Universitatea Transilvania din Brașov

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea: INGINERIE MECANICĂ

Ing. Eliza O. CHIRCAN

Contribuții la studiul sistemelor mecanice tehnice cu două grade de libertate

Contributions to the study of techincal mechanical systems with two degrees of freedom

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător ştiințific

Prof.dr.ing. Maria Luminița SCUTARU

BRAȘOV, 2020

D-lui (D-nei) ....

COMPONENȚA

Comisiei de doctorat

Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Braşov
Nr. .... din ....

PREŞEDINTE:	
Prof.hab.dr.ing. Călin Ioan ROȘCA	Decan Facultatea de Inginerie Mecanică Universitatea Transilvania din Braşov
CONDUCĂTOR ŞTIINȚIFIC:	
Prof.hab.dr.ing. Maria Luminița SCUTARU	Universitatea Transilvania din Braşov
REFERENȚI:	
Prof.hab.mat.dr.ing.Sorin VLASE	Universitatea Transilvania din Braşov
Prof.hab.dr.ing. Iuliu NEGREAN	Universitatea Tehnică din Cluj – Napoca
Prof.hab.dr.ing. Nicolae Doru STĂNESCU	Universitatea din Pitești

Data, ora şi locul susținerii publice a tezei de doctorat: ...., ora ....., sala ....

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa chircan.eliza@unitbv.ro

Totodată, vă invităm să luați parte la şedința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim.

CUPRINS (lb. română)

CONTENT

INTRODUCERE

În prezent, dezvoltarea tehnologică se bazează pe rapiditate de execuție și precizie de calcul. Pentru a facilita nevoile industriei s-a urmărit determinarea unor metode și modele de calcul pentru structuri mecanice ce cuprind elemente elastice aflate în mișcare. Aceste modele au fost analizate din punct de vedere al preciziei si al rapidității de realizare a calculelor, utilizând softuri moderne pentru a implementa ecuațiile obținute.

Tendința actuală sesizată în diferitele aplicații ale sistemelor multicorp (MBS) spre proiectarea și realizarea unor sisteme mai ieftine, mai ușoare, mai rapide, mai fiabile și mai precise. Unele dintre aplicațiile recente, care probabil vor necesita mai multă cercetare (MBS) pentru a îmbunătăți fidelitatea modelului și viteza de calcul, includ:

Manipulatoare și roboți de mare viteză, ușoare. În prezent manipulatorii sunt construiți din elemente rigide voluminoase și se mișcă cu viteze lente în raport cu cerințele. Acest lucru se face pentru a nu prezenta deformații sau vibrații prea mari. Noi materiale rezistente ușoare, actuatori piezo-elastici, senzori și sisteme de control pot conduce la realizarea unor manipulatoare cu greutati mici și cu viteze mari de lucru. Acest tip de instrumente pot fi utilizate într-o gama larga de aplicații ca ingineria fabricației, managementul deșeurilor nucleare și asamblarea rapidă a structurilor spațiale pe orbită.

Structuri spațiale ușoare detașabile, de înaltă precizie. Sunt necesare structuri spațiale de dimensiuni stabile și de înaltă precizie pentru noile telescoape optice sau radio, cu rezoluție înaltă și sensibilitate ridicată, precum și pentru sateliți de comunicare cu lățime de bandă foarte mare. Aceste structuri spațiale vor fi desfășurate pe orbită dintr-un pachet mic care se va deschide și va realiza configurația finală, de mari dimensiuni. Factori precum frecarea în articulații, amortizarea materialelor, încălzirea termică și presiunea radiației solare trebuie incluse în aceste modele.

Mecanisme de mare viteză, ușoare. Materialele noi și ușoare, cum ar fi compozitele avansate și ceramicele sunt fiind din ce în ce mai utilizate în motoarele de automobile, avioane și mașinile de producție. Flexibilitate acestor mecanisme va fi mai mare decât la mecanismele actuale și mai dificil de modelat din cauza neliniarității materialelor și a anisotropiei. În plus, modurile complexe de defectare a materialelor vor îngreunează, in prezent, predicția limitelor de funcționare.

Sisteme bio-dinamice. Aplicațiile tipice includ: chirurgie ortopedică pentru înlocuirea membrelor; analiza accidentelor auto; analiza mișcării pentru sportivi, animale și insecte.

Roboți. Industria de toate felurile manifesta un interes sporit de a dezvolta roboți autonomi inteligenți care pot îndeplini sarcini obositoare în locul oamenilor. Acești roboți trebuie să aibă o strategie de control eficientă care să le permită să meargă pe terenuri accidentate și să manipuleze, să prindă și să miște obiecte cu ajutorul brațelor și mâinilor. Este necesar ca acești roboți să fie, de asemenea, ușori și flexibili.

Controlul roboților, manipulatorilor și structurilor spațiale bazat pe modele active.

Sisteme micro și nano electromecanice (MEMS și NEMS). Aceste sisteme au multe aplicații în domeniul medical, electronic, industrial și aerospațial; ca urmare, au primit o atenție din ce în ce mai mare din partea cercetătorilor în ultimii ani. MEMS au dimensiuni cuprinse între câțiva milimetri și un micrometru, în timp ce dimensiunile NEMS variază de la dimensiunile submicronului până la nanometru/scară atomică. Există deja aplicații practice ale MEMS, cum ar fi accelerometrele care declanșează deschiderea airbag-urilor și NEMS, cum ar fi manipulatoarele de nanotuburi de carbon. De obicei, MEMS și NEMS implică cel puțin o componentă în mișcare acționată de un câmp electric și/ sau magnetic. MEMS pot fi modelate folosind tehnicile din mecanică. Pentru NEMS de dimensiuni atomice, efectele cuantice sunt importante și pot fi modelate folosind dinamica moleculară clasică sau teorii mai complexe din fizica nucleară. Multe MEMS și NEMS includ componente care au o mișcare rigidă mare a corpului în timp ce au loc deformațiii și vibrați. Prin urmare, multe dintre metodologiile de modelare dezvoltate pentru (MBS) pot fi adaptate la MEMS și NEMS.

Cuplarea experimentelor și simulărilor fizice. Costul și numărul testelor fizice ale (MBS), pot fi foarte mult reduse prin cuplarea experimentului fizic la procesul de simularea și proiectare. De exemplu, un test fizic poate fi efectuat pe un sistem de suspensie al automobilului, în timp ce restul vehiculului este simulat numeric. Prin utilizarea actuatoarelor și senzorilor se poate asigura legătura dintre testul fizic și simulare.

Interacțiune în timp real cu FMS virtual. În aplicațiile de realitate virtuală, utilizatorul interacționează cu un mediu inconjurator generat de computer. Interacțiunea poate varia de la manipularea obiectelor virtuale cu ajutorul mouse-ului și tastaturii, până la atingerea și manipularea obiectelor folosind mănuși haptice. Un simulator (MBS) în timp real poate fi folosit pentru a genera un feedback atât vizual cât și haptic, astfel încât obiectele virtuale să se comporte ca obiecte din lumea reală. Aplicațiile pot varia de la jocuri pe calculator 3D până la antrenamente pentru diferite activități.

Filme și jocuri pe calculator. Modelele (MBS) pot fi utilizate pentru a genera o animație vizuală realistă a mișcării și răspunsul în urma contactului/impactului cu diferite obiecte.

Scurtarea etapelor de calcul reprezintă un pas important în dezvoltarea industrială. Totodată, realizarea unor modele simple care să acopere o gamă variată de structuri mecanice reprezintă un avantaj pentru proiectanți. În cadrul tezei s-au urmărit aceste principii.

Teza conține următoarele capitole:

Capitolul 1. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRIILOR IN DOMENIU

În acest capitol se face o prezentare generală a metodelor cunoscute de obținere a ecuațiilor de mișcare pentru cazul elementelor de tip bară elastică, utilizând metoda elementelor finite. Capitolul își propune să dea o reprezentare sintetică a principalelor rezultate obținute în domeniu. Sunt analizate mai multe metode și teorii pentru a putea aleage varianta optimă de calcul pentru analiza făcută în lucrare.

Este tratată în amănunțime problema elemetului finit unidimensional, pentru care sunt efectuate toate calculele necesare pentru obținerea ecuațiilor de mișcare prezentate anterior.

Capitolul 2. OBIECTIVELE TEZEI

Capitolul prezintă obiectivul principal al tezei care constă în dezvoltarea metodelor de calcul, utilizând metoda elementelor finite, pentru sistemele multicorp cu elemente elastice cu aplicații în toate ramurile inginerești.

În cadrul acestui obiectiv general teza își propune următoarele obiective conexe:

- analiza unor tipuri de elemente finite existente in cadrul aplicatiilor inginerești;
- dezvoltarea unor noi tipuri de elemente finite pentru extinderea studiului la noi tipuri de structuri;
- determinarea proprietăților ecuațiilor de mișcare;
- validarea experimentală a rezultatelor prin realizarea unui stand cu un mecanism al unei pompe eoliene de apă pe care s-au făcut măsurători;
- formularea unor recomandări care să ajute proiectanții unor astfel de structuri să utilizeze rezultatele obținute în cadrul tezei.

Capitolul 3. APLICAȚIE. ROTAȚIA UNEI BARE ÎN JURUL UNEI AXE

În capitolul 3 sunt determinate ecuațiile de mișcare pentru un element finit unidimensional de tip bară, în mișcare de rotație în jurul unei axe. Sunt realizate calculele teoretice și este realizat programul de calcul în Matlab care este aplicat pentru câteva situații particulare. Au fost realizate comparații utilizând ecuații polinomiale de gradul III si gradul V. S-a variat numărul de elemente finite pentru a determina variația valorilor proprii pentru cele două cazuri de ecuații polinomiale.

Capitoul 4. UTILIZAREA ECUAȚIILOR LUI KANE PENTRU SCRIEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Desi metoda ecuațiilor lui Lagrange este principala metodă utilizată de cercetători pentru a studia sistemele multicorp cu elemente elastice, prezintă și dezavantajul necesității de a determina multiplicatorii Lagrange din sistemul de ecuații diferențiale obținut, lucru dificil de realizat pentru un sistem cu număr mare de grade de libertate. Aceasta procedură implică calcule numeroase și timpi de calculator mari. Prin comparație, metoda GA pare să elimine acest dezavantaj, dar introduce o nouă noțiune, energia accelerațiilor, cu care majoritatea cercetătorilor nu sunt familiarizați. O alternativă este metoda ecuațiilor lui Maggi, foarte utilă atunci când constrângerile sunt neolonome. Ultimii ani au indicat un interes al cercetătorilor față de această metodă, în contextul necesității de a studia sisteme complexe, cum ar fi roboți și manipulatori, aplicați în prezent la scară largă în industrie.. Metoda lui Kane, care este echivalentă cu metoda lui Maggi, a început să fie utilizată mai pe larg în ultimul deceniu, studii determinate și de industria de automatizare și de roboții industriali.

În acest capitol, formalismul Kane a fost aplicat pentru a determina răspunsul dinamic al unui sistem multicorp cu elemente elastice. Acest formalism a fost aplicat la calculul transmisiei unei pompe de apă acționată de vânt. Elementul finit ales a fost un element unidimensional în care au fost utilizate polinoame de interpolare de gradul al treilea și al cincilea. Se poate observa că ecuațiile lui Kane pot reprezenta o alternativă de succes în determinarea ecuațiilor de mișcare avand avantajul timpul redus de calcul necesar. Utilizarea acestor ecuații reprezintă o alternativă naturală pentru sistemele mecanice neolonome. În cazul sistemelor mari, cu un număr mare de elemente finite, se poate presupune că timpul de calcul câștigat va fi semnificativ. Ecuațiile lui Kane pot fi o alternativă economică și simplă la problemele studiate în teză. Metodele menționate și celelalte cunoscute din mecanica analitică vor fi reevaluate în contextul dezvoltării industriei moderne, caracterizate prin mecanisme de lucru cu viteze mari și sarcini mari și vor determina adaptarea software-ului comercial la acestea noi metode.

Capitolul 5. DINAMICA ELEMENTULUI FINIT BIDIMENSIONAL

În cadrul capitolului sunt tratate elementele finite bidimensionale plante, aflate în stare de membrană. Sunt analizate elemente de tip triunghiular, dreptunghiular și patrulater, fiind determinate ecuațiile aferente acestor tipuri de elemente(matricea maselor și cea de rigiditate).

Cu ajutorul soft-ului Matlab sunt determinate valorile proprii prin implementarea ecuațiilor determinate anterior și se determină influenta pe care o are dimensiunea elementului finit, determinată sub formă de raport.tudiul sistemelor multicorp

Sunt dezvoltate, pentru prima data, două noi tipuri de elemente finite bidimensionale, cu aplicație la studiul sistemelor multicorp.

Capitolul 6. MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE

Pentru a verifica teoria analizată în cadrul tezei a fost utilizat un mecanism cu două grade de libertate a unei pompe eoliene utilizate pentru scoaterea apei.

S-au făcut două tipuri de experimente:

- Utilizarea metodelor optice în vederea determinării accelerațiilor unor puncte situate pe mecanism. Acestea vor fi date de intrare pentru algoritmul propus.
- Măsurarea vibrațiilor proprii a structurii solicitate cu ajutorul unui ciocan de impact, datele fiind preluate cu ajutorul unui set de accelerometre situate pe suprafața barei studiate.

Capitolul 7. CONTRIBUȚIILE AUTORULUI, CONCLUZII, DISEMINAREA REZULTATELOR, PERSPECTIVE DE DEZVOLTARE A CERCETĂRII

Metodele elaborate în cadrul tezei sunt aplicabile pentru diferite structuri, facilitând etapele de lucru pentru obținerea unor astfel de sisteme mecanice.

Teza s-a ocupat în principal de următoarele aspecte:

- analiza comparativă a unor elemente finite
- dezvoltarea de noi tipuri de elemente finite;
- determinarea proprietăților pe care le au ecuațiilor de mișcare pentru elementele finite analizate;
- realizarea calculelor pentru cateva cazuri concrete de elemente finite;
- validarea experimentală a rezultatelor prin realizarea unui stand cu un mecanism al unei pompe eoliene de apă pe care s-au făcut măsurători;
- pe baza rezultatelor obținute se pot formula recomandări care să ajute proiectanții unor astfel de structuri să utilizeze rezultatele obținute în cadrul tezei.

Toate contribuțiile autoarei precum și posibilitățile de dezvoltare ulterioară ale temei au fost prezentate în cadrul acestui capitol. S-au prezentat si rezultatele diseminate, concretizate în publicarea a cinci articole indexate Web of Science, patru prezentări la conferințe indexate WoS si 5 articole publicate cu alte ocazii.

1. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRIILOR IN DOMENIU

1.1. Mişcările transversale ale barelor elastice

1.1.1. Ecuații cinematice şi relații constitutive

În cele ce urmează se va face o prezentare clasică, bazată în principal pe [23] [29] [34] [35] a teoriei barei elastice. Se consideră deci o bară elastică dreaptă, de lungime *l* și de secțiune *A.* (Fig.1.1). Se atașează barei un sistem de coordonate Oxy, axa Ox fiind de-a lungul barei, iar Oy perpendiculară pe ea. Dacă ne interesează și punctele care nu sunt pe axa geometrică a barei, utilizând relațiile cinematice ale lui Kirchhoff [xxx] expresiile pentru deplăsări sunt:

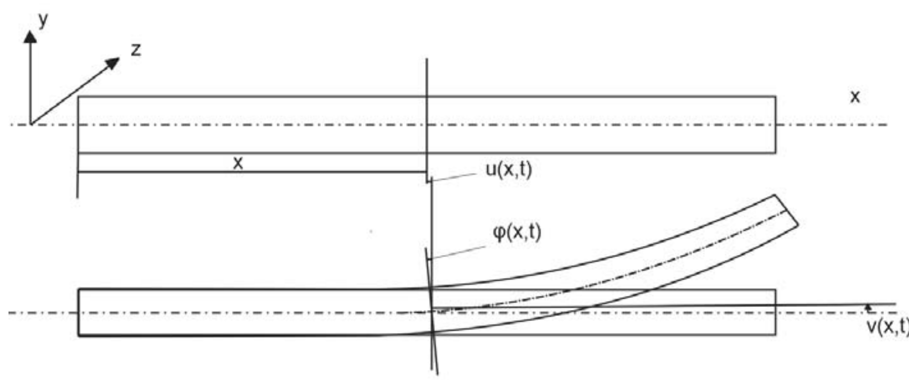


Figura 1.1

$$u_x(x,y,t)=u(x,t)-y\varphi(x,t) \tag{1.1}$$

$$u_y(x,y,t)\cong v(x,t) \tag{1.2}$$

Se notează deformațiile specifice, a unui punct curent și a unui punct de pe axa barei:

$$\varepsilon_{xx}(x,y,t)=\frac{\partial u_x}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Dacă se înlocuiesc în relațiile de mai sus u_x și u, rezultă:

$$\varepsilon_{xx}(x,y,t)=\varepsilon(x,t)-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{1.4}$$

La acest nivel de modelare se neglijează, pentru bara luată în considerare, efectul coeficientului lui Poisson. Tensiunile axiale sunt legate de deformații prin intermediul binecunoscutei legi a lui Hooke:

$$\sigma(x,y,t)=E(x)\varepsilon_{xx}(x,y,t)\ . \tag{1.5}$$

1.1.2. Cinetica elementelor

Să considerăm o grindă în care apar tensiuni normale şi tensiuni tangențiale. Se iau în considerare translația în direcție transversală şi rotația elementului. În calculele de mai jos se ia în considerare un element foarte mic de bară unidimensional. Analiza echilibrul dinamic al elementului permite scrierea legii a doua lege a lui Newton sub forma:

$$q(x,t)dx-\left[Q(x,t)+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right]+Q(x,t)=m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx\,, \qquad (1.14)$$

m(x) este densitatea lineară a barei. De aici rezultă:

$$q(x,t)-\frac{\partial Q}{\partial x}=m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\;. \qquad (1.15)$$

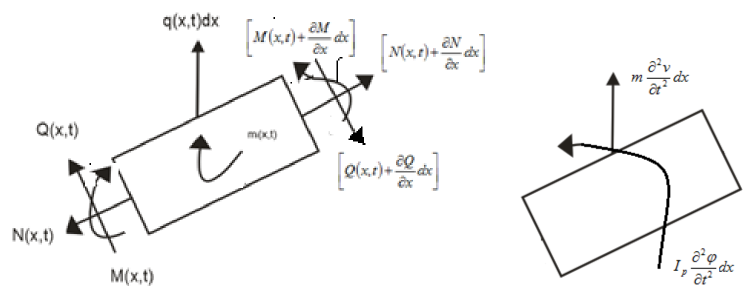


Figura 1.2

Se va obține:

$$q(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_p(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial m_i(x,t)}{\partial x}=m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\;. \qquad (1.21)$$

