n,r} &= \frac{(n-1)_{r-1}}{n^{r-1}}, \\ B_{n,r} &= \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{(n-1)_{r-2}}{n^{r-2}(n+t)}, \\ C_{n,r} &= \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24} \cdot \frac{(n-1)_{r-3}}{n^{r-3}(n+t)^2} \end{aligned}$$

și $R_{n,r}$ este un polinom de grad $r-3$.

Rezultatul principal este următorul:

Teorema 2.2.7. *[41] Pentru orice funcție $f \in C^r([0,1])$, $r \geq 1$ orice $t > 0$ și $\varepsilon > 0$ avem:*

$$\lim_{n\to\infty} (S_n^t(f)(x))^{(r)} = f^{(r)}(x), \text{ uniform pentru } x \in [0, 1-\varepsilon]. \tag{2.14}$$

2.3 Operatori de tip Balázs-Stancu

Această secțiune conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [45], în colaborare cu Maria Talpău Dimitriu.

Operatorii Balázs introduși în secțiunea 1.9 au fost studiați și generalizați în mai multe direcții: [9], [68], [10], [1], [5], [6], [31].

În această secțiune, considerăm o generalizare a operatorilor Balázs în manierea generalizării operatorilor Bernstein introdusă de D. D. Stancu în [64]:

$$(S_{n,r,s}f)(x) = \sum_{j=0}^{n-rs} p_{n-rs,j}(x) \sum_{i=0}^{s} p_{s,i}(x) f\left(\frac{j+ir}{n}\right), \tag{2.15}$$

$f \in C([0,1])$, $x \in [0,1]$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $r, s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sunt fixate astfel încât $rs < n$. Considerăm operatorii Balázs-Stancu definiți astfel:

$$(R_{n,r,s}f)(x) = \sum_{j=0}^{n-rs} p_{n-rs,j}\Big(\frac{a_n x}{1+a_n x}\Big) \sum_{i=0}^{s} p_{s,i}\Big(\frac{a_n x}{1+a_n x}\Big) f\Big(\frac{j+ir}{n a_n}\Big), \tag{2.16}$$

$f \in C\left[0,\infty\right)$, $x \geq 0$, unde $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{N}_0$ astfel încât $rs < n$, $(a_n)_n$ este un șir de numere reale pozitive.

Dacă $a_n = 1, (\forall) n \in \mathbb{N}$, avem $(R_{n,r,s}f)(x) = (S_{n,r,s}f)\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.

Lema 2.3.1. *[45] Operatorul $S_{n,r,s}$ satisface următoarele relații:*

(i) $(S_{n,r,s}e_0)(x) = 1$;

(ii) $(S_{n,r,s}e_1)(x) = x$;

(iii) $(S_{n,r,s}e_2)(x) = x^2 + \left(1 + \dfrac{rs(r-1)}{n}\right) \cdot \dfrac{x(1-x)}{n}$,

unde $x \in [0,\infty)$ și $e_i(y) = y^i, i = 0,1,2$.

Lema 2.3.2. *[45] Operatorul $R_{n,r,s}$ satisface următoarele relații:*

(i) $R_{n,r,s}f \geq 0$, $(\forall) f \in C\left[0,\infty\right)$, $f \geq 0$;

(ii) $(R_{n,r,s}e_0)(x) = 1$;

(iii) $(R_{n,r,s}e_1)(x) = \dfrac{x}{1+a_n x}$;

$$\textit{(iv)}\ (R_{n,r,s}e_2)(x) = \frac{x^2}{(1+a_n x)^2} + \left(1 + \frac{rs(r-1)}{n}\right) \cdot \frac{x}{na_n(1+a_n x)^2},$$

unde $x \in [0, \infty)$ *și* $e_p(y) = y^p, p = 0, 1, 2.$

Lema 2.3.3. *[45] Fie momentul de ordin m pentru operator, notat astfel:*

$$\Big(R_{n,r,s}(e_1 - xe_0)^m\Big)(x) = \sum_{j=0}^{n-rs} p_{n-rs,j}\Big(\frac{a_n x}{1+a_n x}\Big) \sum_{i=0}^{s} p_{s,i}\Big(\frac{a_n x}{1+a_n x}\Big) \cdot \Big(\frac{j+ir}{na_n} - x\Big)^m, m = 1, 2, \ldots.$$

Atunci avem

(i)

$$\Big(R_{n,r,s}(e_1 - xe_0)\Big)(x) = -\frac{a_n x^2}{1+a_n x};$$

(ii)

$$\Big(R_{n,r,s}(e_1 - xe_0)^2\Big)(x) = r\frac{a_n^2 x^4}{(1+a_n x)^2} + \Big(1 + \frac{rs(r-1)}{n}\Big) \cdot \frac{x}{na_n(1+a_n x)^2}.$$

Teorema 2.3.1. *[45] Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \infty$*, atunci pentru o funcție mărginită* $f \in UC_B([0, \infty))$ *rezultă că*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,r,s}f = f \textit{ uniform pe orice interval compact } K \subset [0, \infty).$$

Reamintim că modulul de continuitate pentru funcția continuă f pe $[0, \infty)$, este definit de:

$$\omega(f, t) = \sup\left\{|f(y) - f(x)| : x, y \in [0, \infty), |y - x| \le t\right\}, t > 0,$$

în caz că acest modul este mărginit.

Teorema 2.3.2. *[45] Pentru orice funcție* $f \in C[0, \infty)$ *astfel încât* $\omega(f, t) < \infty$, $(\forall) t > 0$, *următoarea inegalitate are loc:*

$$|(R_{n,r,s}f)(x) - f(x)| \le 2\omega\left(f, \theta_{n,r,s,x}\right), \tag{2.17}$$

unde

$$\theta_{n,r,s,x} = \sqrt{\frac{a_n^2 x^4}{(1+a_n x)^2} + \Big(1 + \frac{rs(r-1)}{n}\Big) \cdot \frac{x}{na_n(1+a_n x)^2}}.$$

Observaţia 2.3.1. Pentru $f \in C[0, \infty)$ și $M > 0$ avem

$$\|R_{n,r,s}f - f\|_{[0,M]} \le 2\omega\left(f, \sqrt{a_n^2 M^4 + \Big(1 + \frac{rs(r-1)}{n}\Big) \cdot \frac{M}{na_n}}\right). \tag{2.18}$$

Corolar 2.3.1. *[45] Dacă f este o funcție care este uniform continuă și mărginită pe $[0,\infty)$, atunci f poate fi uniform aproximată pe orice interval compact $K \subset [0,\infty)$.*

Vom prezenta acum conservarea funcțiilor monotone și a celor convexe prin operatorii construiți.

Lema 2.3.4. *[45] Pentru $f \in C([0,\infty))$, $0 \le x < y$, $\lambda \in [0,1]$ avem*

$$
\begin{aligned}
&(R_{n,r,s}f)\left((1-\lambda)x+\lambda y\right)\\
&= \sum_{k_1+l_1=0}^{s} \sum_{k_2+l_2=0}^{n-rs} p_{s,k_1,l_1}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}, \frac{a_n(y-x)}{(1+a_n x)(1+a_n y)}\right) \times\\
&\times p_{n-rs,k_2,l_2}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}, \frac{a_n(y-x)}{(1+a_n x)(1+a_n y)}\right) \times\\
&\times r \sum_{m_1=0}^{l_1} \sum_{m_2=0}^{l_2} p_{l_1,m_1}\left(\frac{\lambda(1+a_n y)}{\lambda(1+a_n y)+(1-\lambda)(1+a_n x)}\right) \times\\
&\times p_{l_2,m_2}\left(\frac{\lambda(1+a_n y)}{\lambda(1+a_n y)+(1-\lambda)(1+a_n x)}\right) f\left(\frac{k_2+m_2+r(k_1+m_1)}{n a_n}\right),
\end{aligned}
$$

unde $p_{m,k,l}(u,v) = \dfrac{m!}{k!l!\,(m-k-l)!} u^k v^l (1-u-v)^{m-k-l}$ este baza Bernstein pentru spațiul polinoamelor de două variabile.

Teorema 2.3.3. *[45] Fie $f \in C([0,\infty))$. Dacă f este o funcție necrescătoare, atunci $R_{n,r,s}f$ este o funcție necrescătoare.*

Teorema 2.3.4. *[45] Fie $f \in C([0,\infty))$ o funcție necrescătoare. Dacă f este o funcție convexă, atunci $R_{n,r,s}f$ este o funcție convexă.*

În finalul acestui paragraf vom prezenta proprietatea de invarianță a unor clase de funcții Lipschitz, după modelul din [66].