1.1.3. Teoria barelor Euler-Bernoulli

În această teorie nu se ia în considerare efectul inerției. Adică se va presupune faptul că distribuția masei este concentrată în lungul axei neutre. În acest model deformațiile produse de eforturile transversale nu sunt incluse. Aceste ipoteze se pot face deoarece bara este subțire şi lungimile de undă ale modurilor proprii sunt suficient de mari în comparație cu grosimea barei.

a) Condiții cinematice şi ecuatii de mişcare

Pentru deplasări mici, unghiul de rotire (tangent) al axei neutre poate fi aproximat cu tangenta. Astfel, vom avea:

$$\varphi(x,t)=\frac{\partial v}{\partial x}\;;\;\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\;;\;M(x,t)=-E(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}I_z\;;\;\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\cong\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\;;$$

$$Q(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)I_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+m_i(x,t)\,.$$

Dacă înlocuim în ultima relație obținută la punctul anterior şi considerăm $I_p=0$ se obține ecuația barei Euler-Bernoulli:

$$q(x,t)-\frac{\partial m_i(x,t)}{\partial x}=m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I_z(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

b) Condiții inițiale şi de contur:

Se vor scrie condițiile la limită pentru capătul stâng al barei. Forța tăietoare și momentul sunt considerate cunoscute în capătul din stânga:

$$Q(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x) I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m_i(x,t) \Bigg|_{x=0} = Q(0,t) = Q_0(t) \quad .$$

$$M(0,t) = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} = M_0(t)$$

Sageata in capatul din stanga a barei este

$$v(0,t) = v_0(t)$$

iar rotația:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Bigg|_{x=0} = \varphi_0(t)$$

unde $Q_0(t), M_0(t), v_0(t), \varphi_0(t)$ reprezintă funcții predefinite.

c) Operatorii masă şi rigiditate

Pentru a putea scrie ecuațiile de mişcare Euler-Bernoulli pentru o bară, se vor utiliza operatori de masă şi rigiditate. Relațiile vor putea fi scrise sub forma compactă astfel:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x) I_z(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \;\; ; \; \mathbf{m} = m(x)$$

Cu această substituție se obține noua formă a ecuației Euler-Bernoulli :

$$\mathbf{m}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathbf{k}v = q(x,t) - \frac{\partial m_i}{\partial x}$$

1.1.4. Teoria barei Rayleigh

Acest model introduce rotirea datorată inerției în modelul deja determinat pentru bara Euler-Bernoulli.

a) Ecuația de mişcare

Dacă se înlocuiesc ecuațiile obținute la punctul anterior şi se includ şi efectele inerției în ecuația dedusă la punctul1). vom obține ecuația de mişcare a barelor Rayleigh:

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} I_p(x) \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x) I(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = q(x,t) - \frac{\partial m_i}{\partial x}$$

b) Condiții inițiale şi de contur:

Ecuațiile de mişcare pentru bara Rayleigh sunt de ordinul patru pentru derivatele spațiale şi de ordin doi pentru cele temporale. Astfel se vor definii condițiile pentru capătul stâng al barei:

$$Q(0,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x) I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + I_p(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - m_i(x,t) \right]_{x=0} = Q_0(t)$$

$$M(0,t) = -EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = M_0(t)$$

c) Masă şi rigiditate

Ecuaţiile de mişcare pentru teoria barelor Rayleigh vor putea fi scrise sub forma compactă utilizând operatori de masă şi rigiditate astfel:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\mathbf{m} = m(x) - \frac{\partial}{\partial x}I_p(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia de mişcare vom avea:

$$\mathbf{m}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathbf{k}v = q(x,t) - \frac{\partial m_i}{\partial x}$$

1.1.5. Teoria barei Timoshenko

Teoriile prezentate anterior sunt foarte utile pentru a determina comportamentul barelor ale căror grosimi sunt foarte mici comparativ cu lungimile sau lungimile de undă ale deformaţiilor sunt foarte mari în comparaţie cu grosimea barei. Pentru bare mai scurte sau pentru situaţii în care se caută vibraţii ale căror lungimi de undă sunt mici este necesară o altă teorie de calcul. Cele două teorii prezentate nu iau în considerare şi deformaţiile cauzate de forfecare. Teoria lui Timoshenko aduce o corecţie asupra teoriilor existente adăugând deformaţiile datorate tensiunilor de forfecare. Barele care includ corecţii de forfecare şi inerţia la rotaţie sunt numite bare Timoshenko.

a) Corecţia eforturilor de forfecare

Fie tensiunile şi deformaţiile de forfecate de forma:

$$\sigma_{xy} = \tau(x,y,t) \;\; ; \;\; \varepsilon_{xy}(x,y,t) = \frac{\gamma_{x,y}(x,y,t)}{2} \;\; .$$

Legea lui Hooke va avea forma:

$$\tau(x,y,t) = 2G(x)\varepsilon_{xy}(x,y,t) = G(x)\gamma_{xy}(x,y,t)$$

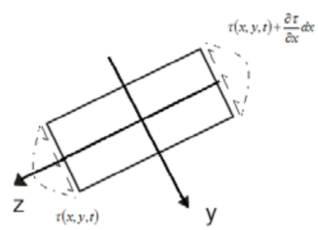


Figura 1.3

Ecuaţia constitutivă va avea forma:

$$M(x,t) = -EI\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi(x,t)\right] = -EI\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{Q(x,t)}{k_f A(x)G(x)}\right]$$

b) Ecuații constitutive, condiții la limită

Ecuațiile de mişcare vor avea forma:

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k_f A(x)G(x)\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\varphi(x,t)\right\}\right]=q(x,t)$$

$$I_p(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}-k_f A(x)G(x)\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\varphi(x,t)\right\}-\frac{\partial}{\partial x}E(x)I(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}=m_i(x,t)$$

Forma generală a condițiilor inițiale este:

$$v(x,0)=v_0(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\theta_0(x)$$

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=m_0(x)$$

c) Bare uniforme

Ecuațiile caracteristice pot fi reduse la o singură ecuație. Pentru barele din materiale ale căror proprietăți sunt constante, ecuațiile de mişcare pot fi simplificate. Către capătul liber $m_i=0$, astfel vom avea:

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_p(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=q(x,t)$$

Cu ajutorul operatorilor se poate scrie sub formă restrânsă ecuația barei Timoshenko:

$$\mathbf{m}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\mathbf{k}v=\mathbf{F}(x,t)$$

1.2. Cazuri particulare. Vibrațiile barelor zvelte

1.2.1. Vibrații transversale

Din relatia momentului incovoietor calculate in functie de distributia tensiunilor dupa axa y:

$$M(x)=-\int_A \sigma_x y dA = E\cdot I_z\frac{d^2 v}{dx^2}$$

se calculeaza relatia momentului incovoietor in functie de spatiu sit imp:

$$M(x,t)=E\cdot I_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Pentru a determina fortlele taietoare si sarcina distribuita se scriu ecuatiile de echuilibru pentru un element infinit mic:

$$T(x,t)=\frac{\partial M}{\partial x}=E\cdot I_z\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

$$p(x,t)=\frac{\partial T}{\partial x}=E\cdot I_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

unde $p(x,t)$ sarcina transversal pe lungime. Ea se poate fi definita in functie de sarcina inertiala si cea transversala.

$$p(x,t)=q(x,t)-\rho\cdot A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Daca se inlocuiesc cele doua relatii se va obtine ecuatia diferentiala a miscarii:

$$E\cdot I_z\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho\cdot A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=q(x,t)$$

Moduri proprii de vibrații:

$$v(x,t)=V(x)\sin(\omega t+\phi)$$

1.2.2. Vibrații longitudinale

Fie bara de secțiune constantă cu deplasările axiale de forma: $u=u(x,t)$ care apar din cauza fortelor axiale. Se consideră un element de bară infinit mic având lungimea dx. Pentru elementul dx se scrie ecuația de mişcare pe direcție axială(x):

$$\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}dx\right)-N-(\rho A dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ecuația diferențială a vibrațiilor longitudinale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1.2.3. Vibrații torsionale

Ecuația de mişcare în acest caz va avea forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Se admit soluții de forma:

$$\theta(x,t)=\Theta(x)\sin(\omega t+\phi)$$

1.3. Element finit unidimensional

1.3.1. Mişcarea tri-dimensională a unui element finit unidimensional

Pe baza teoriei dezvoltate anterior vor fi stabilite ecuatiile de miscare pentru un element finit unidimensional.

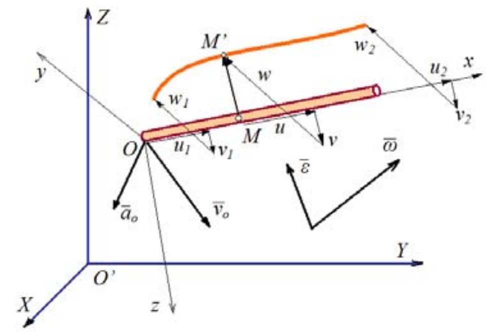


Figura 1.5 Element finit unidimensional cu o mişcare tri-dimensională

În literatura de specialitate sunt prezentate mai multe tipuri de elemente finite unidimensionale utilizate în analiza MEF a sistemelor de bare. Deformația unui punct arbitrar al barei depinde de coordonatele nodale alese care, în mod uzual, se aleg ca fiind la capetele elementului. Funcțiile de interpolare alese vor determina numărul și tipul de coordonate independente de care va fi nevoie pentru a descrie deformația elementului finit considerat. Elementul finit ales are o mişcare generală tri-dimensională împreună cu corpul din care face parte. Se presupune că se cunoaşte mişcarea generală rigidă a sistemului mecanic, deci se cunosc şi vitezele şi accelerațiile pentru toate punctele materialului continuu. Se mai presupune şi faptul că deformațiile diferitelor puncte de pe bară sunt mici şi nu vor influența mişcarea generală rigidă a sistemului mecanic.

In funcție de vectorii de coordonate aleşi $\{\delta_1\}$şi $\{\delta_2\}$, deplasarea unui punct oarecare M de pe bară, notată $\{\delta(u,v,w)\}$, poate fi exprimată în puncție de deplasările nodale astfel:

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta_e\}=[N]\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

unde deplasările nodale $\{\delta_1\}$şi $\{\delta_2\}$ compun vectorul $\{\delta_e\}$ al coordonatelor independente corespunzătoare elementului finit *e*:

$$\{\delta_e\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix} \ ; \qquad (2)$$

iar matricea $[N]$ conține funcțiile interpolare. Liniile matricei $[N]$ se vor nota $\lfloor N_{(u)}\rfloor$, $\lfloor N_{(v)}\rfloor$ şi $\lfloor N_{(w)}\rfloor$:

Se poate scrie:

$$\delta=\begin{bmatrix}N_{(u)}\\N_{(v)}\\N_{(w)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix} \quad . \qquad (4)$$

Vectorii viteză şi accelerație unghiulară vor avea în sistemul de coordonate local forma:

$$\{\omega_L\}=[R]\{\omega_G\};\ \{\varepsilon_L\}=[R]\{\varepsilon_G\}, \qquad (26)$$

Pentru operatorii viteză unghiulară şi accelerație unghiulară expresiile vor fi:

$$[\omega_L]=[R]^T[\omega_G][R] \quad ; \quad [\varepsilon_L]=[R]^T[\varepsilon_G][R]\,. \qquad (27)$$

Considerând ecuațiile de definiție ale lui $[\omega_G]$ şi $[\varepsilon_G]$ se obține:

$$[\omega_L] = [R]^T [\dot{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zL} & \omega_{yL} \\ \omega_{zL} & 0 & -\omega_{xL} \\ -\omega_{yL} & \omega_{xL} & 0 \end{bmatrix}; \qquad (28)$$

În cele ce urmează se vor analiza câteva cazuri particulare.

1.3.2. Element finit în mişcare plană

În cazul mişcării plane particularitatea o reprezintă matricea de rotație $[R]$:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (68)$$

Prima respectiv a doua derivată a matricei $[R]$ oferă viteza şi accelerația unghiulară. În cele ce urmează se vor exprima aceste derivate conform [12].

$$[\omega_G] = [\dot{R}][R]^T = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (71)$$

reprezintă operatorul viteză unghiulară corespunzător vectorului viteză unghiulară:

$$\{\omega_G\} = \omega \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \qquad (72)$$

Vectorul accelerație unghiulară este definit astfel:

$$\{\varepsilon_G\} = \{\dot{\omega}_G\} = \varepsilon \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}^T. \qquad (73)$$

În urmaefectuării unor calcule elementare se va obține:

$$[\ddot{R}][R]^T = [\varepsilon_G] - [\dot{R}][\dot{R}]^T = [\varepsilon_G] + [\omega_G][\omega_G] = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (74)$$

Ecuația de mişcare pentru un element finit unidimensional, în sistemul local de coordonate, care poate fi scrisă sub formă simplificată:

$$[m_e]\{\ddot{\delta}_e\} + 2\omega([m_{21}] - [m_{12}])\{\dot{\delta}_e\} + ([k_{ei}] + \varepsilon([m_{21}] - [m_{12}]) - \omega^2([m_{11}] + [m_{22}]))\delta_e =$$
$$= \{q_e\} + \{q_e^*\} - \varepsilon\{m_{2x}\} - \omega^2\{m_{1x}\} - [m_{Ee}^i][I]\{\varepsilon_L\} - [m_{oe}^i]\{\ddot{r}_{oL}\}. \qquad (80)$$

2. OBIECTIVELE TEZEI

Pentru a proiecta, realiza și opera un sistem MBS cu elemente elastice care să satisfacă cerințelor actuale și viitoare ale aplicațiilor, este nevoie de mai multe cercetări pentru a îmbunătăți modelele utilizate și viteza cu care se obține proiectul și rezultatele. Acest lucru va asigura dependența de prototipuri fizice, reducând astfel costul și timpul de proiectare. Fidelitatea unui model poate fi îmbunătățită prin încorporarea în model a tuturor fenomenelor relevante care afectează răspunsul dinamic.

Viteza de calcul este necesară în special pentru proiectare, pentru problemele de dinamica inversă și cele de optimizare a proiectării, din cauza numărului mare de iterații implicate în aceste procedee. În plus, unele aplicații noi, cum ar fi modelele de control și interacțiunea unui (MBS) cu mediul în sistemele de realitate virtuală, necesită o predicție a răspunsului în timp real (sau foarte rapid). În etapele precedente de studiu din domeniu, precizia a fost sacrificată în favoarea vitezei de calcul, întrucât calculele nu puteau fi rezolvată într-un timp rezonabil pe computerele existente. În prezent, viteza din ce în ce mai mare a computerelor oferă oportunități pentru simulări rapide de înaltă fidelitate. Îmbunătățirea fidelității și vitezei modelului FMD necesită mai multe cercetări în următoarele domenii ale (MBS).

2.1. Modele de bază

Sunt necesare mai multe cercetări pentru îmbunătățirea modelelor de bază utilizată în studiul unor astfel de sisteme. Acestea vor trebui să includă:

- **Elemente de grindă, placă și tridimensionale** mai precise și eficiente. Eficiența înseamnă că elementul nu este prohibitiv de scump referitor la timpul de calcul în comparatie cu alte elemente disponibile care pot rezolva aceeași problemă la aceeași precizie. Elementul trebuie să țină seama cu exactitate de următoarele cerințe: rotație mare spațială rigidă a corpului, deformații mari, deformații de forfecare, inerție la rotație, curbură inițială, grinzi și plăci curbate, secțiuni transversale variabile, legi constitutive de material anisoptropic, neliniar, incluzând amortizari, frecări și ruperea materialului.
- **Modele cu frecare de contact/impact**. În mod obișnuit, frecarea este modelată folosind un model de frecare Coulomb. Totuși există și metode mai sophisticate și este necesar să fie incorporate in cadrul modelelor actuale (MBS). Frecarea poate deveni foarte importantă în aplicații precum andocarea și asamblarea în spațiu sau la modelarea unor roboți și manipulatori.
- **Modelarea legăturilor cu joc**. Sunt necesare mai multe cercetări pentru a evalua aceste tipuri de legături, inclusiv frecările și amortizările din legături. Aceste efecte pot să nu fie importante pentru sistemele care operează la viteze mici și/sau cu precizie redusă. Pentru îmbinările de înaltă performanță, înțelegerea acestor efecte va fi foarte importantă în viitor.

2.2 Formalisme utilizate

Din punctual de vedere al sistemelor de referință utilizate, se poate face o clasificare a modurilor de rezolvare în trei clase mari [ ]. O înțelegere a fundamentelor matematice ale formulărilor existente este necesară și presupune rezolvarea (într-o primă analiză) a următoarelor probleme:

- **Relația matematică între cele trei tipuri de sisteme de referință**. Sunt necesare studii suplimentare pentru a lămuri relațiile care există între cele trei formulari. Acest lucru va lămuri limitările și gradul de valabilitatea a răspunsului în cadrul fiecărui model. Unele lucrări au arătat echivalența dintre metoda sistemului care se mișcă odată cu elemental elastic (sistemul corotational) și metoda sistemului inertial.

◘ **Utilizarea coordonatelor unghiuri de rotație** pentru sistemul de referință corotational și sistemul de referință inertial. În aceste două sisteme de referință sunt utilizate multe grade de libertate de tip unghiuri care spre exemplu unghiurile lui Euler. Sunt necesare studii care să stabilească în ce măsură există limitari în utilizarea unor astfel de coordinate

◘ **Formulări hibride.** Acestea apar dacă sunt utilizate, într-o aplicație, mai mult decât un singur system de referință.

◘ **Efectul neliniarităților asupra coordonatelor modale.**

2.3 Strategii de calcul

Sunt necesare strategii de calcul îmbunătățite, care include dezvoltarea unor studii în:

◘ **Strategii de obținere a soluțiilor.** Sunt necesare recomandări privind alegerea procedurilor de obținere implicite și explicite ale soluției.

◘ **Proceduri paralele de obținere a soluției**. Cele mai avantajoase sunt procedurile care pot realiza o accesare liniară a numărului de procesoare proportional cu numărul de grade de libertate al sistemului. Metodele explicite satisfac în mod natural această condiție. Este nevoie de mai multe cercetări pentru a dezvolta metode hibride implicite sau implicite-explicite care să obțină o accesare aproape liniară.