Notăm $Lip_M\alpha$ clasa funcțiilor Lipschitz pe $[0,\infty)$ cu exponentul $\alpha \in (0,1]$ și constanta Lipschitz $M > 0$ adică mulțimea tuturor funcțiilor continue cu valori reale f definite pe $[0,\infty)$ care verfică condiția:

$$|f(x)-f(y)| \le M \cdot |x-y|^{\alpha}, \, (\forall) x,y \in [0,\infty).$$

Teorema 2.3.5. *[45] Fie $f \in C([0,\infty))$, $M > 0$ și $\alpha \in (0,1]$. Dacă $f \in Lip_M\alpha$, atunci $R_{n,r,s}f \in Lip_M\alpha$.*

Capitolul 3

Proprietățile de $\mathbb{B}-$concavitate și $\mathbb{BB}-$concavitate în legătură cu operatorii Bernstein

Acest capitol conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [43] și o lucrare trimisă spre publicare [46].

Punctul de plecare îl reprezintă lucrările [15], [69]. Autorii au introdus noțiunea de $\mathbb{B}-$convexitate și respectiv, $\mathbb{B}-$ concavitate pentru funcții de mai multe variabile. De asemenea, au demonstrat că funcțiile crescătoare și $\mathbb{B}-$concave sunt transformate prin operatorii Bernstein în funcții de același tip.

Între alte clase de funcții conservate de operatorii Bernstein menționăm: funcții convexe (concave) de ordin superior (Popoviciu, [55]), clase Lipschitz de ordinul unu (Lindvall, [36]), Lipschitz clasă asociată cu modulul de ordinul doi modificat (Zhou, [73]) sau cvasiconvexitatea de ordin superior (Păltănea, [53]).

În capitolul de față, introducem noțiunea de $\mathbb{BB}-$concavitatea care reprezintă o mică modificare a $\mathbb{B}-$concavității și dăm caracterizări ale funcţiilor care au această proprietate. Apoi, obiectivul central îl reprezintă demonstrarea faptului că funcțiile $\mathbb{BB}-$concave și crescătoare definite pe un simplex s-dimensional sunt transformate în funcții $\mathbb{BB}-$concave și crescătoare prin operatorii Bernstein s-dimensionali pe un simplex.

În acest mod, generalizăm noțiunile introduse și rezultatele stabilite în lucrarea [43], unde am introdus noțiunea de $\mathbb{BB}$-concavitate pentru funcțiile a două variabile și am arătat o legătură între aceste tipuri de convexitate și operatorii Bernstein bidimensionali.

3.1 $\mathbb{B}$-concavitate și $\mathbb{BB}$-concavitate

Pentru $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_s), \overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_s) \in \mathbb{R}^s$, fie

$$\overline{a} \vee \overline{b} := (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, ..., \max\{a_s, b_s\}).$$

Definiția 3.1.1. *(Briec, Horvath, [15]), O funcție $f : M \subset \mathbb{R}^s_+ \to (0, \infty)$ este o funcție $\mathbb{B}-$concavă dacă are următoarele proprietăți:*

i) $\lambda\overline{a} \vee \overline{b} \in M, \forall \overline{a}, \overline{b} \in M, \lambda \in [0, 1]$;

ii) $f(\lambda\overline{a} \vee \overline{b}) \geq \lambda f(\overline{a}) \vee f(\overline{b}), \forall \overline{a}, \overline{b} \in M, \lambda \in [0, 1]$.

Definim o ordine parțială $'' \leq''$ on $\mathbb{R}^s_+$ de: $a \leq b$ dacă și numai dacă $a_i \leq b_i, \forall i = \overline{1, s}$, unde $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_s), \overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_s)$.

O funcție $f : D \subset \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ se numește crescătoare dacă $f(\overline{a}) \leq f(\overline{b}), \forall \overline{a}, \overline{b} \in D, \overline{a} \leq \overline{b}$.

Teorema 3.1.1. *[46] Fie $M \subset R^s$ un domeniu care satisface condiția i) din Definiția 3.1.1 și $\overline{0} \in M$. Dacă $f : M \longrightarrow (0, \infty)$ este o funcție crescătoare, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) f este o funcție $\mathbb{B}$-concavă.

ii) Pentru toți vectorii $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_s) \in M$ funcția

$$\varphi_v : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi_v(t) = \frac{t}{f(t\overline{v})}, t \in [0, 1]$$

este crescătoare.

Teorema 3.1.2. *[46] Fie $f : M \to \mathbb{R}^*_+$ o funcție crescătoare și derivabilă în toate cele s variabile, unde $M \subset R^s$ este un domeniu care satisface condiția i) din Teorema 3.1.1. Inegalitatea*

$$f(t\overline{v}) - t \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f(tv)}{\partial x_i} \cdot v_i \geq 0 \tag{3.1}$$

are loc $\forall \overline{v} \in M, \forall t \in [0, 1], \overline{0} \in M$, unde $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_s)$, dacă și numai dacă f este o funcție $\mathbb{B}$-concavă. Inegalitatea (3.1) este echivalentă cu:

$$f(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) \geq 0, \forall \overline{x} \in M. \tag{3.2}$$

Într-adevăr, putem lua $\overline{v} = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ și $t = 1$.

Este simplu de arătat că Δ satisface condiția $i)$ din Definiția 3.1.1 și $\overline{0} \in \Delta$.

Definiția 3.1.2. *Dacă $(x_1, ..., x_s) \in \Delta$ și $(y_1, ..., y_s) \in \Delta$, definim $\overline{y} \prec \overline{x}$ dacă $\forall i$ $y_i < x_i$ în cazul $x_i > 0$ și $y_i = x_i$ în cazul $x_i = 0$.*

Definiția 3.1.3. *O funcție $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este $\mathbb{BB}$-concavă dacă $\forall \overline{x} \in \Delta$ cu cel puțin două componente nenule și $\forall \overline{y} \in \Delta$, astfel încât $\overline{y} \prec \overline{x}$ avem:*

$$f(\overline{x}) \leq \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(\overline{z_i}), \tag{3.3}$$

unde $\overline{z_i} = (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ...x_s), i = \overline{1, s}$ și α_i sunt soluțiile sistemului de ecuații:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \overline{z_i}. \tag{3.4}$$

Propoziţia 3.1.1. *[46] Dacă $\overline{x} \in \Delta$, cu cel puțin două componente nenule și $\overline{y} \in \Delta$ cu $\overline{y} \prec \overline{x}$, soluțiile pentru (3.4) sunt:*

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{x_i}{x_i - y_i} \left(\displaystyle\sum_{j \in Q} \dfrac{x_j}{x_j - y_j} - 1 \right)^{-1}, & i \in Q \\ \alpha_i = 0, & i \in \{1, \ldots, s\} - Q \end{cases} \tag{3.5}$$

unde $Q = \{i \in \{1, ..., s\} | x_i > y_i\} = \{i \in \{1, ..., s\} | x_i > 0\}$.

Observaţia 3.1.1. În cazul particular bidimensional considerăm:

$$\Delta = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}. \tag{3.6}$$

O funcție $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este o funcție $\mathbb{BB}-$concavă dacă este adevărată următoarea inegalitate:

$$f(x, y) - \alpha f(z, y) - \beta f(x, w) \leq 0, \tag{3.7}$$

$\forall (x, y) \in \Delta, (z, y) \in \Delta, (x, w) \in \Delta$, astfel încât $z \leq x, w \leq y, z \cdot w < x \cdot y$, unde

$$\alpha = \frac{x \cdot y - x \cdot w}{x \cdot y - z \cdot w} \text{ și } \beta = \frac{x \cdot y - y \cdot z}{x \cdot y - z \cdot w}. \tag{3.8}$$

Din condiția $z \cdot w < x \cdot y$ rezultă că $x, y > 0$ și deci, se aplică Propoziția 3.1.1. Rezultă că numerele α și β sunt coeficienți unici pentru care:

$$(x, y) = \alpha \cdot (z, y) + \beta \cdot (x, w).$$

Deci o funcție $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este o funcție $\mathbb{BB}-$concavă dacă este adevărată următoarea inegalitate:

$$f\Big(\alpha \cdot (z, y) + \beta \cdot (x, w)\Big) \leq \alpha f(z, y) + \beta f(x, w), \tag{3.9}$$

$\forall (x, y) \in \Delta, (z, y) \in \Delta, (x, w) \in \Delta$ și $z \leq x, w \leq y, z \cdot w < x \cdot y$, unde $\alpha \in [0, 1]$ și $\beta \in [0, 1]$ sunt numere indicate în (3.8) și Δ este domeniul indicat în (3.6).