◘ **Strategii adaptative**. Sunt necesare cercetări suplimentare pentru adaptarea modelului la sistemele de referință alese, alegerea elementelor finite, etc elemente care pot fi schimbare în timpul simulării, dacă se consideră necesar din alte motive.

◘ **Manipularea simbolică.** Manipularea simbolică poate reduce numărul de operații matematice necesare în timpul simulării numerice.

2.4 Verificarea și validarea simulărilor numerice

Pentru a verifica și valida acuratețea metodelor de simulare numerică, este nevoie de un set de rezultate experimentale și numerice obținute pe cazuri standard, pentru a putea face o comparație.

◘ **Benchmark pentru rezultatele experimentelor** (benchmark reprezintă un standard sau colectie de date în raport cu care rezultatele obținute pot fi comparate). Acestea sunt necesare pentru a valida și evalua exactitatea modelelor de calcul în reprezentarea efectelor cheie precum: mișcare spațială, bucle deschise/închise, rotație de mare viteză sau deformații mari etc. Majoritatea studiilor experimentale anterioare s-au concentrat pe sisteme (MBS) simple, de exemplu grinzi în rotație, manipulatoare cu două elemente, mecanisme simple pentru a evidenția, în general, doar unul dintre aceste efecte.

◘ **Benchmark pentru simulari.** Este necesară existent și dezvoltareaa unui set de simulări de referință pentru verificarea și compararea modelelor de calcul. Aceste seturi de date de referință trebuie să fie concepute pentru a viza efecte individuale, precum și efecte cuplate.

2.5. Obiectivele lucrării

Obiectivul general al tezei este constituit din dezvoltarea metodelor de calcul, utilizând aparatul puternic și validat în practică al metodei elementelor finite, pentru sistemele multicorp cu elemente eleastice și cu verificarea exprimentala a rezultatelor obținute. Metodele obținute pot ajuta la diversificarea tipurilor de structuri studiate si pot face ca procesul de proiectare, de calcul sau de fabricare a unor astfel de sisteme mecanice să devină mai simplu iar timpii alocați acestei etape în cadrul unul proiect să se micșoreze. Câmpul principal de aplicabilitate al acestor cercetări este în domeniul ingineriei mecanice cu aplicații în toate ramurile inginerești, dar cu predilectie in industria construcțiilor de mașini, ingineria autovehiculelor, ingineria aerospatiala și inginerie civilă. În cadrul acestui obiectiv general teza își propune:

- *analiza unor tipuri de elemente finite existente in cadrul aplicatiilor inginerești*;
- *dezvoltarea unor noi tipuri de elemente finite pentru extinderea studiului la noi tipuri de structuri;*
- *determinarea proprietăților ecuațiilor de mișcare;*
- *validarea experimentală a rezultatelor prin realizarea unui stand cu un mecanism al unei pompe eoliene de apă pe care s-au făcut măsurători;*
- *formularea unor recomandări care să ajute proiectanții unor astfel de structuri să utilizeze rezultatele obținute în cadrul tezei.*

Acest obiectiv general va fi realizat in cadrul etapelor enumerate mai sus si va conduce la obiective conexe, secundare care vor fi prezentate in diferite faze ale realizarii lucrării. Îndeplinirea acestor obiective va face posibilă îndeplinirea globală a temei care a fost propusă în teza de doctorat. Obiectivele secundare sunt constituite din:

1. O analiză a stadiului în care se află cercetarile în domeniul tezei prin analiză critică a lucrarilor elaborate de alți cercetători. Este un domeniu interdisciplinar și impune o gamă largă de lucrări studiate. Domeniul se intrepătrunde cu mecanica, rezistența materialelor, organe de mașini și mecanisme, matematica, metode numerice de calcul, construcții, măsurători experimentale. În cadrul secțiunii Bibliografie am trecut doar lucrările semnificative pentru tema aleasă, alese dintr-un număr foarte mare de lucrări analizate existente în cadrul domeniului;
2. Identificarea direcției de cercetare în cadrul domeniului,, stabilirea temei și a obiectivelor principale care urmează a fi realizate. Identificarea unor noi tipuri de structuri care nu au mai fost analizate în trecut din acest punct de vedere;
3. Identificarea metodelor care vor fi utilizate pentru rezolvarea obiectivelor;
4. Modelarea sistemelor studiate utilizând Metoda Elementelor Finite;
5. Analiza dinamică a sistemelor multicorp utilizând proceduri specifice;
6. Analiza metodelor de scriere a ecuațiilor de mișcare pentru un element finit și

utilizarea unui formalism adecvat pentru dezvoltarea cercetărilor;

7. Analiza critică a metodelor de modelare și de rezolvare cantitativă și calitativă a ecuațiilor diferențiale de ordinul doi obținute;

8. Analiza și identificarea celor mai potrivite metode de calcul numeric pentru rezolvarea problemelor speciale impuse de tematică;

9. Determinarea unor proprietăți caracteristice în cazul studiului unor astfel de sisteme;

10. Conceperea și realizarea fizică a unui stand cu un mecanism care simuleaza o pompa de apă eoliană;

11. Analiza unui sistem structural real, modelarea, calculul la vibrații și verificarea teoretică a proprietăților enunțate anterior;

12. Efectuarea unor simulări numerice și compararea acestora cu rezultatele măsurătorilor;

13. Analiza critică a rezultatelor teoretice obținute, concluzii și propuneri de valorificare a cercetărilor;

14. Diseminarea rezultatelor prin publicarea rezultatelor în reviste indexate ISI și în volumeloir conferințelor științifice din țară și străinătate;

15. Identificarea unor posibile viitoare direcții de cercetare și de dezvoltare ale subiectului;

16. Formularea unor concluzii și indicații pentru proiectanții de structuri mecanice.

Realizarea obiectivelor propuse a avut loc la Departamentul de Inginerie Mecanică din universitate, care mi-a oferit sprijinul logistic și laboratoarele departamentului pentru realizarea încercărilor.

3. APLICAȚIE. ROTAȚIA UNEI BARE ÎN JURUL UNEI AXE

3.1. Element finit aflat în mişcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe element

În cele ce urmează se vor determina ecuațiile de mișcare pentru un element finit unidimensional de tip bară în mişcare tri-dimensională care are o mișcare în jurul axei Oz, cu viteza unghiulară omega ω.

Majoritatea termenilor de la Capitolul 1 privind bara llinear elastică rămân valabili. Rigiditatea geometrică are, în acest caz, o formă specifică. Din acest motiv calculele de cap. 1 privind această parte vor fi explicitate.

Dacă se neglijează deformațiile axiale, o forță axială P va da energia internă:

$$E_a = \frac{1}{2}\int_0^L P_{tot}\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]dx \tag{3.1}$$

P_{tot} reprezintă forța axială totală din secțiunea transversală a barei la o distanță *x* de capătul din stânga. Dacă avem la capătul din drepta al barei forța axială P_x, P_{tot} este compusă cu P_x la care se vor adăuga efectele forțelor inerțiale care acționează pe lungimea parțială a barei între limitele *x* şi *L.*

Pentru a le determina trebuie calculată accelerația punctului curent, luând în considerare mişcarea barei ca şi corp rigid, în coordonatele globale de referință (Fig. 5.2):

$$\{a_G\} = \{a_{o,G}\} + [\varepsilon_G][R]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} + [\omega_G][\omega_G][R]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} = [R]\{a_{o,L}\} + [R][\varepsilon_L]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} + [R][\omega_L][\omega_L]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Matricea $[R]$ schimbă componentele unui vector din sistemul mobil de referință *Oxyz* într-un vector în sistemul fix de referință *O`XYZ*. În sistem de coordonate local avem:

$$\{a_L\} = [R]^T\{a_G\} = \{a_{o,L}\} + [\varepsilon_L]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} + [\omega_L][\omega_L]\begin{Bmatrix}x\\0\\0\end{Bmatrix} =$$

$$= \{a_{o,L}\} + \begin{Bmatrix}0\\ \varepsilon x\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-\omega^2 x\\0\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ \varepsilon(d+x)\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-\omega^2(d+x)\\0\\0\end{Bmatrix} \quad , \tag{3.3}$$

unde:

$$\{a_{o,L}\} = [R]^T\{a_{o,G}\} \quad . \tag{3.4}$$

Matricea antisimetrică:

$$[\omega]_G = [\dot{R}][R]^T = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} , \tag{3.5}$$

reprezintă operatorul viteză unghiulară corespunzător vectorului viteză unghiulară:

$$\{\omega\}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}. \tag{3.6}$$

Vectorul accelerație unghiulară este definit astfel:

$$[\varepsilon_G] = [\dot{\omega}_G]^T \tag{3.7}$$

În urma efectuării calculelor se obține:

$$\begin{aligned} [\ddot{R}][R]^T &= [\varepsilon_G] + [\omega_G][\omega_G] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se folosesc notațiile:

$$[\varepsilon_G] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \{\varepsilon_G\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}. \tag{3.9}$$

Vectorii și operatorii viteză unghiulară și accelerație unghiulară nu-și schimba forma în cele două sisteme de coordonate (local și global). Acest lucru va ușura substantial efortul de calcul necesar a fi facut pentru acest tip de mișcare.

Vectorii viteză şi accelerație unghiulară vor avea în sistemul de coordonate local forma:

$$\{\omega_L\} = [R]\{\omega_G\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} ; \; \{\varepsilon_L\} = [R]\{\varepsilon_G\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}, \tag{3.10}$$

Pentru operatorii viteză unghiulară şi accelerație unghiulară expresiile vor fi:

$$[\omega_L] = [R]^T[\omega_G][R] \quad ; \quad [\varepsilon_L] = [R]^T[\varepsilon_G][R]. \tag{3.11}$$

Considerând ecuațiile de definiție ale lui $[\omega_G]$ şi $[\varepsilon_G]$ se obține:

$$[R]^T[\ddot{R}] = [\varepsilon_L] + [\omega_L][\omega_L] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Forța de inerție acționând asupra porțiunii de bară cuprinsă între secțiunea x și capătul din dreapta al barei este, în sistemul de referință local, dată de:

$$\{F^i\} = -\int_x^L \{a_L\} dm = -\int_x^L \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon(d+x) \\ 0 \end{Bmatrix} \rho A dx + \int_x^L \begin{Bmatrix} \omega^2 (d+x) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rho A dx =$$

$$= -\rho A \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon\left[d(L-x)+\dfrac{L^2-x^2}{2}\right] \\ 0 \end{Bmatrix} + \rho A \begin{Bmatrix} \omega^2\left[d(L-x)+\dfrac{L^2-x^2}{2}\right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= -\rho A \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon\left[d(L-x)+\dfrac{L^2-x^2}{2}\right] \\ 0 \end{Bmatrix} + \rho A \begin{Bmatrix} \omega^2\left[d(L-x)+\dfrac{L^2-x^2}{2}\right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.13}$$

Componenta acestei forțe după axa x, care este singura care interesează în cazul de față este:

$$F^{i}_{x,L} = -\rho A\omega^2\left[d(L-x)+\frac{L^2-x^2}{2}\right] = -m\omega^2\left(d+\frac{L}{2}-\frac{d}{L}x-\frac{1}{2L}x^2\right) =$$

$$= \mu + \lambda x + \nu x^2 . \tag{3.14}$$

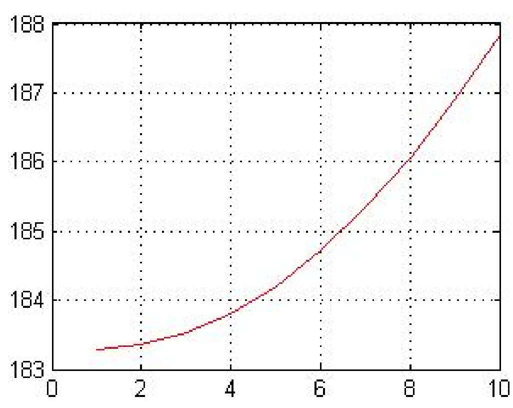
Energia internă datorată inerției are forma:

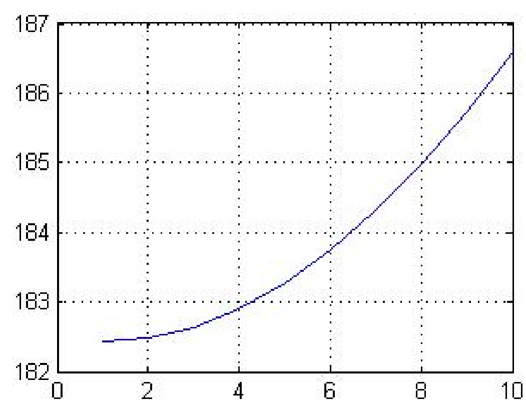
$$E_a = \frac{1}{2}\{\delta_e\}^T\left[\int_0^L \left(P_x + \mu + \lambda\ x + \nu\ x^2\right)\left(N^{*\ T}_{(\gamma)} N^{*}_{(\gamma)} + N^{*\ T}_{(\beta)} N^{*}_{(\beta)}\right)dx\right]\{\delta_e\}, \tag{3.16}$$

3.2. Utilizarea aproximațiilor prin polinomiale de gradul 3 și polinomiale de gradul 5

Pentru mișcarea de rotație cu axa fixă s-au utilizat cele două tipuri de polinomiale mai des folosite și anume aproximarea câmpului de deplasări cu funcții polinomiale de gradul trei și cu funcții polinomiale de gradul cinci.

- Un element finit





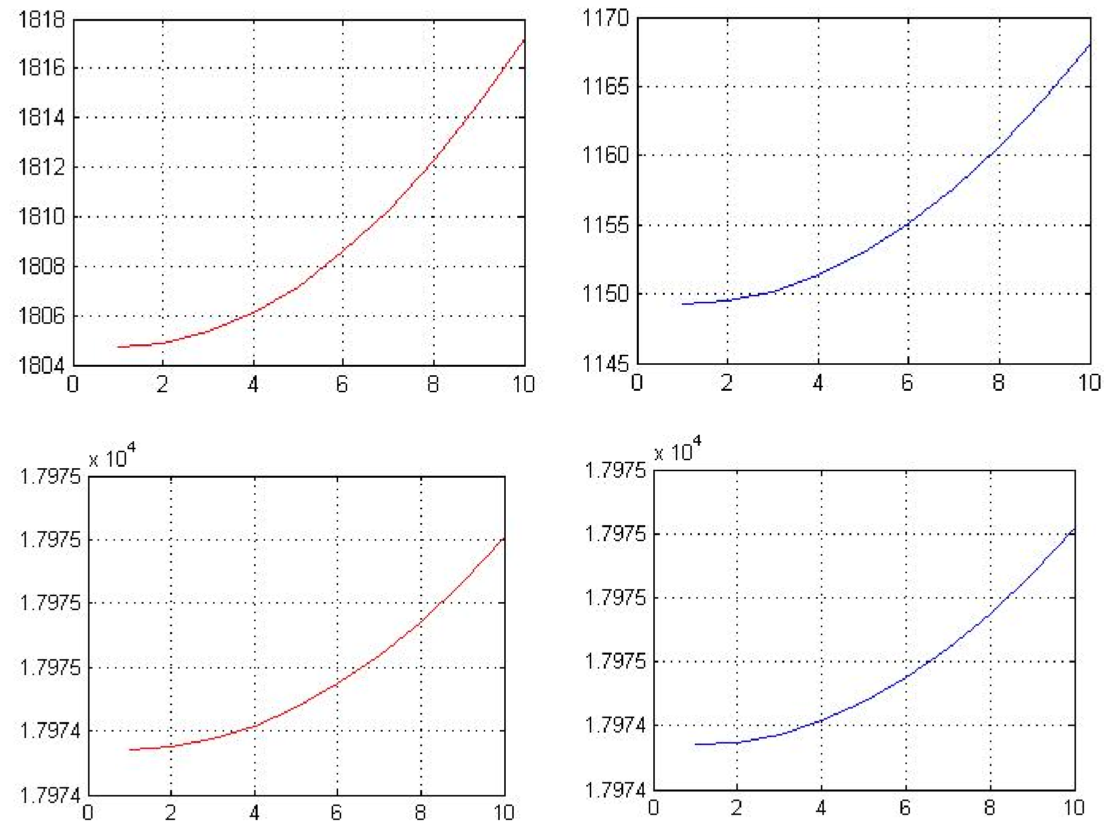


Fig. 3.2

În cazul ecuațiilor de gradul al V-lea apar două frecvențe pe care, utilizand ecuații polinomiale de grad trei, nu le putem identifica.

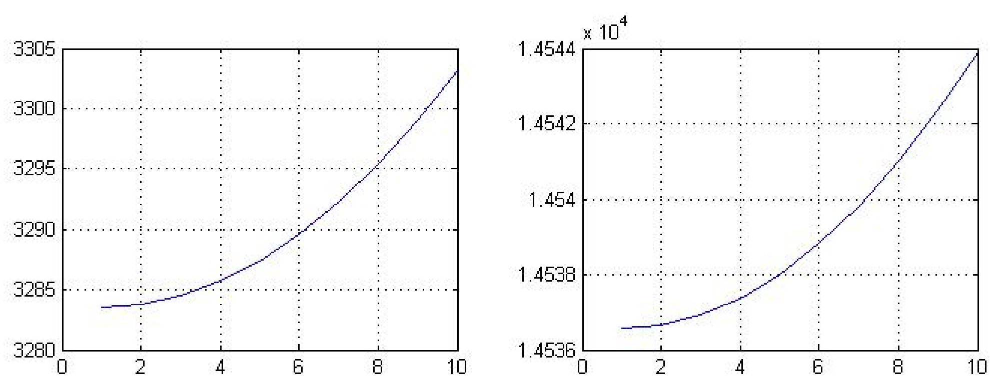


Fig. 3.3.

În cazul unui număr mai mare de elemente creşte precizia de calcul. Se vor compara valorile maxime obținute în cazul mai multor elemente, pentru primele nouă frecvențe proprii.

Tabel 3.1

Nr.	20 de elemente		30 de elemente		40 de elemente		50 de elemente		60 de elemente	
	Ec. grad III	Ec. grad V	Ec. grad III	Ec. grad V	Ec. grad III	Ec. grad V	Ec. grad III	Ec. grad V	Ec. grad III	Ec. grad V
1	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265	182.4265
2	1142.853	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851	1142.851
3	3198.275	3198.222	3198.233	3198.222	3198.226	3198.222	3198.224	3198.222	3198.223	3198.222
4	6262.507	6262.116	6262.194	6262.116	6262.141	6262.116	6262.127	6262.116	6262.121	6262.116
5	10342.5	10340.76	10341.1	10340.76	10340.87	10340.76	10340.8	10340.76	10340.78	10340.76
6	15432.94	15427.18	15428.34	15427.18	15427.55	15427.18	15427.33	15427.18	15427.25	15427.18
7	16305.11	16305.11	16302.79	16302.79	16301.97	16301.97	16301.59	16301.59	16301.39	16301.39
8	21529.31	21513.82	21516.95	21513.82	21514.82	21513.82	21514.23	21513.82	21514.02	21513.82
9	28627.7	28591.66	28599	28591.66	28594.01	28591.66	28592.62	28591.66	28592.13	28591.66

În imaginile de mai jos este prezentată analiza realizată pentru 30 de elemente finite:

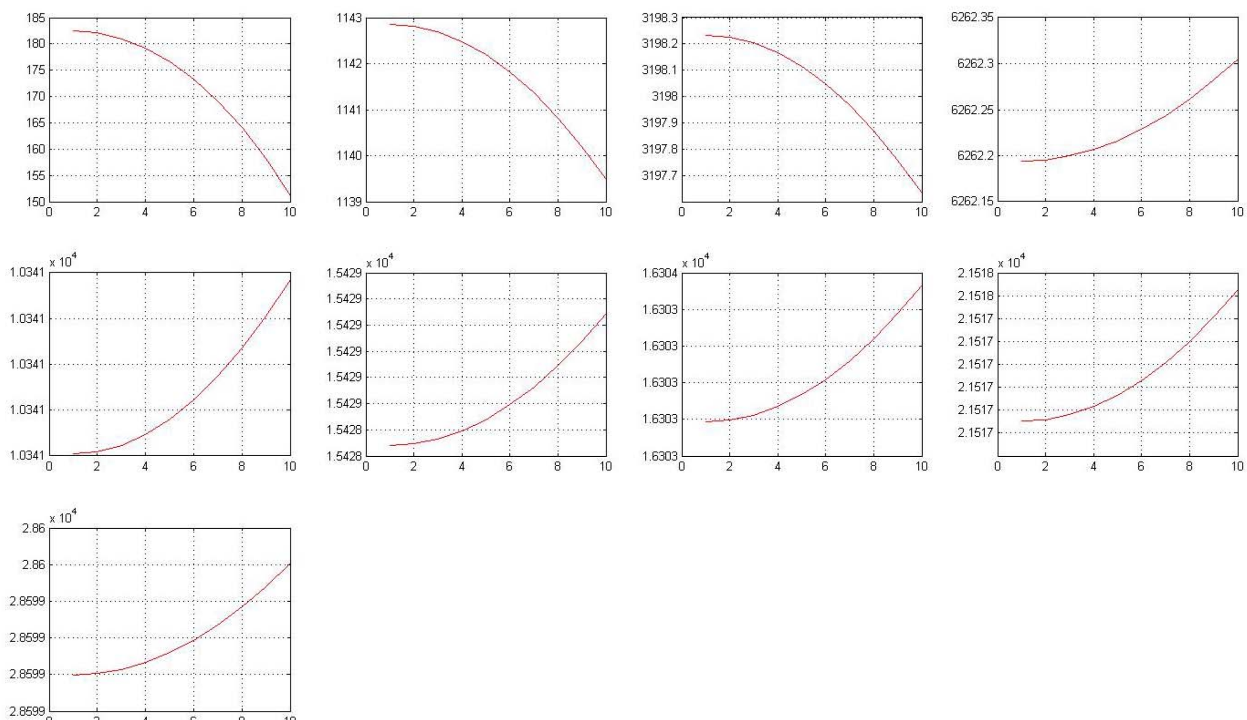


Fig. 3.12.

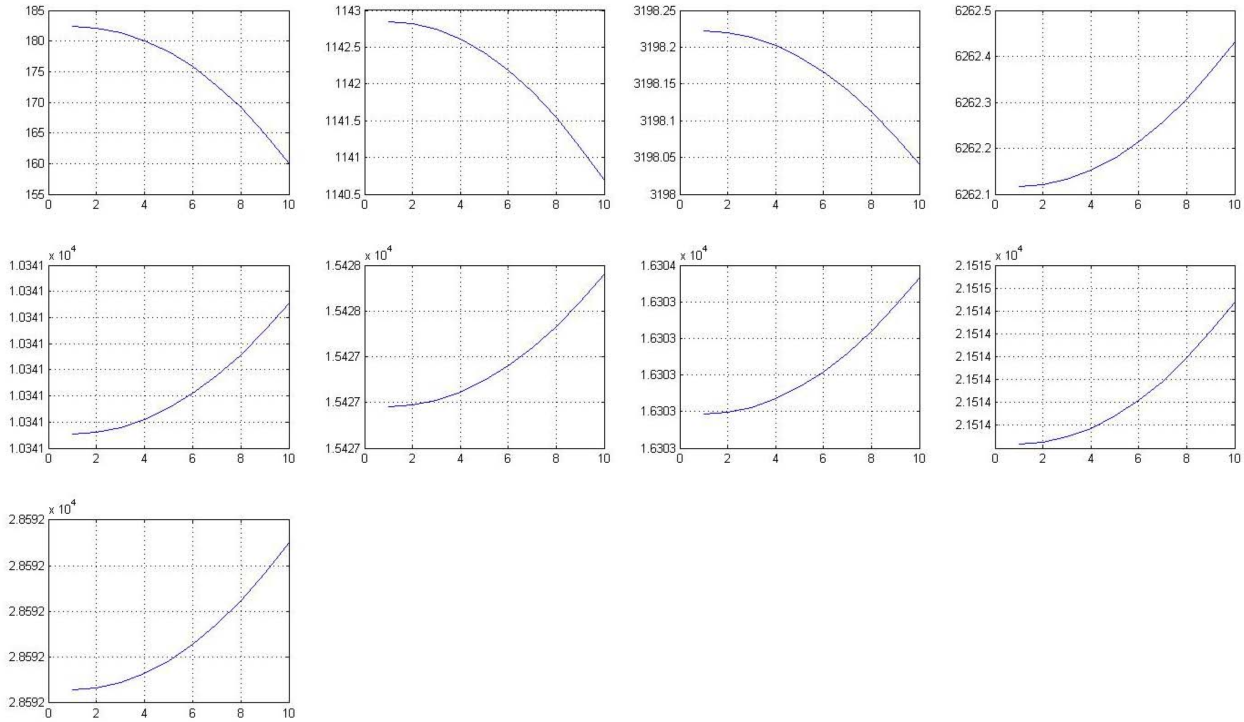


Fig. 3.13.

În figura de mai jos sunt comparate valorile primelor trei ferecvențe pentru cazul de calcul cu ecuații polinomiale de gradul III(roşu) şi gradul V(albastru), pentru un număr de 5 de elemente.

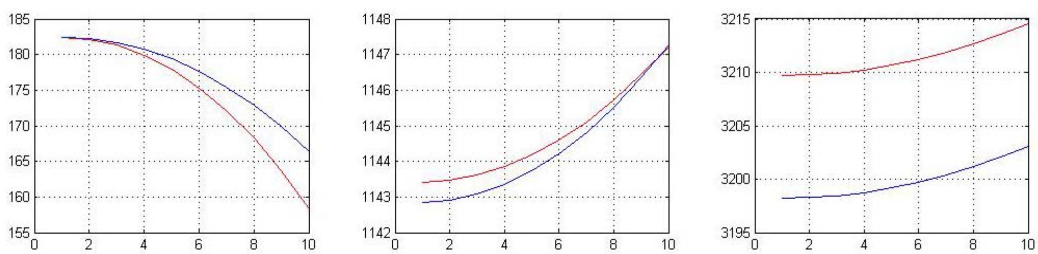


Fig. 3.14.

În figura de mai jos sunt comparate valorile ferecvențelor pentru cazul de calcul cu ecuații polinomiale de gradul III (roşu) şi gradul V(albastru), pentru un număr de 30 de elemente.

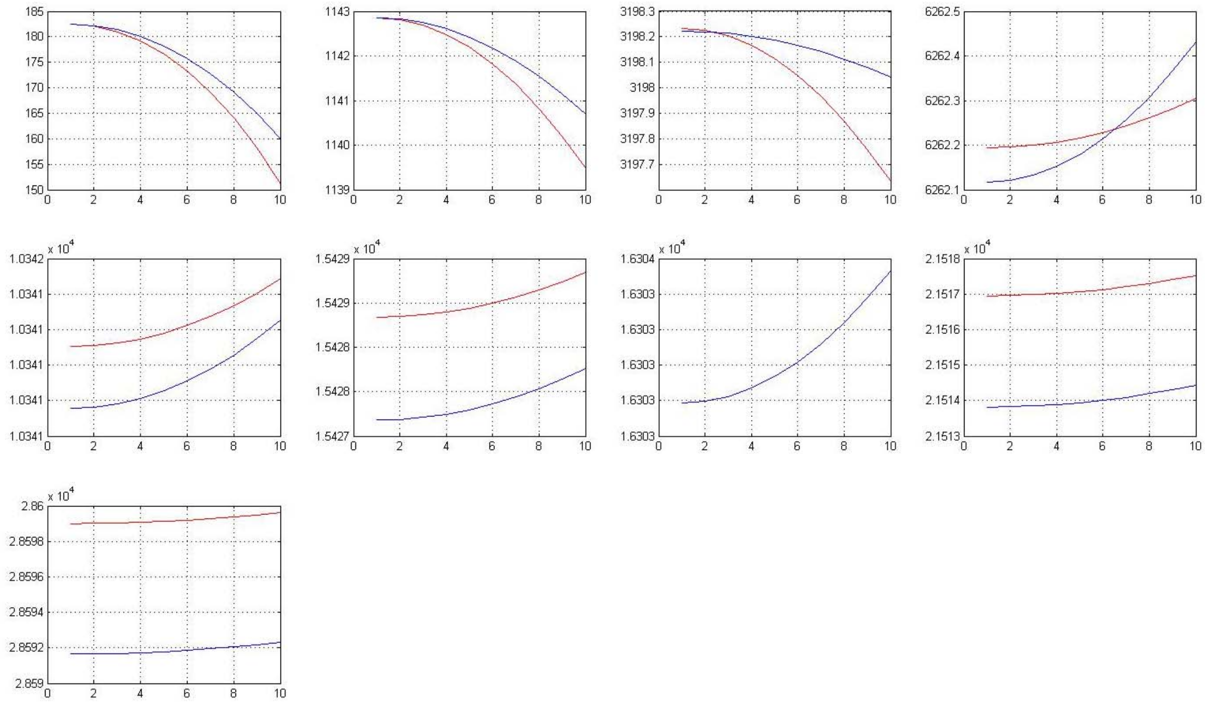


Fig. 3.15.

Primele 2 frecvențe pentru ecuațiile polinomiale de gradul III şi diferite numere de elemente(20,30,40,50,60):

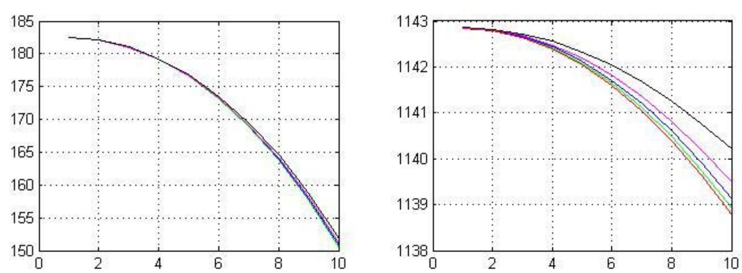


Fig. 3.16.

Primele 2 frecvențe pentru ecuațiile polinomiale de gradul V şi diferite numere de elemente(20,30,40,50,60):

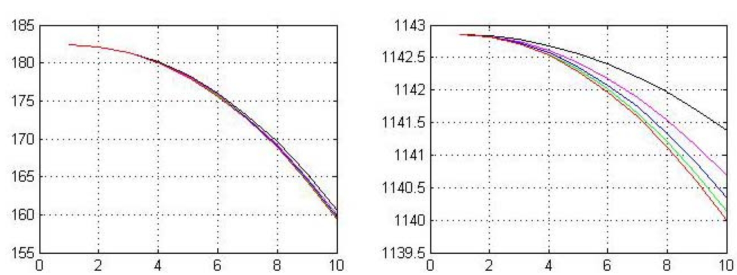


Fig. 3.17.

Primele 3 frecvențe pentru ecuațiile polinomiale de gradul III şi V şi diferite numere de elemente(30,40,50):

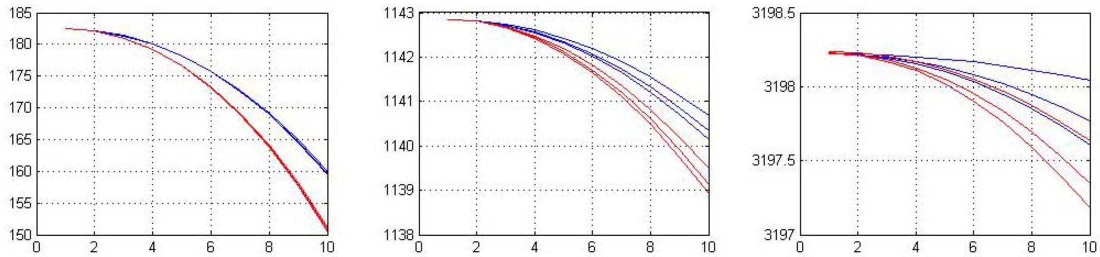


Fig. 3.18.

3.2.1. Funcții de interpolareă de gradul III

Tabel 3.2.Primele două pulsații proprii pentru viteza unghiulară ω=1000(1/s)

Nr. elem.	Pulsația proprie p_1	ε	Pulsația proprie p_2	ε
	Hz	--		--
5	2,07E+08	0,000847	8,177E+09	1,08E-03
10	2,07E+08	0,000265	8,169E+09	1,03E-04
15	2,07E+08	0,00013	8,168E+09	3,37E-05
20	2,07E+08	7,71E-05	8,167E+09	1,72E-05
25	2,07E+08	5,11E-05	8,167E+09	1,07E-05
30	2,07E+08	3,63E-05	8,167E+09	7,38E-06
35	2,07E+08	2,72E-05	8,167E+09	5,43E-06
40	2,07E+08	2,11E-05	8,167E+09	4,17E-06
45	2,07E+08	1,68E-05	8,167E+09	3,31E-06
50	2,07E+08	1,37E-05	8,167E+09	2,70E-06
55	2,07E+08	1,14E-05	8,167E+09	2,24E-06
60	2,07E+08	9,7E-06	8,167E+09	1,89E-06
65	2,07E+08	8,29E-06	8,167E+09	1,62E-06
70	2,07E+08	7,12E-06	8,167E+09	1,40E-06
75	2,07E+08	6,3E-06	8,167E+09	1,22E-06
80	2,07E+08	5,47E-06	8,167E+09	1,08E-06
85	2,07E+08	4,78E-06	8,167E+09	9,57E-07
90	2,07E+08	4,67E-06	8,167E+09	8,61E-07

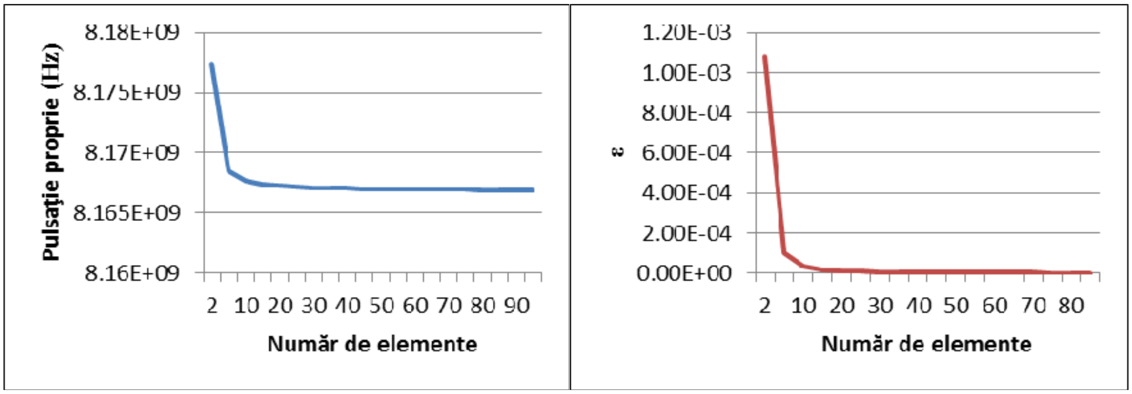


Fig.3.20.Pulsația proprie p2(Hz) şi ε pentru p2

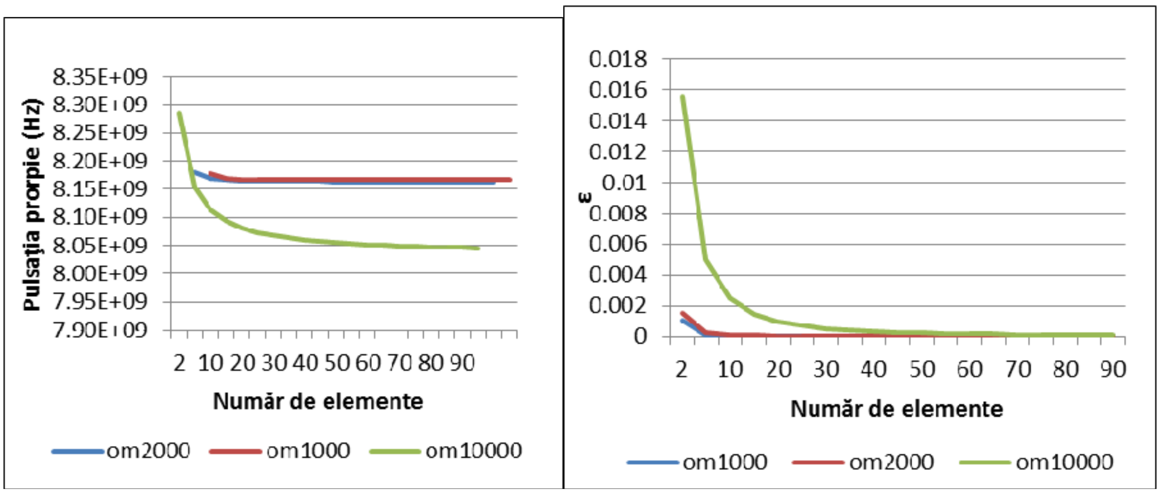


Fig.3.26. Compararea pulsației proprii p2(Hz) şi ε pentru p2 pentru fiecare caz

3.2.2. Funcții de interpolare de gradul V

Tabel 3.5. Primele două pulsații proprii pentru viteza unghiulară ω=1000(1/s)