Teorema 3.1.3. *[46]*

Dacă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, $\mathbb{BB}$-concavă și $f(\overline{0}) \geq 0$ atunci este adevărată următoarea:

$$f(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) \geq 0, \quad \forall \overline{x} \in \Delta. \tag{3.10}$$

Corolar 3.1.1. *[46] Dacă $f : \Delta \to (0, \infty)$ este o funcție crescătoare, derivabilă și $\mathbb{BB}$-concavă rezultă f este $\mathbb{B}$-concavă.*

3.2 $\mathbb{BB}$-concavitatea operatorilor Bernstein în simplexul s-dimensional

Fie $n \in \mathbb{N}$ și operatorii Bernstein B_n de s variabile definiți pe $C(\Delta)$ definiți prin:

$$B_n(f)(\overline{x}) = \sum_{\overline{k} \in \Lambda_n} p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) \cdot f\left(\frac{\overline{k}}{n}\right), \quad f : \Delta \to \mathbb{R}, \quad \overline{x} \in \Delta \tag{3.11}$$

unde

$$p_{n,\overline{k}}(\overline{x}) = \binom{n}{\overline{k}} \cdot \overline{x}^{\overline{k}} \cdot (1 - |\overline{x}|)^{n-|\overline{k}|}, \quad \overline{k} \in \Lambda_n, \quad \overline{x} \in \Delta. \tag{3.12}$$

În cazul $s = 1$,

$$p_{r,q}(z) = \binom{r}{q} \cdot z^q \cdot (1 - z)^{r-q}.$$

Prin convenție, $p_{r,q}(z) = 0$ dacă $q < 0$ sau $q > r$.

Propoziţia 3.2.1. *[46]*

Ecuația (3.11) poate fi rescrisă pentru $\overline{x} \in \Delta$ astfel încât $x_1 + ... + x_{s-1} < 1$, în forma:

$$B_n(f)(\overline{x}) = \sum_{k_1=0}^{n} p_{n,k_1}(x_1) \sum_{k_2=0}^{n-k_1} p_{n-k_1,k_2}\left(\frac{x_2}{1 - x_1}\right) ... \times$$

$$\times \sum_{k_s=0}^{n-k_1-..-k_{s-1}} p_{n-k_1-...-k_{s-1},k_s}\left(\frac{x_s}{1 - x_1 - ... - x_{s-1}}\right) f\left(\frac{\overline{k}}{n}\right). \tag{3.13}$$

Teorema 3.2.1. *[46] Dacă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare și $\mathbb{BB}$-concavă* *și dacă* $f(\overline{0}) \geq 0$, *atunci*

$$B_n(f)(\overline{x}) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} B_n(f)(\overline{x}) \geq 0, \quad \overline{x} \in \Delta.$$

Corolar 3.2.1. *[46]*

Dacă $f : \Delta \to (0, \infty)$ *este o funcție crescătoare* $\mathbb{BB}-$*concavă, atunci* $B_n(f)$ *este* $\mathbb{B}-$*concavă.*

Observaţia 3.2.1. În cazul $s = 2$, considerăm B_n operatorii Bernstein de două variabile definiți pe $C(\Delta)$, dați de:

$$B_n(f)(x,y) = \sum_{k\geq 0, l\geq 0, k+l\leq n} b_{n,k,l}(x,y) \cdot f\Big(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\Big), f \in C(\Delta), (x,y) \in \Delta, \quad (3.14)$$

unde:

$$b_{n,k,l}(x,y) = \frac{n!}{k!l!(n-l-k)!} \cdot x^k \cdot y^l \cdot (1-x-y)^{n-k-l}. \quad (3.15)$$

Ecuația (3.14) poate fi rescrisă:

$$B_n(f)(x,y) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \sum_{l=0}^{n-k} b_{n-k,l}\Big(\frac{y}{1-x}\Big) \cdot f\Big(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\Big), \quad (3.16)$$

unde:

$$b_{r,s}(z) = \frac{r!}{s!(r-s)!} \cdot z^s \cdot (1-z)^{r-s}, z \in [0,1]. \quad (3.17)$$

Dacă $f : \Delta \to \mathbb{R}$ este $\mathbb{BB}$-concavă și crescătoare, atunci:

$$B_n(f)(x,y) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x} B_n(f)(x,y) - y \frac{\partial}{\partial y} B_n(f)(x,y) \geq 0.$$

Dacă $f \in C(\Delta)$ este $\mathbb{BB}-$concavă și crescătoare în ambele variabile, atunci $B_n(f)$ este $\mathbb{B}-$concavă.

Capitolul 4

Proprietăți ale unei clase de operatori Stancu modificați construiți cu distribuția Pólya

Aceast capitol conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [44], în colaborare cu Mihai N. Pascu și Nicolae R. Pascu.

În lucrare sa, Bernstein [13] a dat o demonstrație simplă a teoremei Weierstrass privind aproximarea uniformă a funcțiilor continue prin polinoame, cunoscute ca polinoame Bernstein.

Ulterior, D. D. Stancu a observat că distribuţia binomială folosită de Bernstein este un caz particular al distribuției urnei lui Pólya, acela în care parametrul de înlocuire este egal cu zero. Stancu a introdus în [61] și [62] o clasă mai generală de operatori, cunoscuţi în literatură ca operatorii Pólya-Stancu, notați cu P_n^c (vezi (4.7)).

O primă observație ar fi că dacă alegem ca parametrul de înlocuire c să fie un număr negativ real, se obţin polinoamele de interpolare Lagrange, care nu pot folosite pentru aproximarea uniformă a funcțiilor continue. În lucrarea sa, Stancu a considerat numai valori $c \geq 0$ ale parametrului de înlocuire în modelul urnei lui Pólya.

În lucrările [48], [49] și [70], au fost introduși operatorii R_n (4.8). S-a demonstrat că alegând valori negative ale parametrului de înlocuire în modelul urnei lui Pólya, operatorii R_n oferă rezultate de aproximare mai bune decât toți operatorii de tip Bernstein-Stancu.

În acest capitol se aduce o completare la rezultatele anterioare și arătăm că pentru o clasă suficient de mare de funcții, anume, funcțiile convexe și pentru o alegere minimală admisibilă a parametrului de înlocuire, operatorii R_n oferă cea mai bună aproximare a funcțiilor convexe.

Demonstrația rezultatului principal este dat de Teorema 4.2.1 şi se bazează pe un rezultat intermediar, dat de Teorema 4.1.1, care reprezintă un interes în sine și care arată că variabilele aleatoare Pólya satisfac a ordonarea convexă în raport cu parametrul de înlocuire. La rândul său, demonstrația acestui rezultat se bazează pe alte două rezultate: un rezultat privind ordonarea (intercalarea) a trei mulțimi (Lema 4.1.1) și monotonia momentului centrat parțial al distribuției Pólya (Lema 4.1.2).

4.1 Rezultate preliminare referitoare la operatori construiți cu distribuția Pólya

Reamintim că parametrii întregi dați $a, b, c \geq 0$ și $n \geq 1$ satisfac condiţia de compatibilitate:

$$a + (n-1)\,c \geq 0 \qquad \text{și} \qquad b + (n-1)\,c \geq 0. \tag{4.1}$$

Modelul urnei lui Pólya constă în determinarea numărului de bile albe (succese) extrase în n încercări dintr-o urnă care conținea inițial a bile albe și b bile negre, unde după fiecare extragere, bila extrasă este înlocuită în urnă cu c bile de aceeași culoare.

Notăm cu $X_n^{a,b,c}$, variabilă aleatoare Pólya cu parametrii a, b, c și n, care reprezintă numărul de succese în acest experiment.

Avem:

$$p_{n,k}^{a,b,c} = P\left(X_n^{a,b,c} = k\right) = C_n^k \frac{a^{(k,c)} b^{(n-k,c)}}{(a+b)^{(n,c)}}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{4.2}$$

unde $x, h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ și

$$x^{(n,h)} = x\,(x+h)\,(x+2h) \cdot \ldots \cdot (x+(n-1)\,h) \tag{4.3}$$

Prin convenție, $x^{(0,h)} = 1, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}$.

Este cunoscut faptul că (vezi [33]) momentul centrat de ordinul 1 al distribuției Pólya $X_n^{x,1-x,c}$ este dat de:

$$E\left(\left(nx - X_n^{x,1-x,c}\right) 1_{X_n^{x,1-x,c} \leq s-1}\right) = s p_{n,s}^{x,1-x,c}\,(1 - x + (n-s)\,c) \tag{4.4}$$

pentru toți $s \in \{1, \ldots, n\}$.

Notăm cu:

$$P_n^{a,b,c} : F\left([0,1]\right) \to F\left([0,1]\right),$$

operatorii definiți de:

$$P_n^{a,b,c}\,(f; x) = E\left(\frac{1}{n} X_n^{a,b,c}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}^{a,b,c}, \tag{4.5}$$

unde parametrii $a, b \geq 0$ și $c \geq -\frac{\min\{x, 1-x\}}{n-1}$ pot depinde de $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [0,1]$ și satisfac condiția de compatibilitate (4.1) (vezi [48]).

Pentru alegeri particulare, regăsim operatorii Bernstein:

$$B_n\left(f;x\right)=P_n^{x,1-x,0}\left(f;x\right), \tag{4.6}$$

operatorii Bernstein-Stancu:

$$P_n^c\left(f;x\right)=P_n^{x,1-x,c}\left(f;x\right) \tag{4.7}$$

și operatorii R_n, introduși în [48]:

$$R_n\left(f;x\right)=P_n^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)}, \tag{4.8}$$

care corespund valorii minimale a parametrului de înlocuire c în cazul $a=x$ și $b=1-x$. Condiția de compatibilitate (4.1) este satisfăcută.

Reamintim că o variabilă aleatoare X se spune că este mai mică în ordine convexă decât o variabilă aleatoare Y și notăm $X\leq_{\mathrm{cx}}Y$ dacă și numai dacă:

$$E\left(\phi(X)\right)\leq E\left(\phi(Y)\right) \tag{4.9}$$

pentru orice funcție convexă $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care condițiile de mai sus există. Dacă X și Y sunt variabile aleatoare pentru care mediile EX, EY există și sunt egale este cunoscut faptul că (vezi [59], Teorema 3.A.1) $X\leq_{\mathrm{cx}}Y$ dacă și numai dacă:

$$E\left((t-X)_+\right)\leq E\left((t-Y)_+\right),\qquad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{4.10}$$

unde $x_+=\max\{x,0\}$.

Lema 4.1.1. *[44] Pentru orice $x\in(0,1)$ orice întregi $n\geq 3$ și $k\in\{1,\ldots,n-2\}$, există o partiție $\{n_1,\ldots,n_k\}\bigsqcup\{m_1,\ldots,m_{n-k-1}\}$ a mulțimii $\{1,2,\ldots,n-1\}$ astfel încât:*

$$n_i\leq\frac{i}{x},\quad i\in\{1,\ldots,k\}\qquad \text{și}\qquad m_i\leq\frac{i}{1-x},\quad i\in\{1,\ldots,n-k-1\}. \tag{4.11}$$

Lema 4.1.2. *[44] Pentru orice $x \in [0,1]$ și orice întregi $n \geq 1$ și $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, suma*

$$\sum_{i=0}^{k} \left(x - \frac{i}{n} \right) p_{n,i}^{x,1-x,c} \tag{4.12}$$

este o funcție nedecrescătoare $c \geq -\frac{1}{n-1} \min\{x, 1-x\}$.

Mai mult, pentru $x \in (0,1)$ și orice numere întregi $n \geq 2$ și $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, suma de mai sus este crescătoare în raport cu $c \geq -\frac{1}{n-1} \min\{x, 1-x\}$.

Teorema 4.1.1. *[44] Variabila aleatoare Pólya $X_n^{x,1-x,c}$ satisface următoarea ordonare convexă:*

$$X_n^{x,1-x,c} \leq_{cx} X_n^{x,1-x,c'}, \tag{4.13}$$

pentru orice întreg $n \geq 1$, $x \in [0,1]$ și orice $c' \geq c \geq -\frac{1}{n-1} \min\{x, 1-x\}$.

4.2 Estimarea erorii de aproximare a operatorilor Pólya-Stancu

Ca o aplicație a Teoremei 4.1.1, avem:

Teorema 4.2.1. *[44] Pentru orice funcție convexă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eroarea aproximării operatorilor Pólya-Stancu P_n^c este o funcție nedescrescătoare care depinde de c astfel încât:*

$$|P_n^{c_2} f(x) - f(x)| \geq |P_n^{c_1} f(x) - f(x)|, \tag{4.14}$$

pentru orice întreg $n \geq 2$, $x \in [0,1]$ și orice $c_2 > c_1 \geq -\frac{1}{n-1} \min\{x, 1-x\}$.

Mai mult, dacă

$$B_n f(x) \neq B_1 f(x) \tag{4.15}$$

pentru anumite valori ale lui $n \geq 2$ și $x \in [0,1]$, atunci inegalitatea de mai sus este strictă, de unde:

$$|P_n^{c_2} f(x) - f(x)| > |P_n^{c_1} f(x) - f(x)|, \tag{4.16}$$

pentru orice $c_2 > c_1 \geq -\frac{1}{n-1} \min\{x, 1-x\}$.

Capitolul 5

Metode de sumare aplicate operatorilor

Aceast capitol conține rezultate pe care autoarea le-a prezentat în lucrarea [42], în colaborare cu Radu Păltănea.

Dacă considerăm produsul scalar indus de o pondere pe spaţiul funcţiilor de pătrat integrabile în raport cu această pondere şi o familie ortonormată în acest spaţiu, atunci fiecărei funcţii din acest spaţiu i se poate ataşa seria Fourier generalizată. Este bine cunoscut că, de regulă, şirul sumele parţiale ale seriei Fourier ataşate unei funcţii din acest spaţiu, nu converge uniform pe interval la funcţia dată, (Teorema Lozinsky şi Harshiladze, [57]) deşi ele pot converge punctual, precum şi in norma indusă de produsul scalar. Un exemplu clasic îl constituie șirul sumelelor parţiale Fourier trigonometrice (fenomenul lui Gibbs).

In cazul seriilor Fourier trigonometrice, Fejér a demonstrat că în cazul în care se construieşte şirul operatorilor obţinuţi ca media Cesáro a sumelor parţiale Fourier, numiţi operatorii lui Fejér, aceştia sunt liniari şi pozitivi şi au proprietatea de aproximare uniformă a funcțiilor continue.

Mai recent, s-a arătat că operatori liniari şi pozitivi ai lui Durrmeyer [24], sau mai general, operatorii Durrmeyer cu pondere Jacobi, [50] care au proprietatea de aproximare uniformă a funcţiilor continue pe intervalul $[0, 1]$ se pot reprezenta ca sume parţiale Fourier modificate de polinoame Legendre şi respectiv Jacobi. Aceast capitol evidenţiază faptul că atât operatorii lui Durrmeyer cât şi Durrmeyer cu pondera Jacobi pot fi construiţi prin aplicarea unor metode regulate de sumare aplicate şirurilor sumelor parţiale ale dezvoltării generalizate Fourier de polinoame ortogonale.

Capitolul este organizat astfel: în primele secţiuni sunt prezentate generalităţi privind seriile Fourier trigonometrice şi operatorii lui Fejer, seriile Fourier generalizate, proiectori şi metode de sumare. Ultima sectiune conţine rezultatele de bază, care constituie partea originală din acest capitol.

5.1 Generalități privitoare la metodele de sumare

Considerăm mulţimea tuturor şirurilor reale:

$$\mathcal{S} = \{\sigma | \sigma = (s_n)_{n \geq 0}\}$$

pe care se pot defini noţiunile de adunare şi înmulţire cu un număr real. Datorită acestui fapt, $\mathcal{S}$ poate fi privit ca un spaţiu vectorial.

În continuare, un şir $(s_n)_{n \geq 0}$ se va nota $(s_n)_n$ sau, mai simplu, sub forma: (s_n).

Definiția 5.1.1. *Se numeşte transformare o aplicaţie T definită pe o submulţime $T(F)$ al lui $\mathcal{S}$ care duce un element $\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ într-un element din $\mathcal{S}$, notat $T\sigma$.*

Definiția 5.1.2. *Fie $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{\sigma \in \mathcal{S} | \mathcal{T}\sigma$ există$\}$. Transformarea T se numeşte liniară dacă următoarele relaţii sunt adevărate:*

$$T(\sigma + \tau) = T\sigma + T\tau, \quad T(\alpha \cdot \sigma) = \alpha \cdot T\sigma \quad \sigma, \tau \in \mathcal{S},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Introducem următoarele notaţii:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c &= \{\sigma \in \mathcal{S} | \sigma \text{ converge}\}. \\ \mathcal{F}(\mathcal{T}) &= \{\sigma \in \mathcal{F}(\mathcal{T}) | \mathcal{T}\sigma \in \mathcal{S}\}; \end{aligned}$$

Considerăm, apoi, aplicaţia:

$$\lim : \mathcal{S}_c \to \mathbb{R},$$

operatorul care ataşează unui şir convergent, limita sa. De asemenea, notăm cu:

$$T - \lim : F_c(T) \to \mathbb{R},$$

operatorul generalizat care ataşează limita unui şir din spaţiul $F_c(T)$, definit prin:

$$T - \lim = \lim \circ T.$$

Definiția 5.1.3. *Cu notaţiile anterioare şi (s_n) avem:*

$$T - \lim((s_n)) = \lim_{n \to \infty} (t_n), \tag{5.1}$$

unde $(t_n) = T((s_n))$.