Nr. Elem.	Pulsația proprie p_1	ε	Pulsația proprie p_2	ε
	Hz	--		--
5	2.08E+08	2.17E-03	8.172E+09	2.86E-04
10	2.07E+08	7.52E-04	8.169E+09	1.34E-04
15	2.07E+08	2.50E-04	8.168E+09	4.67E-05
20	2.07E+08	1.25E-04	8.168E+09	2.36E-05
25	2.07E+08	7.48E-05	8.168E+09	1.43E-05
30	2.07E+08	4.98E-05	8.168E+09	9.55E-06
35	2.07E+08	3.56E-05	8.168E+09	6.84E-06
40	2.07E+08	2.66E-05	8.167E+09	5.14E-06
45	2.07E+08	2.08E-05	8.167E+09	4.00E-06

50	2.07E+08	1.65E-05	8.167E+09	3.21E-06
55	2.07E+08	1.35E-05	8.167E+09	2.63E-06
60	2.07E+08	1.10E-05	8.167E+09	2.20E-06
65	2.07E+08	9.77E-06	8.167E+09	1.85E-06
70	2.07E+08	8.28E-06	8.167E+09	1.59E-06
75	2.07E+08	6.91E-06	8.167E+09	1.36E-06
80	2.07E+08	5.90E-06	8.167E+09	1.20E-06
85	2.07E+08	6.18E-06	8.167E+09	1.08E-06
90	2.07E+08	4.88E-06	8.167E+09	9.25E-07

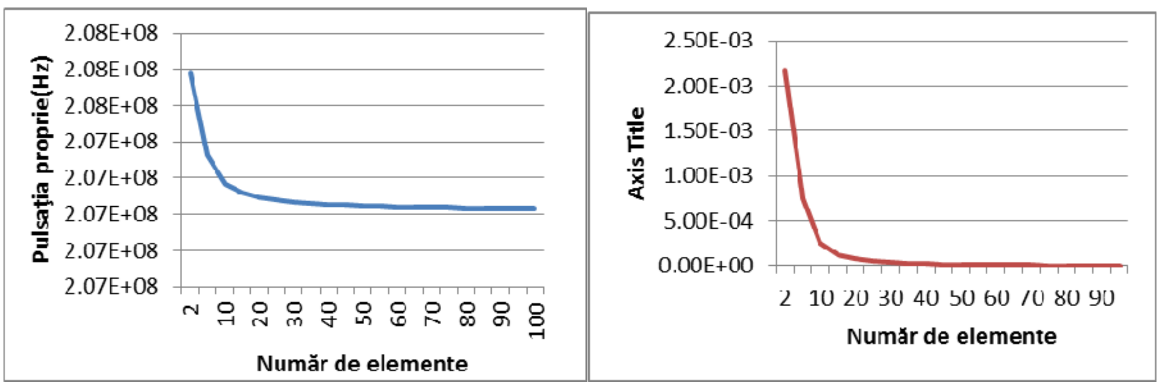


Fig.3.27. Pulsația proprie p1(Hz) şi ε pentru p1

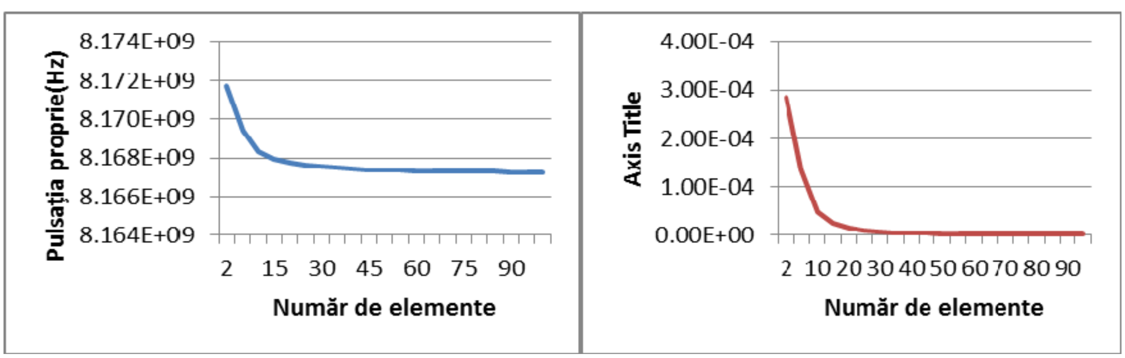


Fig.3.28. Pulsația proprie p2(Hz) şi ε pentru p2

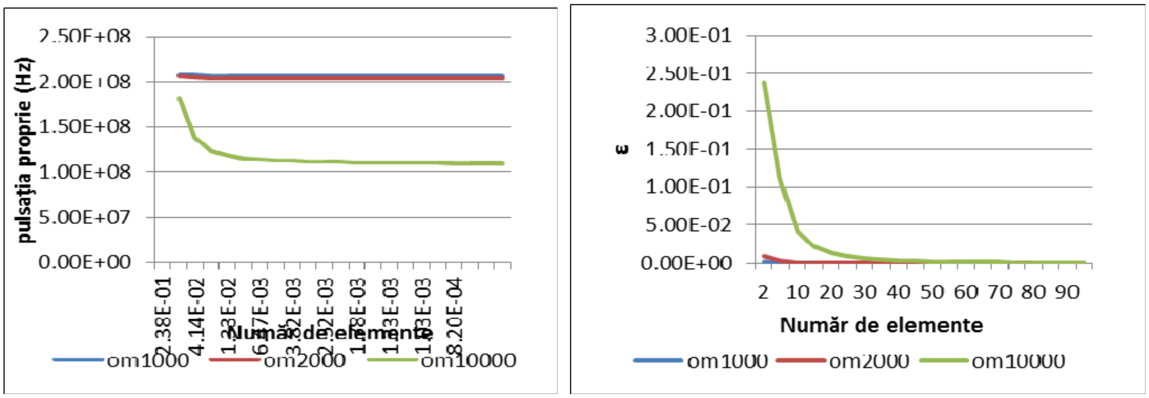


Fig.3.31. Compararea pulsației proprii p1(Hz) şi ε pentru p1 pentru fiecare caz

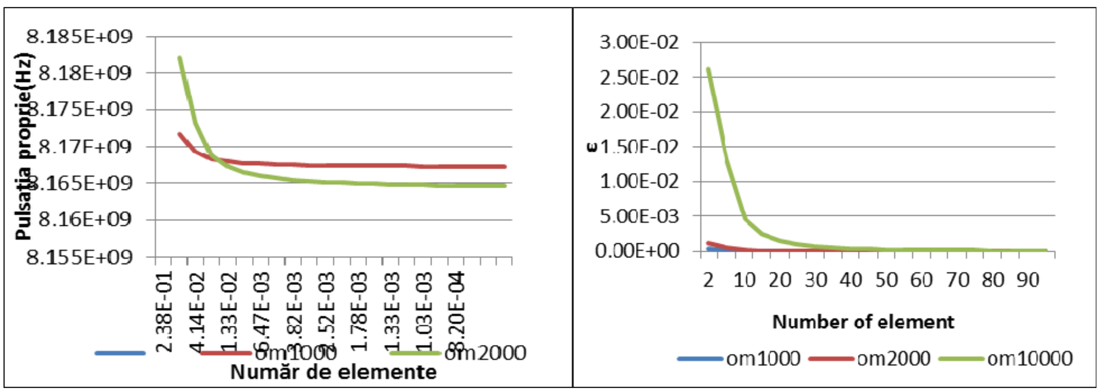


Fig.3.32. Compararea pulsației proprii p2(Hz) şi ε pentru p2 pentru fiecare caz

3.2.3. Răspunsul dinamic al unei bare în câmp centrifugal

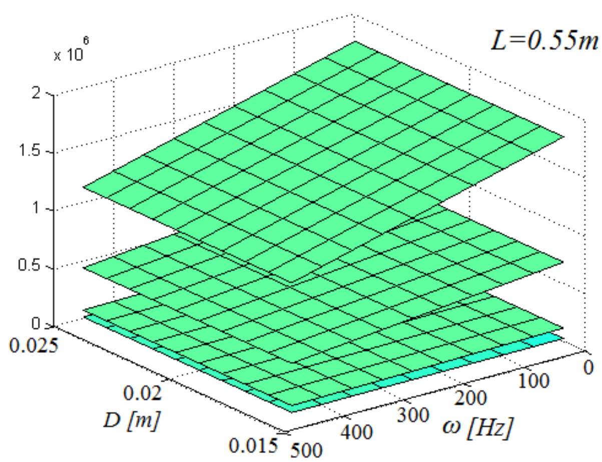


Fig.3.33. Pulsații proprii pentru L=0.55 m (D şi ω variable)

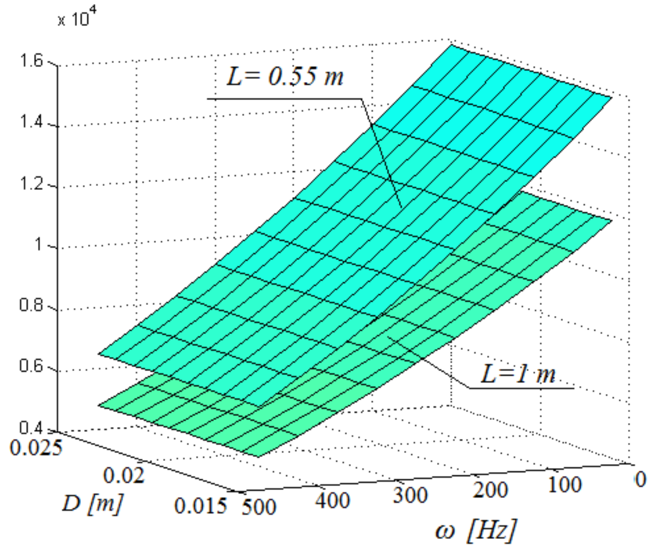


Fig.3.34. Pulsaţii proprii pentru L=0.55 m şi L=1m (D şi ω variable), prima valoare proprie.

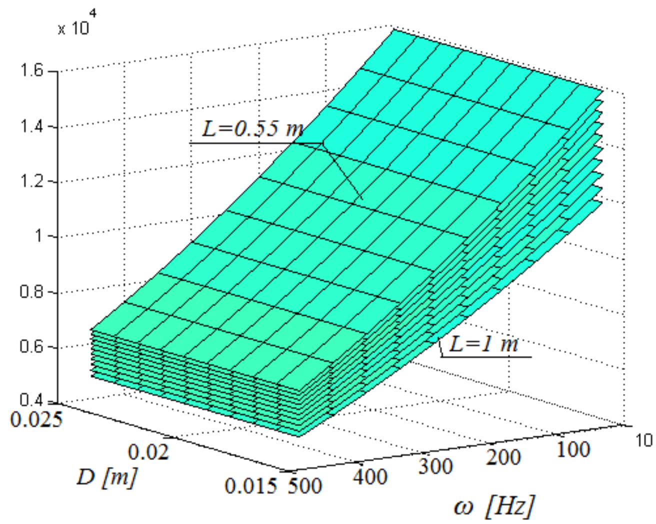


Fig.3.35. Pulsaţii proprii pentru L=0.55.....1 m (D şi ω variable), prima valoare proprie

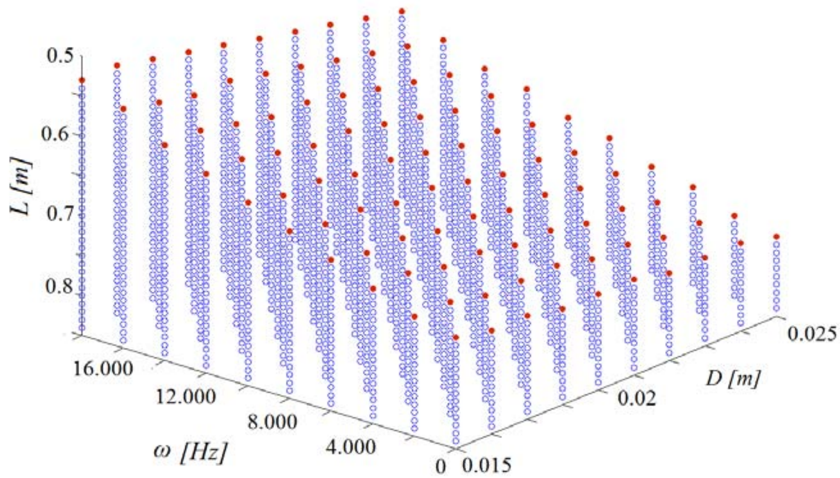


Fig.3.37. Domeniul de instabilitate pentru D, ω şi L variable

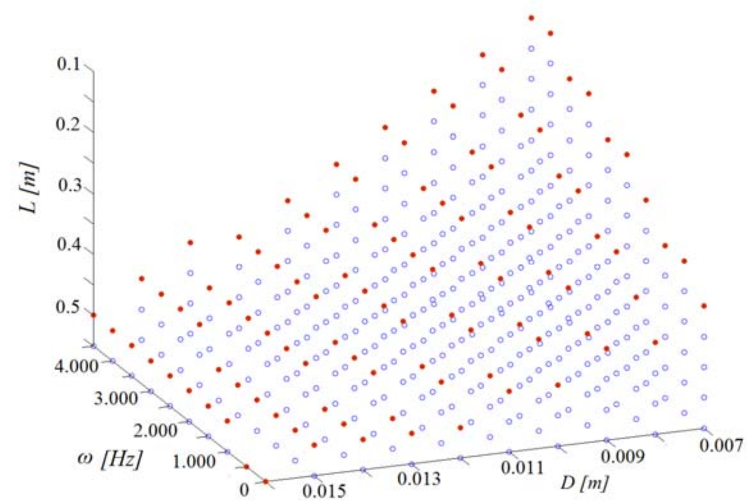


Fig.3.38. Domeniul de instabilitate pentru D, ω şi L variable

4. UTILIZAREA ECUAȚIILOR LUI KANE PENTRU SCRIEREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

4.1. Generalități

Mecanica analitică a oferit, încă de la începuturile sale, mai multe formalisme echivalente utile în analiza sistemelor mecanice cu un număr mare de DOF. Avantajul acestor descrieri constă în faptul că sunt foarte potrivite pentru generalizări. Cu toate acestea, în practică, în ciuda unui număr relativ mare de metode de abordare, s-au utilizat cu precădere ecuațiile lui Lagrange. Succesul acestei metode se bazează pe faptul că operează cu noțiuni clasice și bine cunoscute de mecanică, energie cinetică, energie potențială și lucrul mecanic. Progresul semnificativ al ultimelor cinci decenii în domeniul metodelor de calcul numerice și utilizarea calculatoarelor în toate domeniile permite reconsiderarea acestor metode care pot oferi soluții mai rapide sau mai ușor de obținut. Unele dintre aceste formalisme pot aduce avantaje în ceea ce privește modelarea, algoritmii de scriere și economii în timpii de calcul. Avantajele și dezavantajele sunt rezumate la sfârșitul acestei secțiuni. Folosindu-se un formalism convenabil este posibilă reducerea operațiilor de calcul. De exemplu, metoda lui Hamilton ne conduce direct către un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi, care pot fi rezolvate numeric fără alte transformări, cum se întâmplă în cazul ecuațiilor lui Lagrange, când este necesar să transformăm sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Ultimul deceniu ne arată că am început să reconsideram toate formalismele mecanicii analitice, pentru a facilita reprezentarea modelelor și pentru a reduce operațiile aritmetice necesare. Există lucrări care au aplicat și analizat metode alternative de obținere a ecuațiilor mișcării. În cele ce urmează, va fi prezentat un rezumat al unora dintre aceste cercetări.

S-a dovedit că metoda ecuațiilor lui Lagrange este convenabilă pentru multe aplicații [1-7]. Utilizarea altor formulări echivalente în mecanica analitică a fost investigată sporadic.

Ecuațiile Gibbs-Appell (GA), deși rareori utilizate în studiul sistemelor mecanice, au avantaje evidente în ceea ce privește volumul de calcul care trebuie efectuat. Comparativ cu ecuațiile lui Lagrange rezultă avantaje cu privire la timpul necesar de calcul [8].

Dezavantajul este că cercetătorii sunt mai puțin familiarizați cu noțiunea de energie a accelerațiilor. Metoda (GA) este utilă în studiul sistemelor neolonome. Avantajele utilizării metodei (GA) au fost prezentate în lucrările legate de calculul sistemelor multibodi cu elemente rigide [9]. Ecuațiile finale obținute prin aplicarea acestei metode sunt identice cu cele obținute cu ecuațiile lui Lagrange, dar efortul de calcul este mai mic[10]. Avantajul major al metodei este că multiplicatorii Lagrange nu apar în ecuațiile scrise, metoda îi elimină direct și, ca urmare, numărul de necunoscute este mai mic [11]. Aceste avantaje au fost observate de cercetători și, în ultima perioadă, metoda tinde să devină o procedură [12].

Folosind rezultatele prezentate în [1-16], se pot prezenta la avantajele și dezavantajele modelării unui sistem mecanic elastic utilizând formalismul echivalent din mecanica analitică:

- Utilizarea ecuațiilor lui Lagrange este cea mai folosită metodă de către cercetători pentru a studia astfel de sisteme. Motivul principal este gradul de generalitate și abstractizare pe care îl permite această metodă, dar și faptul că cercetătorii sunt obișnuiți cu ea. Un dezavantaj major este faptul că trebuie determinați multiplicatorii lui Lagrange ceea ce, pentru sistemele mari, poate deveni un lucru dificil;

- Ecuațiile Gibbs-Appell au avantajul că efortul de calcul implicat în procesul de modelare este mai mic. Pe de altă parte, această metodă implică introducerea unei noțiuni cu care cercetătorii sunt mai puțin obișnuiți să opereze, și anume energia accelerațiilor;

- Ecuațiile lui Hamilton permit obținerea directă a ecuațiilor diferențiale de ordinul întâi care trebuie rezolvate. În acest fel, este evitată o etapă consumatoare de timp pentru transformarea sistemului de ecuații diferențiale de ordinul doi într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Cu toate acestea, metoda are dezavantajul necesității de a efectua numeroase calcule preliminare. Nu cunoaștem un studiu concret al tuturor aspectelor implicate în utilizarea acestei metode.