Atunci, în caz că există, $T - \lim$ se numeşte limita generalizată indusă de transformarea T.

Definiția 5.1.4. *O transformare se numeşte regulată dacă transformă şirurile convergente în şiruri convergente cu aceeaşi limită.*

În continuare, considerăm transformări generate de matrici, numite transformări matriciale.

Fie matricea:

$$A = (a_{nm}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Considerăm transformarea $T_A : \mathcal{F}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{S}$ care asociază unui şir (s_n) pe (t_n) definit astfel:

$$t_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} s_m, \quad n \geq 0, \tag{5.2}$$

unde $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ este format din acele șiruri (s_n) pentru care seriile de mai sus sunt convergente pentru orice n.

Definiția 5.1.5. *Fie matricea $A = (a_{nm})$. Dacă transformarea T_A este regulată, matricea A se numeşte regulată.*

Teorema 5.1.1. *(Petersen, [54]) Fie matricea $A = (a_{nm})$. Avem*

a) $(T_A)\sigma$ există pentru orice şir mărginit σ, dacă şi numai dacă:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \text{ converge pentru orice } n.$$

b) $(T_A)\sigma$ există pentru orice şir mărginit σ, dacă şi numai dacă $(T_A)\sigma$ există pentru orice şir σ care este convergent la 0.

Teorema 5.1.2. *(Petersen, [54]) O condiţie necesară şi suficientă pentru ca matricea $A = (a_{nm})$ să transforme orice şir mărginit într-un şir mărginit este să $\exists k$ astfel încât:*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \leq k \text{ pentru orice } n.$$

În continuare, ne ocupăm de condiţiile satisfăcute de o matrice regulată.

Teorema 5.1.3. *(Petersen, [54]) [Teorema Schur] Matricea (a_{nm}) este regulată dacă şi numai dacă:*

(i) $\exists K$ *astfel încât:* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < K, \quad \forall n;$

(ii) $\forall m, \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_{nm} = 0;$

(iii) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{nm} = 1.$

Definiția 5.1.6. *Se numeşte matrice Schur o matrice care transformă orice şir mărginit într-un şir convergent.*

Teorema 5.1.4. *(Petersen, [54]) Pentru ca o matrice $A=(a_{nm})$ să fie o matrice Schur, sunt necesare şi suficiente următoarele condiţii:*

(i) $(\exists)\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_{nm}, \forall m$;

(ii) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{nm}|$ *converge* $\forall n$ *şi convergenţa este uniformă în raport cu* n.

Corolar 5.1.1. *Dacă $A=(a_{nm})$ este regulată, există un şir mărginit care este transformat prin A într-un şir divergent.*

Corolar 5.1.2. *Matricea $A=(a_{nm})$ face să conveargă spre 0 toate şirurile mărginite dacă şi numai dacă $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{nm}|$ converge $\forall n$ şi*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|a_{nm}|=0. \tag{5.3}$$

O clasă importantă de matrici este clasa matricilor Toeplitz.

Definiția 5.1.7. *O matrice*

$$A=(a_{nm})_{n,m\geq 0},$$

se numeşte matrice Toeplitz dacă este triunghiular inferioară, adică are proprietatea $a_{nm}=0$ dacă $m>n$.

In cazul matricilor Toeplitz, Teorema 5.1.1 nu mai este necesară, deoarece pentru orice matrice Toeplitz A şi pentru orice şir σ, $(T_A)\sigma$ există.

De asemenea, în cazul matricilor Toeplitz, limita generalizată de șiruri se scrie mai simplu prin:

$$A-\lim_{n\to\infty}s_n:=\lim_{n\to\infty}t_n, \tag{5.4}$$

unde

$$t_n=\sum_{m=0}^{n}a_{n,m}s_m,\ n\geq 0. \tag{5.5}$$

Definiția 5.1.8. *Două metode matriciale A şi B se numesc consistente dacă pentru orice şir (s_n) care este făcut convergent prin ambele metode, limitele sunt egale:*

$$A-\lim s_n=B-\lim s_n.$$

Definiția 5.1.9. *O familie $\mathcal{T}$ de metode care transformă şirurile mărginte în şiruri mărginite se numeşte consistentă dacă oricare două metode din $\mathcal{T}$ sunt consistente.*

Definiția 5.1.10. *Fiind date două metode care transformă şirurile mărginte în şiruri mărginite T_1 şi T_2, dacă orice şir T_2-convergent este convergent cu și prin transformarea T_1 şi cu aceaşi limită, spunem că T_1 este mai puternică decât T_2 şi notăm: $T_1 \supseteq T_2$.*

Definiția 5.1.11. *Fie A şi B două matrici. Spunem că A este mai puternică decât B, dacă transformarea T_A este mai puternică decât transformarea T_B.*

Teorema 5.1.5. *(Petersen, [54]) Metoda T_A este mai puternică decât metoda T_B dacă şi numai dacă metoda $T_{A \cdot B^{-1}}$ este regulată.*

Definiția 5.1.12. *Fie două familii de metode care transformă şirurile mărginte în şiruri mărginite $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$. Spunem că familia $\mathcal{T}_1$ este mai puternică decât familia $\mathcal{T}_2$ dacă pentru orice şir (s_n) care este făcut convergent de una dintre metodele $T_2 \in \mathcal{T}_2$, există o metodă $T_1 \in \mathcal{T}_1$ care transformă şirul (s_n) într-un şir convergent astfel încât:*

$$T_1 - \lim s_n = T_2 - \lim s_n.$$

Scriem atunci:

$$\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2.$$

Definiția 5.1.13. *Familia de matrice $\mathcal{A}$ este mai puternică decât familia de matrice $\mathcal{B}$ dacă familia de metode asociată lui $\mathcal{A}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ este mai puternică decât famiia de metode asociată lui $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.*

Spunem că metoda dată de

$$t_n = \frac{s_0 + \ldots + s_n}{n+1}$$

se numeşte Metoda Cesàro de ordinul I.

Teorema 5.1.6. *(Petersen, [54]) Metoda Cesàro este o metodă regulată.*

Pentru metoda Cesàro de ordin superior, considerăm şirul $(s_n)_{n \geq 0}$. Definim sumele de ordin superior astfel:

$$s_n^1 = s_0 + \cdots + s_n, n \geq 0, \tag{5.6}$$

$$s_n^{k+1} = s_0^k + \cdots + s_n^k, n \geq 0, k \geq 1.$$

Putem scrie:

$$s_n^k = \sum_{j=0}^{n} \sigma_{nj}^k s_j, n \geq 0, k \geq 1.$$

Se demonstrează prin inducţie după k următoarea formulă:

$$\sigma_{nj}^k = \binom{n+k-j-1}{k-1}. \tag{5.7}$$

Metoda lui Cesàro de ordin k este definită de matricea triunghiulară inferioară:

$$C^k = (c^k_{nm})_{n,m\geq 0}, k \geq 1, \tag{5.8}$$

unde

$$c^k_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^k_{nm}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \sigma^k_{nj}} & , \text{pentru } 0 \leq m \leq n, \\ \quad 0 & , \text{pentru } m > k. \end{cases} \tag{5.9}$$

Avem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \sigma^k_{nj} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k-j-1}{k-1} = \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n+k-j}{k} - \binom{n+k-j-1}{k} \right] = \\ &= \binom{n+k}{k} - \binom{k-1}{k} = \\ &= \binom{n+k}{k}. \end{aligned}$$

În final,

$$C^k = (c^k_{n,m})_{n,m}, \quad c^k_{n,m} = \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+k-m-1}{k-1}. \tag{5.10}$$

Deci, transformatul şirului (s_n) este şirul (t_n) definit astfel:

$$t_n = \sum_{m=0}^{n} c^k_{nm} s_m.$$

Teorema 5.1.7. *(Petersen, [54]) Matricea Cesàro de ordin k este regulată.*

Teorema 5.1.8. *(Petersen, [54]) Dacă $k_1 \leq k_2$, atunci metoda de sumare (C, k_2) este mai puternică decât metoda de sumare (C, k_1).*

5.2 Sumele parţiale Fourier-Jacobi modificate

Vom arăta că pentru sumele parţiale Fourier-Legendre şi Fourier-Jacobi se pot aplica transformări cu matrice de convergenţa Toeplitz, astfel încât operatorii rezultaţi să aibă proprietatea de aproximare uniformă a tuturor funcţiilor continue. Prin aceste modificări se corectează rezultatul negativ de convergenţă din teorema lui Lozinsky şi Harshiladze.