- utilizarea ecuațiilor lui Maggi și ale lui Kane (două formulări echivalente ale acelorași principii) are avantaje în analiza sistemelor neolonome. Condițiile de legătură, exprimate linear, pot fi utilizate imediat ușor și direct în ecuațiile mișcării. De asemenea, mai au avantajul că ecuațiile obținute nu mai conțin multiplicatorii Lagrange sau forțele de legătură din ecuațiile Newton-Euler.

4.2. Cinematică

În cadrul aplicației considerate s-a utilizat un element finit unidimensional pentru a studia răspunsul dinamic al unui mecanism plan cu două grade de libertate. Pentru a aplica (KE) este necesar să se studieze cinematica elementului. În astfel de analiză va trebui să determinăm viteza și accelerația unui punct oarecare al elementului, exprimată în termeni de coordonate nodale. O analiză a acestei probleme poate fi găsită în [2-6]. Funcțiile de interpolare utilizate vor determina câmpul de deplasări în funcție de coordonate nodale independente.

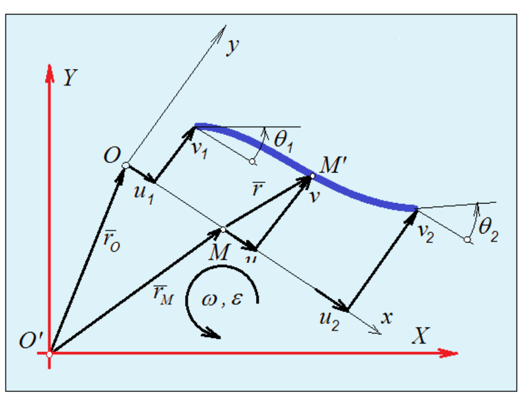


Fig. 4.1. Element finit unidimensional

Poziția punctului M după deformare cand devine M' este dată in cap. 1., unde p, pentru problema plană $\{f(u,v)\}$ este vectorul deplasare al punctului, iar matricea funcțiilor de interpolare este:

$$[N]=\begin{bmatrix} N_{(u)} \\ N_{(v)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_{(1)} \\ N_{(2)} \end{bmatrix}, \qquad (4.1)$$

$\{\delta\}=\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$, și $\{\delta_1\}$, $\{\delta_2\}$ sunt vectorii deplasărilor capetelor barei. Rotația capătului barei este [6] :

$$\beta=\frac{dv}{dx}=\frac{d}{dx}\left([N_{(v)}]\{\delta_e\}\right)=[N'_{(v)}]\{\delta_e\} . \qquad (4.2)$$

4.3. Utilizarea ecuațiilor lui Kane

Metoda și ecuațiile lui Kane au reprezentat în ultimele decenii o metodă aplicată tot mai des la studiul sistemelor multicorp. Ea poate fi folosită atât pentru sisteme olonome cât și pentru sisteme neolonome și elimină unele dintre dezavantajele metodelor clasice în mecanica analitică (Newton-Euler și Langrange).

Pentru un element finit elastic considerat solid, ecuația lui Kane poate fi scrisă ca:

$$\sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial\dot{q}_k}=\int_V\overline{a}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial\dot{q}_k}dm \qquad k=\overline{1,n} \qquad (4.4)$$

Ecuațiile de miscare pentru un singur element finit unidimensional , în acest caz, devin:

$$[m]\{\ddot{\delta}\}+2\omega([m_{21}]-[m_{12}])\{\dot{\delta}\}+([k_b]+[k_a]+\varepsilon([m_{21}]-[m_{12}])-\omega^2([m_{11}]+[m_{22}])+[k^g])\{\delta\}=$$
$$=\{q^{ext}\}+\{q^{liaison}\}-\varepsilon\{m_{2x}\}-\omega^2\{m_{1x}\}-[m_o^i]\{\ddot{r}_o\}_L \qquad (4.13)$$

Table 4.4. Compararea numărului de operații pentru cele două metode

$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_k},\frac{\partial E_c}{\partial q_k}$			$\left(\frac{\partial\{v_{M'}\}_G}{\partial\{\dot{\delta}\}_G}\right)$		
Număr de elemente			Număr de operații		
1	10	30	1	10	30
Număr de operații					
78	1008	9,486	6	33	93

Din analiza calculului prezentat s-au determinat diferen ele dintre numărul de diferen iări ale celor două metode, pornind de la nivelul scrierii ecua iilor de mişcare pentru un singur element. Diferen a este significantă şi ar trebui să ducă la reducerea timpului de calcul dacă se aplica metoda ecua iilor lui Kane. În realitate, în procedura scrierii ecua iilor de mişcarepentru un sistem multicorp, acest pas reprezintă doar o parte din multitudinea de opera ii necesare. În consecintă, reducerea de timp ob inută este foarte mică. De exemplu, în cazul scrierii programului Matlab pentru aceste opera ii studiate şi discretizând cu 30 de elemente, compara ia a dus la scăderea timpului de calcul cu doar 7%.

4.4. Concluzii

Literatura studiată sugerează concluzia că metoda ecuațiilor lui Lagrange prezintă avantajul că cercetătorilor sunt obișnuiți cu metoda. Principalul dezavantaj este necesitatea de a determina multiplicatorii Lagrange din DAE obținut, lucru dificil de realizat în cazul sistemelor cu multe grade de libertate. Aceasta procedură implică calcule numeroase și timpi de calculator mari. Prin comparație, metoda GA pare să elimine acest dezavantaj, dar introduce o nouă noțiune, energia accelerațiilor, cu care majoritatea cercetătorilor nu sunt familiarizați. Metoda KE, care este echivalentă cu metoda ME, a început să fie utilizată mai pe larg în ultimul deceniu, studii determinate și de industria de automatizare și de roboții industriali.

În acest capitol s-a făcut și o comparație între cele două metode. S-a înregistrat o scădere, minoră, a timpului necesar de calcul. Acest lucru se datorează faptului că dimensiunea sistemului analizat este mică. În cazul sistemelor mari, cu un număr mare de elemente finite, se poate presupune că timpul de calcul câștigat va fi semnificativ. Ecuațiile lui Kane pot fi o alternativă economică și simplă la problemă. Metodele menționate și celelalte cunoscute din mecanica analitică vor fi reevaluate în contextul dezvoltării industriei moderne, caracterizate prin mecanisme de lucru cu viteze mari și sarcini mari și vor determina adaptarea software-ului comercial la acestea noi metode.

5. Dinamica elementului finit bidimensional

5.1. Element finit plan în stare de membrană

În cadrul acestui capitol se va considera o placă pentru care se vor determina ecuațiile de mișcare pentru diferite cazuri particulare de mișcare. Se va considera un singur element finit plan, în stare de membrană. Se raportează elementul considerat a sistemul local de coordonate Oxy legat, solidar de element. Sistemul local de coordonate este mobil și participă la mișcarea plană a elementului. Se notează cu $\bar{v}_o(\dot{X}_o, \dot{Y}_o)$ viteza și cu $\bar{a}_o(\ddot{X}_o, \ddot{Y}_o)$ accelerația originii sistemului de referință mobil. Sistemul mobil va avea o viteză unghiulară $\omega = \dot{\theta}$ și o accelerație unghiulară $\varepsilon = \ddot{\theta}$. [1],[2],[16]. Matricea ortonormală:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

face trecerea de la sistemul local la sistemul global de coordonate. Un vector $\bar{v}(v_x, v_y)$ cu componentele exprimate în sistemul local de coordonate, devine în sistemul de referință global [3],[4]:

$$\begin{Bmatrix} v_X \\ v_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}. \tag{5.2}$$

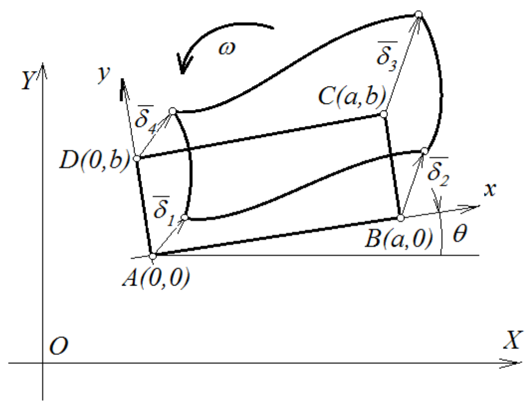


Figura 5.1. Element finit dreptunghiular

Dacă se notează vectorul de poziție al unui punct ales arbitrat M al unui element finit de tip membrană cu $\{r_M\}_G$, se poate scrie:

$$\{r_M\}_G = \{r_O\}_G + \{r\}_G = \{r_O\}_G + [R]\{r\}_L \tag{5.3}$$

Pentru elementul finit triunghiular studiat care are noduri la capete, funcțiile de interpolare se vor alege astfel:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_{(1)}] \\ [N_{(2)}] \end{bmatrix} \{\delta\}_L = [N]\{\delta\}_L$$

(5.6)

Expresia energiei cinetice pentru un singur element finit va fi:

$$E_c = \frac{1}{2}\int_V \rho v^2 dV = \frac{1}{2}\int_V \rho \,\{v_{M'}\}_G^T \{v_{M'}\}_G dV$$

Lucrul mecanic al forțelor distribuite şi concentrate va da:

$$W + W^c = \int_V \{p\}^T \{f\} dV + \{q\}^T \{\delta\}_L = \left(\int_V \{p\}^T [N] dV\right)\{\delta\}_L + \{q\}^T \{\delta\}_L \qquad (5.12)$$

Lagrangianul elementului finit considerat va avea forma:

$$L = E_c - E_p + W + W^c \quad . \qquad (5.13)$$

5.2. Element finit triunghiular

Dacă se raportează elementul finit la un sistem de referință situat în poziția centrului de masă al elementului, există relațiile:

$$\int_V dxdy = \int_V dA = A \qquad (5.25)$$

unde: A este aria triunghiului.

Deplasarea punctului *i* va avea componentele u_i, v_i, $i=1,2,3$. Funcțiile de interpolare liniare pentru deplasare vor fi:

$$\begin{cases} u = C_1 + C_2 x + C_3 y \\ v = C_4 + C_5 x + C_6 y \end{cases} \qquad (5.31)$$

Dacă se pun condițiile ca în noduri funcțiile de interpolare să asigure deplasările, vom avea:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.32)$$

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.33)$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\int_V N_i \cdot t \cdot \rho \cdot dA = m a_i \;\; ; \;\; \int_V N_i \cdot x \cdot t \cdot \rho \cdot dA = b_i J_y + c_i J_{xy} \; ; \; \int_V N_i \cdot y \cdot t \cdot \rho \cdot dA = b_i J_{xy} + c_i J_x \;\; ; \qquad (5.42)$$

$$\int_V N_i \cdot N_j \cdot t \cdot \rho \cdot dA = \int_V [a_i \quad b_i \quad c_i] \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} \cdot t \cdot \rho \cdot dA =$$

$$= [a_i \quad b_i \quad c_i] \iint_V \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} \cdot t \cdot \rho \cdot dA = [a_i \quad b_i \quad c_i] \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J_y & J_{xy} \\ 0 & J_{xy} & J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} =$$

$$= m a_i a_j + b_i b_j J_y + \left(b_i c_j + b_j c_i\right) J_{xy} + c_i c_j J_x \qquad (5.43)$$

5.3. Element finit dreptunghiular in stare de membrană

5.3.1. Calculul coeficienților matriceali

Câmpul deplasărilor:

$$\begin{cases} u = N_1 + N_2 x + N_3 xy + N_4 y \\ v = N_5 + N_6 x + N_7 xy + N_8 y \end{cases} \tag{5.50}$$

Coeficienții se determină în funcție de deplasările celor patru colțuri. Relația câmpului de deplasări va deveni:

$$\begin{cases} u = (1-\xi)(1-\eta)u_1 + \xi(1-\eta)u_2 + \xi\eta u_3 + \eta(1-\xi)u_4 \\ v = (1-\xi)(1-\eta)v_1 + \xi(1-\eta)v_2 + \xi\eta v_3 + \eta(1-\xi)v_4 \end{cases} \tag{5.51}$$

unde:

$$\xi = \frac{x}{a}\ ;\ \eta = \frac{y}{b}.$$

Matricea maselor va avea forma:

$$M = \int_0^1\int_0^1 [(N_{(1)}^T N_{(1)} + N_{(2)}^T N_{(2)}) \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot e] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot \rho \cdot e}{36} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{5.55}$$

Matricea de amortizare conservativă va fi:

$$C = \int_0^1\int_0^1 [(N_{(2)}^T N_{(1)} - N_{(1)}^T N_{(2)}) \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot e] d\xi d\eta =$$

$$
= \frac{\rho \cdot a \cdot b \cdot e}{36} \cdot \begin{pmatrix}
0 & -4 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & -1 \\
2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$

(5.56)

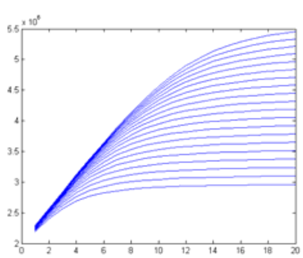
Matricea de rigiditate se va putea scrie sub forma:

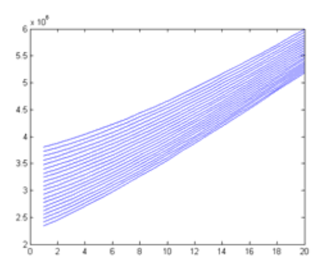
$$
K = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(A^T \cdot D \cdot A \right) a \cdot b \cdot e \right] d\xi d\eta =
$$

$$
= \frac{a \cdot b \cdot e \cdot E}{1 - \upsilon^2} \cdot \begin{bmatrix}
\frac{1}{3a^2} + \frac{1-\upsilon}{6b^2} & & & & & & & \\
\frac{1+\upsilon}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{6a^2} + \frac{1}{3b^2} & & & & sim & & \\
\frac{1-\upsilon}{12b^2} - \frac{1}{3a^2} & \frac{1-3\upsilon}{8ab} & \frac{1}{3a^2} + \frac{1-\upsilon}{6b^2} & & & & & \\
\frac{3\upsilon-1}{8ab} & \frac{\upsilon-1}{6a^2} + \frac{1}{6b^2} & \frac{1-\upsilon}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{6a^2} + \frac{1}{3b^2} & & & & \\
\frac{\upsilon-1}{12b^2} - \frac{1}{6a^2} & \frac{-\upsilon-1}{8ab} & \frac{\upsilon-1}{6b^2} + \frac{1}{6a^2} & \frac{1-3\upsilon}{8ab} & \frac{1}{3a^2} + \frac{1-\upsilon}{6b^2} & & & \\
\frac{-1-\upsilon}{8ab} & \frac{\upsilon-1}{12a^2} - \frac{1}{6b^2} & \frac{3\upsilon-1}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{12a^2} - \frac{1}{3b^2} & \frac{1+\upsilon}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{6a^2} + \frac{1}{3b^2} & & \\
\frac{\upsilon-1}{6b^2} + \frac{1}{6a^2} & \frac{3\upsilon-1}{8ab} & \frac{\upsilon-1}{12b^2} - \frac{1}{6a^2} & \frac{\upsilon+1}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{12b^2} - \frac{1}{3a^2} & \frac{1-3\upsilon}{8ab} & \frac{1}{3a^2} + \frac{1-\upsilon}{6b^2} & \\
\frac{1-3\upsilon}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{12a^2} - \frac{1}{3b^2} & \frac{1+\upsilon}{8ab} & \frac{\upsilon-1}{12a^2} - \frac{1}{6b^2} & \frac{3\upsilon-1}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{12a^2} + \frac{1}{3b^2} & \frac{1-\upsilon}{8ab} & \frac{1-\upsilon}{6a^2} + \frac{1}{3b^2}
\end{bmatrix}
$$

5.3.2. Ecuațiile de mișcare pentru un element finit

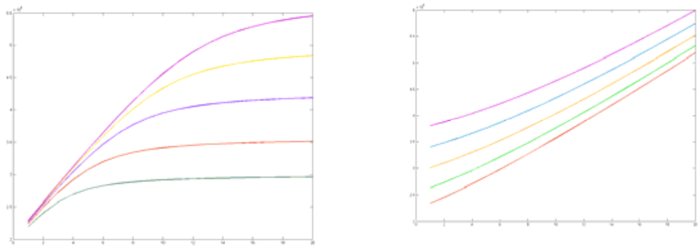
Pentru un element finit dreptunghiular calculul vaslorilor proprii este făcut pentru diferinte variante dimensionale.





a. Prima valoare proprie funcție de rap. a/b; b. A doua valoare proprie funcție de rap. a/b

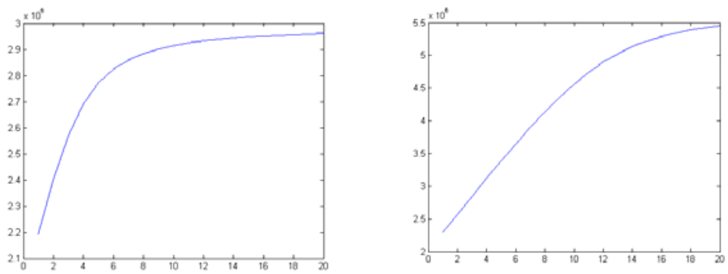
Figura 5.2. Variația valorilor proprii pentru diferite dimensiuni



a b

a. Prima valoare proprie pentru 5 valori ale rap. a/b; b. A doua valoare proprie pentru 5 valori ale rap. a/b;

Figura 5.3



a Prima valoare proprie pentru a/b=2; b. Prima valoare proprie pentru a/b=3

Figura.5.4

Pentru un element finit dreptunghiular, calculul este făcut calculul valorilor proprii pentru unele variante geometrice. Se poate observa o oarecare variație a valorilor proprii având în vedere geometria dreptunghiului.

5.3.3. Aplicație. Placă dreptunghiulară în mișcare de rotație

Se consideră o placă cu dimesiunile a = 0,2 m și b = 0,16 m. Grosimea este 0,001 m iar modulul lui Young este 210 GPa. Densitatea este 7.800 kg/m^3 (Fig.6.5).

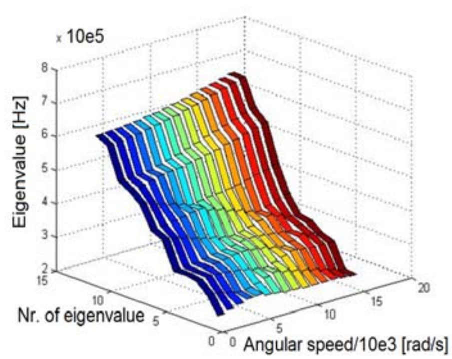


Figura 5.7. Primele 15 valori proprii pentru diferite viteze unghiulare

In Fig. 5.7 sunt reprezentate primele 15 valori proprii pentru o viteză unghiulară de 14.000 rad/s.