Aceste modificări sunt analoage modificării sumelor Fourier trigonometrice care conduc la operatorii lui Fejer, obţinuţi aplicând metoda de sumare Cesáro sumelelor parţiale Fourier.

Pe intervalul $[0,1]$ considerăm ponderea Jacobi $\rho(t) = t^a(1-t)^b, a > -1, b > -1$. Această pondere introduce produsul scalar pe $C([0,1])$, dat de:

$$< f, g >_{a,b}= \int_0^1 f(t)g(t)t^a(1-t)^b dt,\ f, g \in C([0,1]). \tag{5.11}$$

Notăm $p_n^{a,b}$ polinoamele ortogonale Jacobi de grad n atașate ponderii $\rho(t)$ care satisface ecuațiile $\langle p_n^{a,b}, p_m^{a,b}\rangle_{a,b} = \delta_{n,m}$. Seriile formale Fourier-Jacobi atașate funcției $f \in C([0,1])$ este:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, p_n^{a,b}\rangle_{a,b} \cdot p_n^{a,b}(x),\ x \in [0,1]. \tag{5.12}$$

Printr-o simplă translație, seria Fourier-Jacobi similară a funcției $f \in C([-1,1])$ poate fi construită înlocuind intervalul $[0,1]$ cu intervalul $[-1,1]$ și ponderea ρ, cu $\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$. Proprietățile celor două serii sunt similare.

Deoarece sumele parțiale de grad n ale seriei (5.12) sunt proiectori pe spațiile polinoamelor Π_n, din teorema Lozinschi-Harshiladze, seria (5.11) nu converge uniform la f pe intervalul $[0,1]$, pentru orice funcție $f \in C([0,1])$.

Pentru a extinde domeniul de convergență a seriei (5.12) putem aplica metode generalizate de sumare. Dacă $A = (a_{n,m})_{n,m}$ este o matrice Toeplitz, atunci aplicăm transformarea dată de matricea A sumelor parțiale ale seriei (5.12). Anume, dacă notăm cu (s_n) șirul sumelor parțiale, considerăm limita generalizată a acestora potrivit formulelor (5.4), (5.5).

Metoda de sumare $(C,1)$ aplicată șirului seriei parțiale Fourier conduce la operatorii Féjer, care conferă proprietatea de aproximare uniformă pentru toate funcțiile continue și periodice, în timp ce șirul seriei parțiale Fourier are doar proprietatea de aproximare punctuală.

În cazul seriei Jacobi, metodele de sumare au fost aplicate doar pentru a obține o convergență punctuală în capetele intervalului. De exemplu, în Szegő ([65]) este dat următorul rezultat:

Teorema 5.2.1. *(Szegő [65]) Fie $f(x)$ o funcție continuă pe $[-1,1]$. Dezvoltarea lui $f(x)$ în serie Jacobi cu ponderea $\rho(x) = (1-x)^a(1+x)^b$, $a, b > -1$, $x \in [-1,1]$ este $(C,k)-$sumabilă în $x = 1$ dacă $k > a + \frac{1}{2}$. În general, nu este adevărat dacă $k = a + \frac{1}{2}$. În mod analog, aceasta are loc pentru $x = -1$, a fiind înlocuit cu b.*

Mai recent, problema sumabilității Nörlund pentru seria Jacobi a unei funcții $f \in C([-1,1])$ dar tot numai punctual în capetele intervalului $[-1,1]$ a fost studiată în: Gupta ([30]), Thorpe ([67]), Singh ([58]) și Chandra ([19]).

În această secțiune, evidențiem faptul că există o metodă de sumare care permite însumarea uniformă a seriei Jacobi-Fourier pentru toate funcțiile continue. Metoda se bazează pe reducerea problemei de însumare a seriei parțiale Jacobi-Fourier la problema convergenței uniforme a șirului operatorilor Durrmeyer cu ponderea Jacobi. Rezultatul principal constă în demonstrarea faptului că această metodă este mai puternică decât toate metodele Cesáro de orice ordin.

Folosim convenția că $\binom{p}{r} = 0$, dacă $p, r \in \mathbb{Z}$ și condiția $0 \leq r \leq p$ nu este satisfăcută. Notăm $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ și $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Operatorii Durrmeyer cu pondere Jacobi $\rho(t) = t^a(1-t)^b, a > -1, b > -1$ au fost introduși, mai întâi, în [50], apoi studiați în multe alte lucrări (vezi [51], [12] sau [53]) și sunt definiți astfel:

$$\begin{aligned} M_n^{a,b}(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{< p_{n,k}, f >_{a,b}}{< p_{n,k}, e_0 >_{a,b}} p_{n,k}(x), \\ &= (a+b+n+1) \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 f(t) p_{n,k}(f) t^a (1-t)^b dt \right) p_{n,k}(x), \end{aligned}$$

unde $f \in L([0,1]),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}, a > -1, b > -1$ și $< \varphi, \psi >_{a,b},\ \varphi, \psi \in L([0,1])$.

În cazul particular $a = 0, b = 0$, acești operatori devin operatorii Durrmeyer, întroduși în [25] și în mod independent, în [39].

Operatorii $M_n^{a,b}$ sunt liniari și pozitivi. O proprietate de bază a operatorilor aceștia este dată în teorema următoare.

Teorema 5.2.2. *(Păltănea, [50]) Pentru orice $f \in C([0,1])$, avem:*

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{a,b}(f)(x) = f(x),\ \textit{uniform pentru}\ x \in [0,1]. \tag{5.13}$$

Operatorii $M_n^{a,b}(f)(x)$ pot fi reprezentați și sub formă de sume parțiale Fourier modificate în raport cu produsul scalar definit anterior.

Acest lucru a fost descoperit de către Dierrennic în cazul $a = 0,\ b = 0$, în lucrarea [24] și a fost extins pentru cazul general $a > -1,\ b > -1$ în lucrarea [50]. Această reprezentare descrie complet structura spectrală a acestor operatori. Avem:

Teorema 5.2.3. *(Păltănea, [50]) Operatorii $M_n^{a,b}$ admit o reprezentare în forma:*

$$M_n^{a,b}(f)(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{n,m}^{a,b} \langle f, p_m^{a,b} \rangle_{a,b} p_m^{a,b}(x),\ f \in L([0,1]),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.14}$$

unde $p_m^{a,b}$ sunt polinoamele Jacobi, normate de condiția $< p_m^{a,b}, p_m^{a,b} >_{a,b} = 1$ și

$$\lambda_{n,m}^{a,b} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2+a+b)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(n+m+2+a+b)},\ 0 \leq m \leq n, \tag{5.15}$$

Γ fiind funcția Gamma.

Pentru $a > -1$, $b > -1$, considerăm matricea infinită $\Gamma^{a,b} = (\gamma_{n,m}^{a,b})_{n,m}$, unde

$$\gamma_{n,m}^{a,b} = \begin{cases} \frac{n!\Gamma(n+2+a+b)(2m+2+a+b)}{(n-m)!\Gamma(n+m+3+a+b)}, & 0 \leq m \leq n \\ 0, & m > n \geq 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Notăm cu $\Gamma^{a,b} - \lim_{n\to\infty} a_n$, limita generalizată a șirului $(a_n)_n$ în funcție de metoda dată de $\Gamma^{a,b}$ și de $\Gamma^{a,b} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, suma generalizată a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, cu metoda de sumare dată de $\Gamma^{a,b}$.

Rezultatul fundamental pe care dorim să îl evidențiem este că reprezentarea operatorilor $M_n^{a,b}$ dată în formulele (5.14), (5.15) poate fi interpretată ca rezultatul aplicării transformării dată de matricea $\Gamma^{a,b}$ șirului sumelor parțiale ale seriei (5.12). Astfel, avem:

Teorema 5.2.4. *[42] Șirul operatorilor $(M_n^{ab})_{n\geq 0}$ poate fi scris în forma:*

$$M_n^{a,b}(f)(x) = \sum_{m=0}^{n} \gamma_{n,m}^{a,b} S_m^{a,b}(f)(x),\ f \in L([0,1]),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.17}$$

unde

$$S_m^{a,b}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \langle f, p_k^{a,b}\rangle_{a,b} p_k^{a,b}(x). \tag{5.18}$$

Primul rezultat principal este următoarea teoremă.