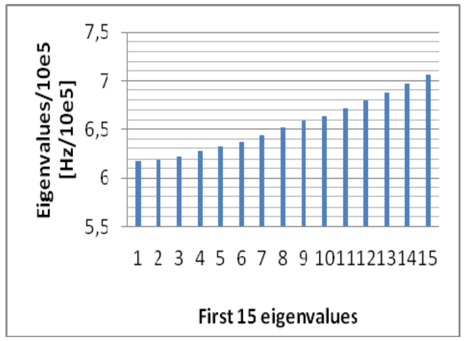
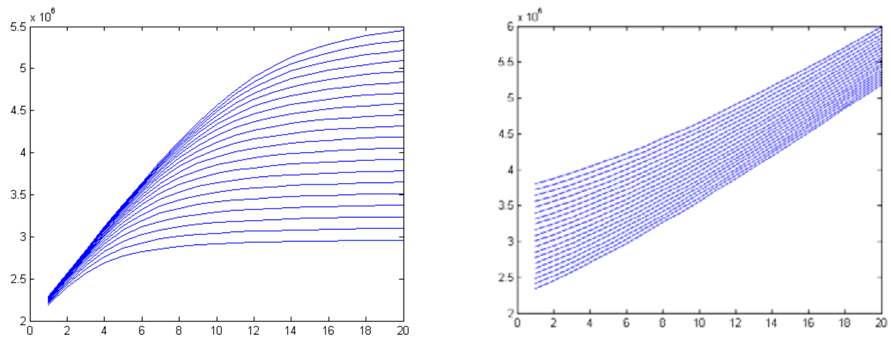


Figura 5.8. Primele 15 valori proprii pentru o viteză unghiulară de 14.000 rad/s

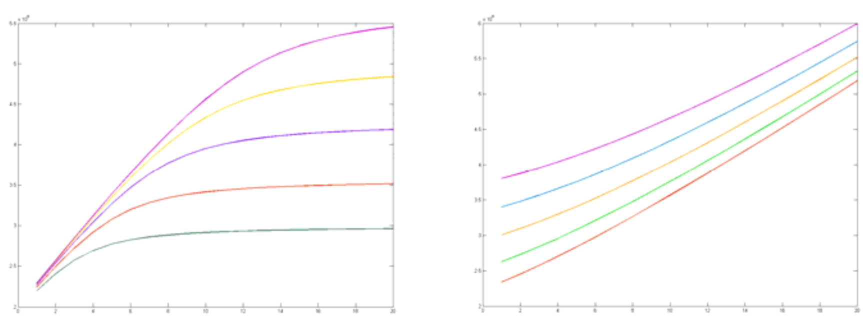
5.3.4. Mişcarea elementului finit patrulater în stare de membrană



a b

a. Prima valoare proprie pentru valori diferite ale raportului a/b; b. A doua valoare proprie pentru valori diferite ale raportului a/b

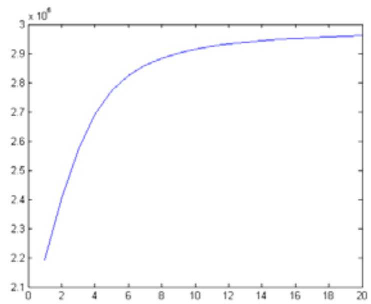
Figura 5.9



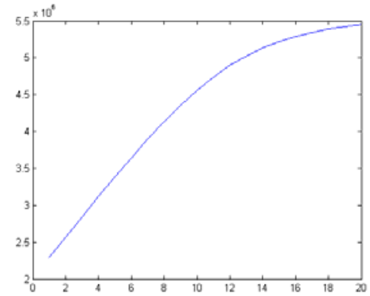
a b

a. Prima valoare proprie pentru 5 valori diferite ale raportului a/b; b. A doua valoare proprie pentru 5 valori diferite ale raportului a/b

Figura 5.10



a



b

a. Prima valoare proprie pentru a/b=2; b. Prima valoare proprie pentru a/b=3

Figura 5.11

5.4. Element finit triunghiular încovoiat

În cazul elementului finit triunghiular încovoiat vor apărea nouă grade de libertate: deplasarea normală w, precum şi rotațiile în jurul axelor sistemului de referință (ox, oy). Luând în considerare deplasările vârfurilor, se poate scrie următoarea expresie:

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + 2C_5 xy + C_6 y^2 + 4C_7 x^3 + 4C_8\left(xy^2 + x^2 y\right) + 4C_9 y^3 .$$

Dacă se scriu ecuațiile pentru θ şi φ vom avea:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x};\ \varphi = \frac{\partial w}{\partial y} .$$

Relațiile anterioare se scriu pentru vârfurile elementului şi vom obține următoarea relație:

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ \varphi_0 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 4a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 12a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 4a^2 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 4b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 12b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{Bmatrix}$$

Astfel, sub formă prescurtată se va putea scrie:

$$\{\delta\} = [A] \cdot [C]$$

Din ecuația de mai sus se vor determina constantele C:

$$[C] = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

Inversa matricei A:

$$[\mathrm{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^2} & -\frac{2}{a} & 0 & \frac{3}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2b^2-2ab} & \frac{b}{2a^2-2ab} & 0 & 0 & \frac{b}{2a^2-2ab} & 0 & \frac{a}{2b^2-2ab} & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{2a^3} & \frac{1}{4a^2} & 0 & \frac{1}{2a^3} & \frac{1}{4a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4b^2-4ab} & \frac{1}{4a^2-4ab} & 0 & 0 & \frac{1}{4a^2-4ab} & 0 & \frac{1}{4b^2-4ab} & 0 \\ \frac{1}{2b^3} & 0 & \frac{1}{4b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2b^3} & 0 & \frac{1}{4b^2} \end{bmatrix}$$

Matricea maselor va avea forma:

$$[M] = \int_0^l \int_0^l [N]^T [N] \cdot a \cdot b \cdot e \cdot \rho \cdot dxdy = \int_0^a \int_0^{b - \frac{b}{a}x} [N]^T [N] \cdot a \cdot b \cdot e \cdot \rho \cdot dydx \ .$$

5.5. Element finit dreptunghiular încovoiat

Dacă se adoptă elementul finit cu douăsprezece grade de libertate (o deplasare w şi două rotiri θ şi φ în fiecare vârf), se poate lua drept câmp de deplasări w un polinom de gradul patru , care să conțină doisprezece parametrii:

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 xy + C_6 y^2 + C_7 x^3 + C_8 x^2 y + C_9 y^2 x + C_{10} y^3 + C_{11} x^3 y + C_{12} xy^3 .$$

Dacă se scriu deplasările şi rotirile pentru cele patru puncte ale structurii atunci vom avea:

$$w_i = (w)_{x_i, y_i} \quad ; \ \theta_i = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} \quad ; \ \varphi_i = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i}$$

Ecua ia de mai sus se poate scrie sub formă prescurtată astfel:

$$\{\delta\} = [A] \cdot [C]$$

Din ecuația de mai sus se vor determina constantele C:

$$[C] = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}$$

Pentru a scrie matricea de rigiditate a elementului se va folosi relația:

$$K = \int_V \left([A]^{-1} \right)^T [B]^T [D][B][A]^{-1} dV = \int_V [a]^T [D][a] dV$$

6. MĂSURĂTORI EXPERIMENTALE

6.1. Introducere

Teoria dezvoltată în cadrul tezei a fost verificată pe un mecanism cu două grade de libertate a unei pompe eoliene utilizate pentru scoaterea apei. S-au făcut două tipuri de experimente. În primul set de experimente s-a determinat, prim metode optice, accelerațiile unor puncte ale mecanismului, accelerații care vor fi utilizate în cadrul modelului de calcul propus. Aceste accelerații ar putea fi determinate, din punct de vedere teoretic și prin calcul. Numărul mare de parametrii implicați însă în acest tip de abordare și posibilitatea redusă de control a acestora, fac ca valorile obținute prin calcul să fie departe de realitate. Intervin aici frecările care apar și jocurile din articulațiile mecanismului care pot face ca rezultatele obținute să nu fie corecte.

În al doilea set de experimente s-au determinat pulsațiile proprii ale mecanismului studiat în cazul funcționării acestuia.

6.2. Măsurarea accelerațiilor unor puncte ale barei

6.2.1. Echipamentul utilizat și montajul experimental

În imaginea de mai jos este prezentată poziționarea nodurilor de pe bara elastică, în vederea determinării pozițiilor punctelor în timpul funcționării mecanismului.

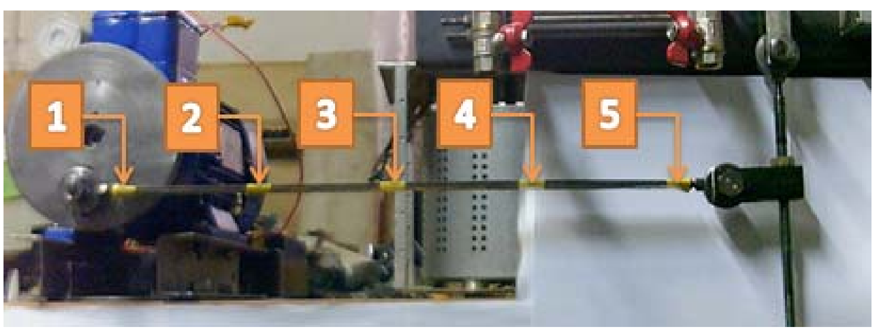


Figura 6.1

Markerii poziționați pe bară vor fi urmăriți cu ajutorul unui program de analiză şi modelare video. În urma înregistrării pozițiilor markerilor cu ajutorul programului de analiză se vor determina vitezele şi accelerațiile punctelor, precum şi traectoriile parcuse de acestea.

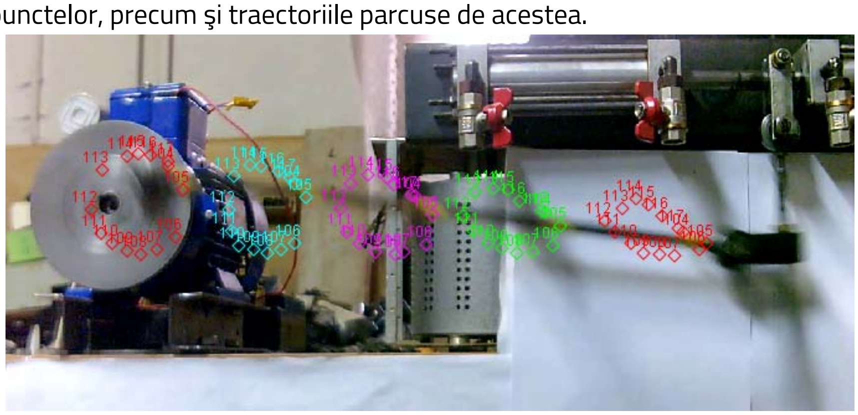


Figura 6.6. Urma punctelor de pe bara elastică la n= 140 rot/min

6.2.2. Rezultatele măsurătorilor

În graficele de mai jos sunt prezentate traectoriile fiecărui punct ales de pe bară, cu ajutorul datelor prelevate de programul de analiză video. Graficele sunt reprezentate în funcție de pozițiile date de principalele axe de coordonate ale sistemului ales, XOY.

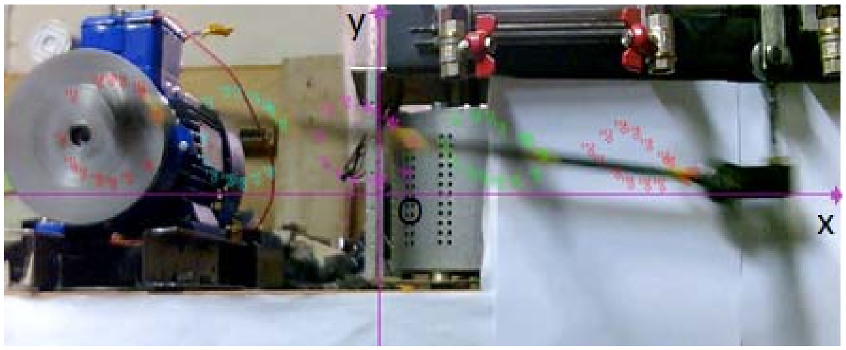


Figura 6.7. Poziționarea axei de referință

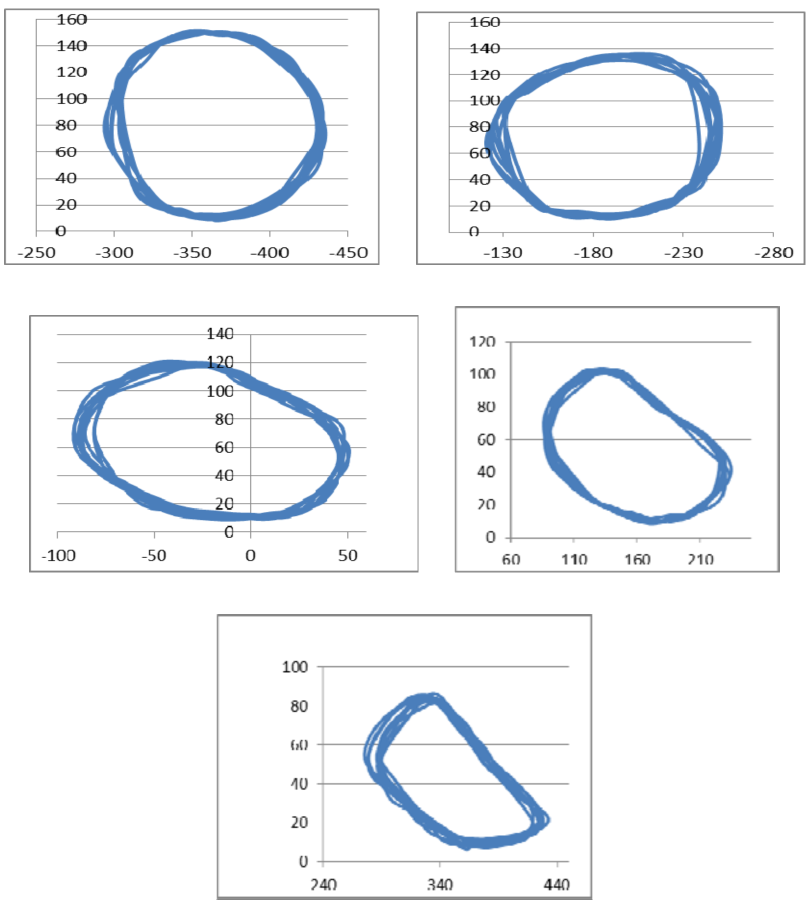


Figura 6.12. Traectoriile punctelor la n= 140 rot/min

În graficul de mai jos sunt prezentate variațiile pozițiilor punctului central 3 în funcție de timpul necesar deplasării la n= 140rot/min:

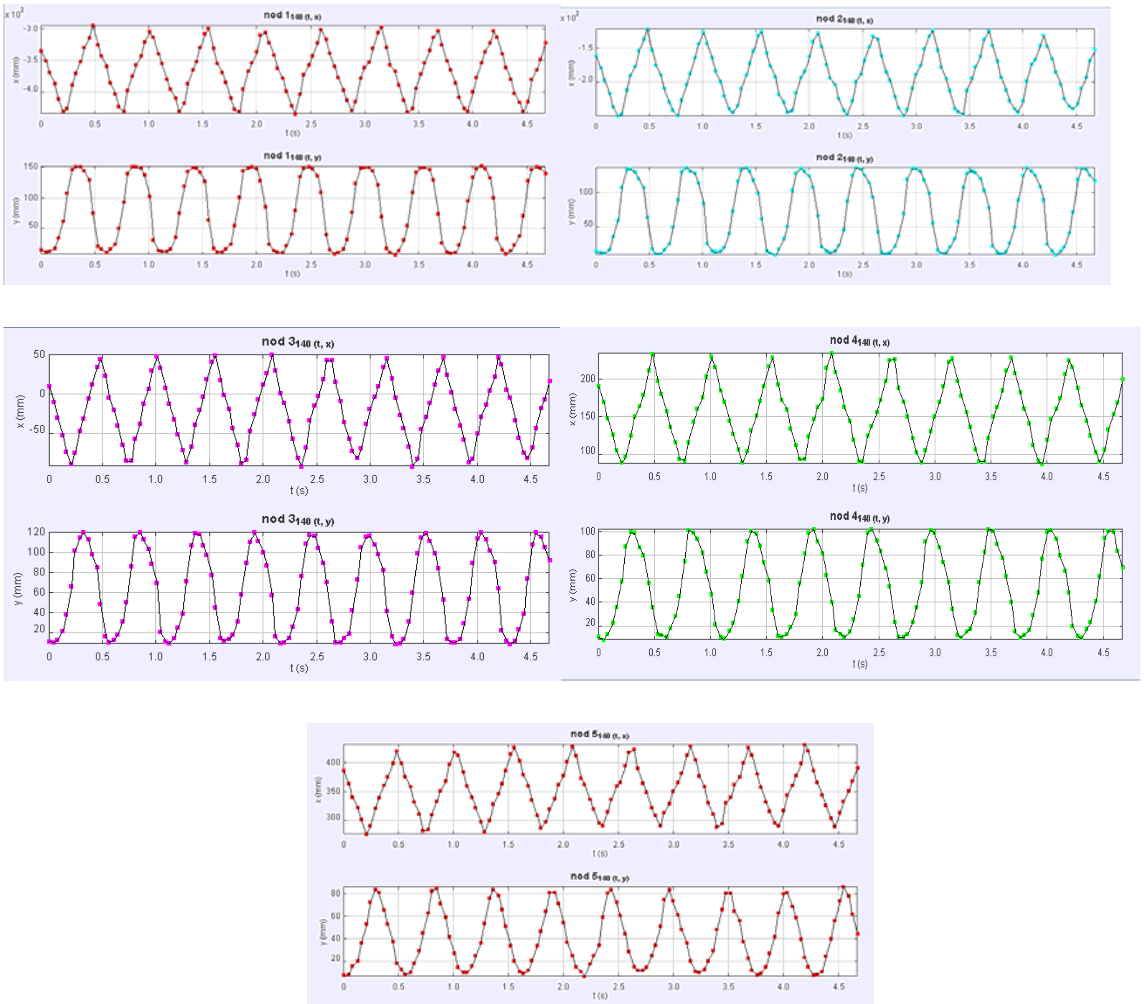


Figura 6.14

Câmpul de viteze şi cel de accelerații au fost determinate cu ajutorul metodei optice menționate anterior. Ele sunt prezentate în figurile de mai jos, luând în considerare doar primele trei noduri. Aceste valori obținute vor fi utilizate pentru a determina analitic valorile proprii ale barei elastice din cadrul mecanismului utilizat.