Teorema 5.2.5. *[42] Pentru orice $f \in C([0,1])$, $a > -1$, $b > -1$ avem:*

$$\Gamma^{a,b} - \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, p_k^{a,b}\rangle_{a,b} p_k^{a,b}(x) = f(x),\ x \in [0,1] \tag{5.19}$$

și convergența seriei este uniformă în funcție de x.

Observaţia 5.2.1. Din teorema precedentă, concluzionăm că matricea regulată $\Gamma^{a,b}$ realizează sumarea seriei (5.12).

5.3 Comparația noii metode de sumare cu metodele Césaro

Lema 5.3.1. *[42] Fie $k \in \mathbb{N}$. Inversa matricii C^k definită în (5.10) este matricea $D^k := (C^k)^{-1}$, $D^k = (d_{n,m}^k)_{n,m}$, unde*

$$d_{n,m}^k = \begin{cases} (-1)^{n+m}\binom{m+k}{k}\binom{k}{n-m}, & n-k \leq m \leq n, \\ 0, & 0 \leq m < n-k \text{ sau } m > n. \end{cases} \tag{5.20}$$

Notăm

$$\alpha_{n,m}^c := \frac{n!\Gamma(n+c)}{(n-m)!\Gamma(n+m+c)}, \quad c \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq m \leq n. \tag{5.21}$$

Observăm că:

$$\lambda_{n,m}^{a,b} = \alpha_{n,m}^{c},\ \text{pentru } 0 \le m \le n,\ \text{dacă } c = a + b + 2,\ a > -1,\ b > -1. \tag{5.22}$$

De asemenea,

$$\alpha_{n,m}^{c} \le \alpha_{n,m}^{0} = \frac{n!(n-1)!}{(n-m)!(n+m-1)!},\ 0 \le m \le n,\ n \ge 1,\ c \ge 0. \tag{5.23}$$

Într-adevăr, avem:

$$\frac{\alpha_{n,m}^{c}}{\alpha_{n,m}^{0}} = \frac{\Gamma(n+c)\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(n+m+c)} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{n+j}{n+c+j} \le 1.$$

Pentru $c \ge 0$, $p \in N_0$, $n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le m \le n - p$ stabilim:

$$U_{n,m}^{c,p} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \alpha_{n,m+i}^{c}. \tag{5.24}$$

Lema 5.3.2. *[42] Fie $p \in \mathbb{N}_0$, $c \ge 0$.*

i) Există coeficienții reali $d_{2p,i}$, $0 \le i \le p$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $m \in \mathbb{N}_0$, $0 \le m \le n - 2p$, are loc:

$$|U_{n,m}^{c,2p}| \le \sum_{i=0}^{p} d_{2p,i} \frac{(m+c+2p)^{2i}}{n^{p+i}} \cdot \alpha_{n,m}^{0}. \tag{5.25}$$

ii) Există coeficienții reali $d_{2p+1,i}$, $0 \le i \le p$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $m \in \mathbb{N}_0$, $0 \le m \le n - 2p - 1$, are loc:

$$|U_{n,m}^{c,2p+1}| \le \sum_{i=0}^{p} d_{2p+1,i} \frac{(m+c+2p+1)^{2i+1}}{n^{p+1+i}} \cdot \alpha_{n,m}^{0}. \tag{5.26}$$

Corolar 5.3.1. *[42] Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ și $c \ge 0$ avem:*

$$|U_{n,m}^{c,p}| \le C_{c,p}^{1} \max\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p, \left(\frac{m+k}{n}\right)^p \right\} \alpha_{n,m}^{0},\ 0 \le m \le n, \tag{5.27}$$

unde

$$C_{c,p}^{1} = \left(\max\left\{1, \frac{c+p}{k}\right\}\right)^p \sum_{i=0}^{[\frac{p}{2}]} d_{p,i}. \tag{5.28}$$

Lema 5.3.3. *[42] Pentru numere reale $k \ge 1$ și $p \ge 1$, există o constantă $C_{k,p}^{2}$ astfel încât*

$$E_{k,p}(n,m) := \left(\frac{(m+k)^2}{n}\right)^p \alpha_{n,m}^{0} \le C_{k,p}^{2}, \tag{5.29}$$

pentru toate numerele întregi $0 \le m \le n$.

Corolar 5.3.2. *[42]*

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ *și orice număr real* $c \ge 0$ *există o constantă* $C^3_{k,c}$ *astfel încât:*

$$\binom{m+k}{k} |U^{c,k+1}_{n,m}| \le C^3_{c,k}, \text{ pentru toți întregii } 0 \le m \le n. \tag{5.30}$$

Lema 5.3.4. *[42] Pentru orice numere întregi* $k \ge 1$, $0 \le m \le n-k+1$ *și numere reale* $a > -1$, $b > -1$, *notăm* $c = a + b + 2$ *și avem:*

$$\sum_{\mu=m}^{m+k-1} \sum_{i=0}^{m+k-1-\mu} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{\mu+k}{k} \gamma^{a,b}_{n,\mu+i} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m+k}{k-j} U^{c,k-j}_{n,m+j}. \tag{5.31}$$

Corolar 5.3.3. *[42] Pentru orice număr întreg* $k \ge 1$ *și orice numere* $a > -1$, $b > -1$, *notând* $c = a + b + 2$, *există o constantă* $C^4_{c,k}$ *astfel încât avem:*

$$\left| \sum_{\mu=m}^{m+k-1} \sum_{i=0}^{m+k-1-\mu} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{\mu+k}{k} \gamma^{a,b}_{n,\mu+i} \right| \le C^4_{c,k} \tag{5.32}$$

oricare ar fi numerele întregi m, n *astfel încât* $0 \le m \le n - k + 1$.

Rezultatul central al acestei secțiuni este dat de teorema următoare.

Teorema 5.3.1. *[42] Metoda de sumare dată de matricea* $\Gamma^{a,b}$, *cu* $a > -1$, $b > -1$ *este mai puternică decât toate metodele Césaro* (C, k), $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$.

Bibliografie

[1] U. Abel, B. Della Vecchia: *Asymptotic approximation by the operators of K. Balázs and Szabados*, Acta Sci. Math. **66(12)**: 137-145, (2000).

[2] G. Adilov, A. M. Rubinov: *B-convex sets and functions*, Numer. Funct. Anal. Optim., **27**, no. 3-4, 237-257, (2006).

[3] G. Adilov, I. Yesilce: *Some important properties of B-convex function*, J. Nonlinear Convex Anal., **19**, no. 4, 669–680, (2018).

[4] O. Agratini: *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, (2000).

[5] O. Agratini: *An approximation process of Kantorovich type*, Miskolc Math. Notes, Vol. 2., no. 1: 13-10, (2001).

[6] O. Agratini: *On a class of Bernstein-type rational functions*, Numer. Funct. Anal. Optim., Vol. 41, no. 4: 483-494, (2020).

[7] F. Altomare: *Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators*, Surv. Approx. Theory, Vol. 5: 92-164, (2010).

[8] K. Balázs: *Approximation by Bernstein type rational functions*, Acta Math. Hungar., **26**: 123-134, (1975).

[9] C. Balázs, J. Szabados: *Approximation by Bernstein type rational functions II*, Acta Math. Hungar., **40**: 331-337, (1982).

[10] K. Balázs: *Approximation by Bernstein type rational functions on the real axis*, Acta Math. Hungar., **46**: 195-204, (1985).

[11] H. Berens, G. G. Lorenz: *Inverse theorems for Bernstein polynomials*, Indiana Univ. Math. J. **21**, 693-708, (1972).

[12] H. Berens, Y.Xu: *On Bernstein-Durrmeyer polynomials with Jacobi weights*, Approximation Theory and Functional Analysis (C. K. Chui, Ed.), Academic Press, Boston, 25-46, (1991).

[13] S. N. Bernstein: *Démonstration du Théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des Probabilités*, Kharkov Mathematical Society **2**, Series XIII, no. 1, 1-2, (1912).

[14] H. Bohman: *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2**, 43-56, (1952-1954).

[15] W. Briec, C. Horvath: *B-convexity*, Optimization, **53**, no. 2, 103-127, (2004).

[16] B. M. Brown, D. Elliot, D. F. Paget: *Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function*, J. Approx. Theory, **49**: 196-199, (1987).

[17] J. Bustamante: *Bernstein Operators and their Properties*, Springer International Publishing AG, (2017).

[18] P. L. Butzer, H. Berens: *Semi-groups of operators and approximation*, Springer, Berlin Heidelberg-New York, (1967).

[19] P. Chandra: *Absolute Nörlund Summability of Fourier-Jacobi series at frontier point*, The Journal of Indian Academy of Mathematics **6**, no. 2, 135-144, (1994).

[20] R. G. Cooke: *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, (1950).

[21] N. Deo, M. A. Noor, M. A. Siddiqui: *On approximation by a class of a new Bernstein type operators*, Appl. Math. Comput. **201**, 604-612, (2008).

[22] R. De Vore: *The approximation of continuous functions by positive linear operators*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).

[23] R. A. DeVore, G. G. Lorenz: *Constructive Approximation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1993).

[24] M. M. Derriennic: *Sur l'approximation de fonctions intégrables sur* $[0, 1]$ *par des polynômes de Bernstein modifiés*, J. Approx. Theory **31**, no. 4, 325-343, (1981).

[25] J. L. Durrmeyer: *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: applications à la théorie des moments*, Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences Université Paris, (1967).

[26] I. Gavrea, N. Ivan: *The Bernstein Voronovskaja-type theorem for positive linear approximation operators*, J. Approx. Theory, **192**, 291-296, (2015).

[27] H. Gonska, M. Heilmann, I. Raşa: *Kantorovich operators of order k*, Numer. Funct. Anal. Optim. **32**, no. 7, 717-738, (2011).

[28] H. Gonska, R. Păltănea: *Simultaneous approximation by a class of Bernstein-Durrmeyer operators preserving linear functions*, Czechoslovak Math. J. **60 (135)**, 783–799, (2010).

[29] H. Gonska, X.-L. Zhou: *Approximation theorems for the iterated Boolean sums of Bernstein operators*, J. Comput. Appl. Math. **53**, 21–31, (1994).

[30] D. P. Gupta: *On a local property of absolute summability for expansions of Fourier-Jacobi class*, Journal of London Mathematical Society, **4**, no. 2, 337-345, (1970).

[31] A. Holhoş: *On the Approximation by Balázs-Szabados Operators*, Mathematics, **9(14)**: 1588, (2021).

[32] H. Johnen: *Inequalities connected with moduli of smoothness*, Matematicki Vesnik, **9 (24)**, 289-303, (1972).

[33] I. Koźniewska: *The first absolute central moment for Pólya's distribution*, (Polish) Zastos. Mat. **1**, 206-211, (1954).

[34] P. P. Korovkin: *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, (Russian) Doklady Akademii Nauk, 961-964, (1953).

[35] P. P. Korovkin: *Linear operators and the theory of approximation* (Russian), Fizmatgiz, Moscova, (1959).

[36] T. Lindvall: *Bernstein polynomials and the law of large numbers*, Math.Scientist, Vol.7, 127-139, (1982).

[37] G. G. Lorenz: *Inequalities and the saturation classes of Bernstein polynomials*, In: On approximation theory, (ed. by P.L. Butzer et al.) Birkhäuser, Basel, 200-207, (1964).

[38] G. G. Lorenz: *Bernstein Polynomials*, Toronto Univ. Press, (1953), 2nd edition Chelsea Publishing Company, New York, (1986).

[39] A. Lupaş: *" Die Folge der Betaoperatoren," Dissertation*, Universitat Stuttgart, (1972).

[40] **A. D. Meleșteu**: *Voronovskaja theorem for combination of Beta operators*, Bull. Transilv. Univ. Brașov Ser. III. Math. Comput. Sci., **11(60)**, no. 2, 181-186, (2018).

[41] **A. D. Meleșteu**: *Generalized Bernstein type operators*, Bull. Transilv. Univ. Brașov Ser. III. Math. Comput. Sci. **13(62)**, no. 2, 649-660, (2020).

[42] **A. D. Meleșteu**, R. Păltănea: *On a Method for Uniform Summation of the Fourier-Jacobi Series*, Results Math., **77(153)**, (2022).

[43] **A. D. Meleșteu**: *About the B-concavity of functions with many variables*, An. Științ. Univ. "Ovidius" Constanța Ser. Mat., 31(1), 199–206, (2023).

[44] **A. D. Meleșteu**, M. N. Pascu, N. R. Pascu: *Convex Ordering of Pòlya Random Variables and Approximation Monotonicity of Bernstein–Stancu Operators*, Results Math., **78(32)**, (2023).

[45] **A. D. Meleșteu**, M. Talpău Dimitriu: *A Stancu type generalization of the Balázs operator*, Dolomites Res. Notes Approx., Vol. 17, no. 2, 44-51, (2024).

[46] **A. D. Meleșteu**: *A new property of Bernstein operators on simplex*- trimis spre publicare

[47] C. A. Micchelli: *The saturation class and iterates of the Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory **8**, 1–18, (1973).

[48] M. N. Pascu, N. R. Pascu, F. Tripşa: *A new Bernstein-Stancu type operator with negative parameter* Proceedings of the Romanian Academy (Series A) **20**, no. 1, 19-28, (2019).

[49] M. N. Pascu, N. R. Pascu, F. Tripşa: *An error estimate for a Bernstein-Stancu operator with negative parameter* Results Math. **74**, no. 1, art. 39, **11**, (2019).

[50] R. Păltănea: *Sur un operateur polynomial défini sur lénsemble des fonctions intégrables,* Babeş Bolyai University, Faculty of Mathematics, Research Seminar **2**, 101-106, (1983).

[51] R. Păltănea: *Une propriété d'extremalité des valeurs propres des opérateurs polynômiaux de Durrmeier généralisés*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, Romanian Academy, **15**, no. 1, 57-64, (1986).

[52] R. Păltănea: *The preservation of the property of quasiconvexity of higher order by Bernstein's operators*, Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l' Approximation, **25**, no. 1-2, 195-201, (1996).

[53] R. Păltănea: *Approximation theory using positive linear operators*, Ed. Birkhauser, Boston, (2004).

[54] G. M. Petersen: *Regular matrix transformations* , McGraw-Hill, (1966).

[55] T. Popoviciu: *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur*, Mathematica (Cluj) **10**, 49-54, (1935).

[56] T. Popoviciu: *On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials*, East Journal on Approximations, **4(107–110)**, pp. 1–4, (1998).

[57] M. J. D. Powell: *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, (1994).

[58] L. B. Singh: *On absolute summability of Fourier-Jacobi series*, An. Univ. Vest Timișoara Ser. Mat.-Inform., Vol. XXII, fasc. 1-2, (1984).

[59] M. Shaked, J. G. Shanthikumar: *Stochastic orders. Springer Series in Statistics*, Springer, New York, (2007).

[60] O. Shisha, B. Mond: *The Degree of Convergence of Sequences of Linear Positive Operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **60** 1196–1200, (1968).

[61] D. D. Stancu: *On a new positive linear polynomial operator* Proc. Japan Acad. **44**, 221-224, (1968).

[62] D. D. Stancu: *On a generalization of the Bernstein polynomials* Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Phys. **14**, no. 2, 31-45, (1969).

[63] D. D. Stancu: *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators* Numerische Methoden der Approximationstheorie, Proc. Conf. Oberwolfach 1971, ISNM **16**, 187-203. Birkhäuser, Verlag, Basel, (1972).

[64] D. D. Stancu, *A note on a multiparameter Bernstein-type approximating operator*, Mathematica (Cluj), **26(49)**, no. 2: 153-157, (1984).

[65] G.Szegő: *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XXIII, (1939)

[66] M. Talpău Dimitriu: *Preservation of Lipschitz constants by some generalized Baskakov and Szasz-Mirakyan operators*, Bull. Univ. Transilvania Brașov, Ser III. **1(63)**, no. 1, 241-246, (2021).

[67] B. Thorpe: *Nörlund summability of Jacobi and Laguerre series*, J. Reine Angew. Math., **276**, 137-141, (1975).

[68] V. Totik: *Saturation for Bernstein type rational functions*, Acta Math. Hungar., **43**, 219-250, (1984).

[69] T. Tunc, M. Uzun: *On the preservation of the B-Convexity and B-Concavity of functions by Bernstein Operators*, Journal of Contemporary Applied Mathematics, **10**, no.2, 77-83, (2020).

[70] F. Tripşa, N. R. Pascu: *Stochastic ordering of Pólya random variables and monotonicity of the Bernstein-Stancu operator for a negative parameter* J. Inequal. Appl. **10**, (2019).

[71] R. Upreti: *Approximation properties of Beta operators*, J. Approx. Theory **45**, 84-89, (1985).

[72] E. Voronovskaja: *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de Bernstein*, C. R. Acad. Sci. URSS, 79–85, (1932).

[73] D-X. Zhou: *On a problem of Gonska*, Results Math. Vol. 28, 169-183, (1995).