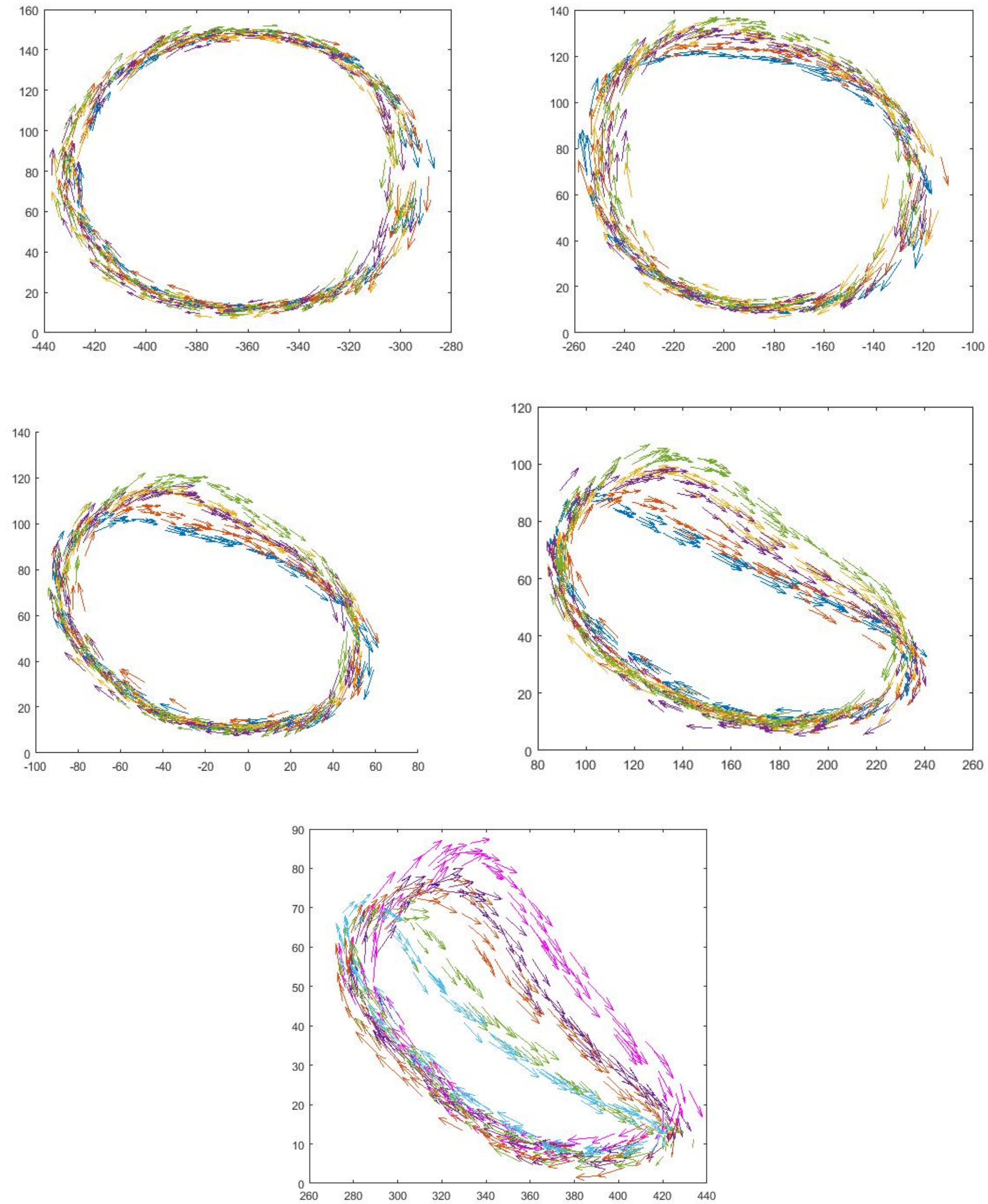
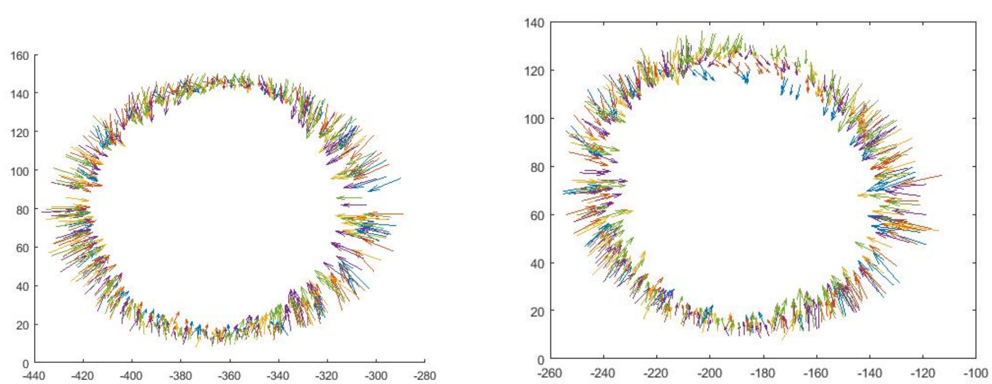


Figura 6.15 Reprezentarea câmpului de viteze



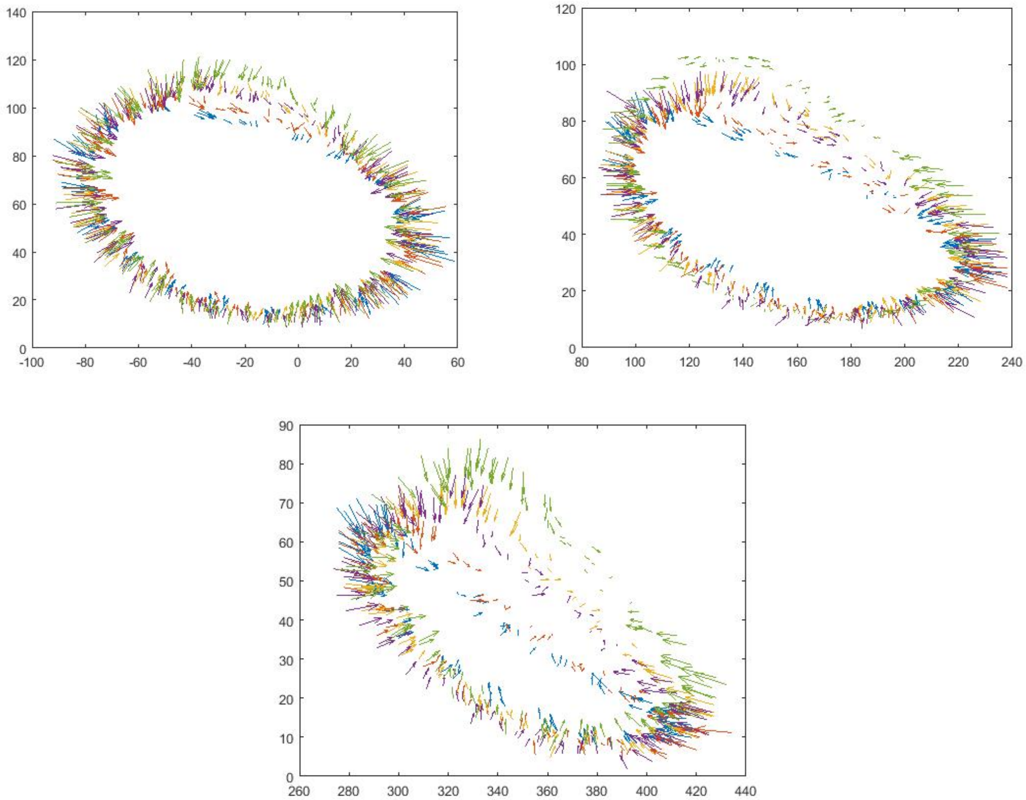
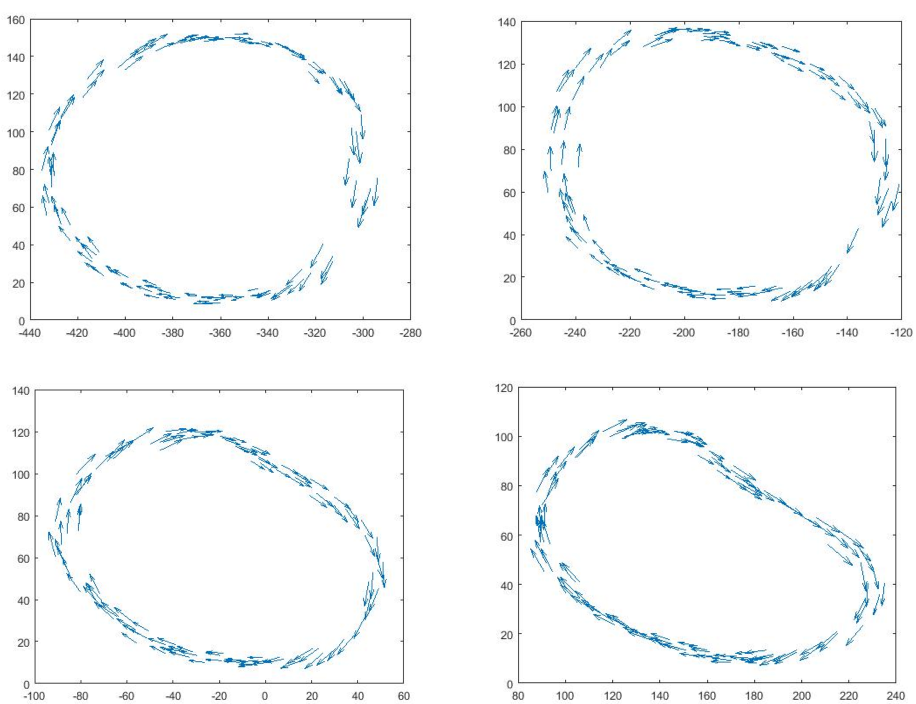


Figura 6.16. Reprezentarea câmpului de accelerații



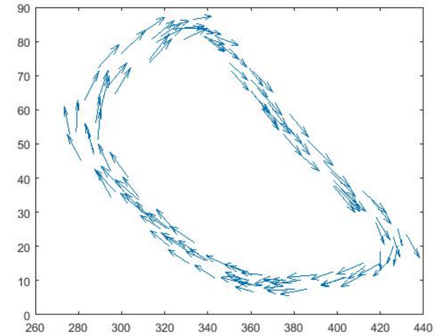


Figura 6.25. Câmpul de viteze la n= 140 rot/min pentru fiecare nod

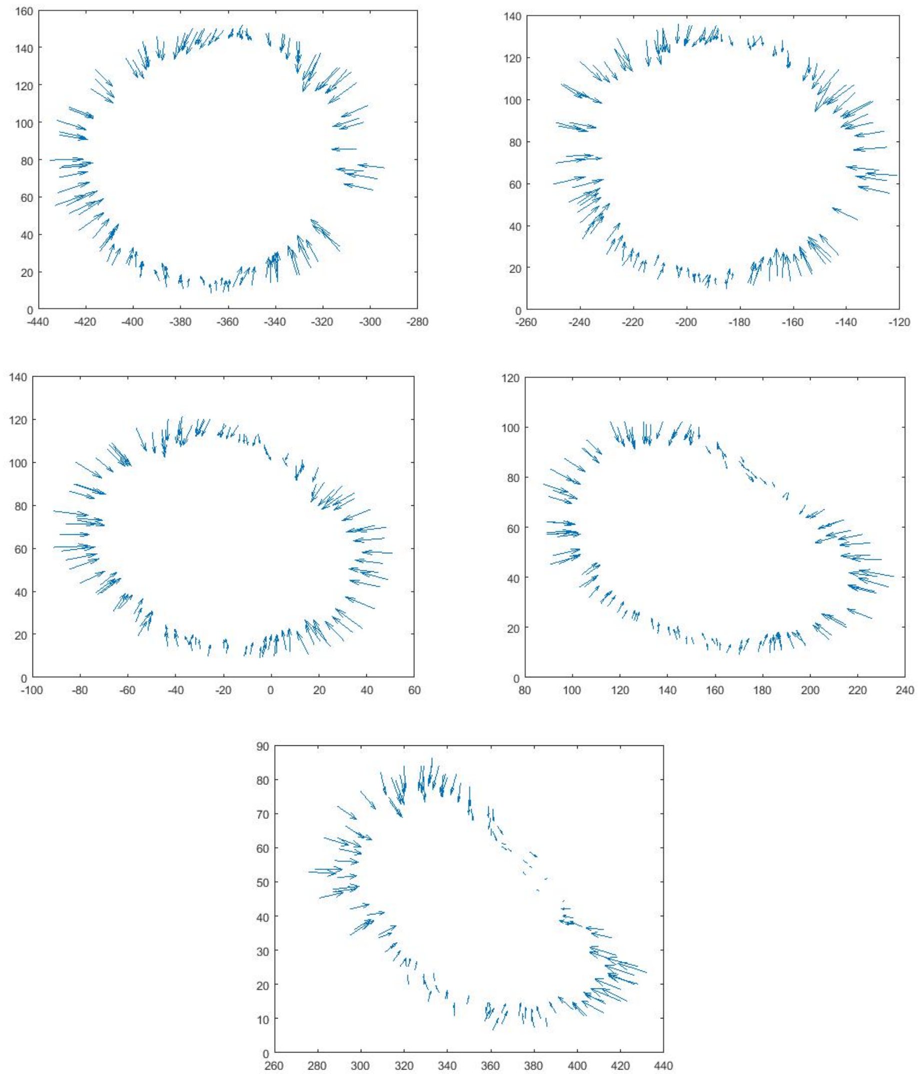


Figura 6.26. Câmpul de accelerații la n= 140 rot/min pentru fiecare nod

Măsurătorile experimentale efectuate au fost utilizate pentru a determina spectrul de frecvența al barei elastice.

Rezultatele prezentate în graficele de mai jos sunt preluate pentru aceeaşi turație de functionare a mecanismului, 140 rot/min, aceasta fiind turația maximă la care s-au realizat măsuratori experimentale.

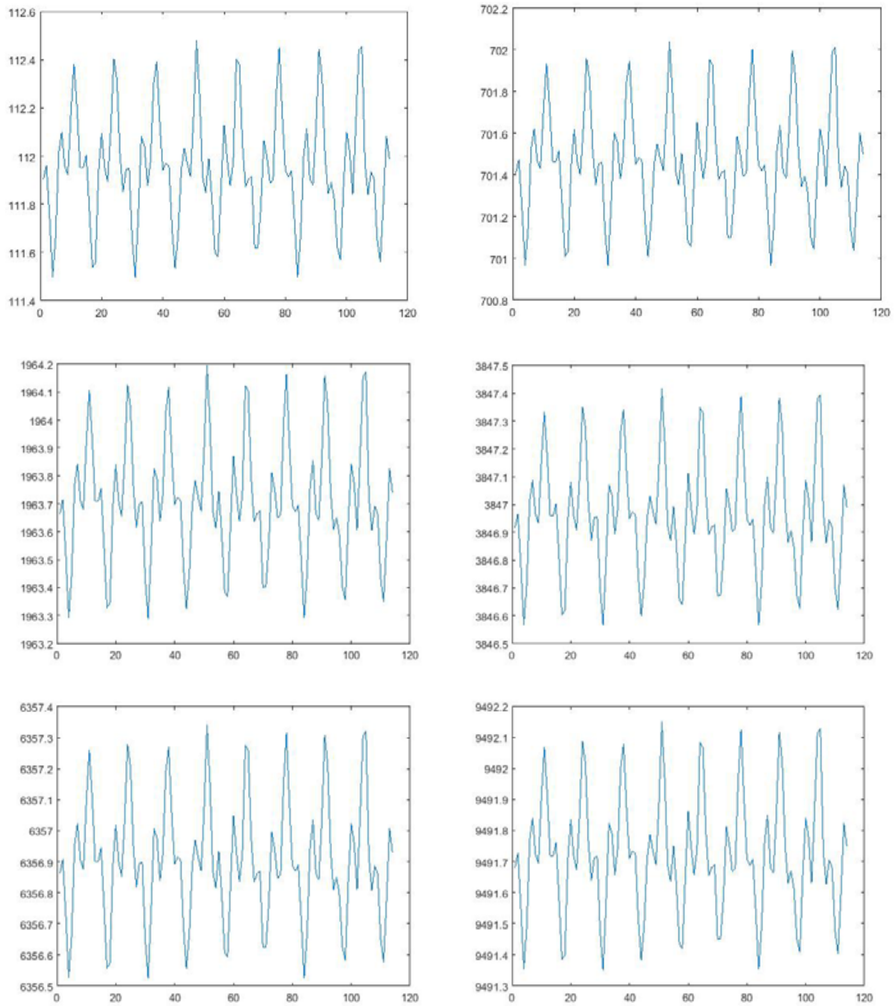


Figura 6.27.

Fig. 6.27 reprezentarea primelor 6 valori proprii in cazul a 10 elemente finite, pentru n= 140 rot/min

6.3. Măsurarea vibrațiilor proprii ale barei elastice

6.3.1. Echipamentul utilizat și montajul experimental

Echipamentul utilizat pentru realizarea măsurătorilor a constat dintr-un set de acceleormetre Delta Tron TEDS tip 4507 care au fost poziționate pe grinda încercată în şase puncte. Accelerometrele au fost cuplate la placa de achiziție PULSE 3560 C cuplată la un sistem desktop pentru a putea preleva datele experimentale.

Pentru a solicita structura, aceasta a fost lovită cu ciocanul de impact tip 8206-003, in mai multe puncte de interes, pentru a studia răspunsul structurii.

In cele ce urmează vor fi prezentate elementele utilizate pentru realizarea măsurătorilor experimentale:

- Accelerometre Delta Tron TEDS tip 4507 [59]

Acest tip de accelerometru este utilizat pentru analiza modală, analiză structurală şi măsurători modale. Este realizat din titan şi conține un conector integrat din titan. Greutatea aceelerometrelor este mică pentru a oferi o sensibilitate ridicată la factorii de mediu. Ele se conectează la placa de achiziţii compatibilă cu ajutorul unor cabluri.

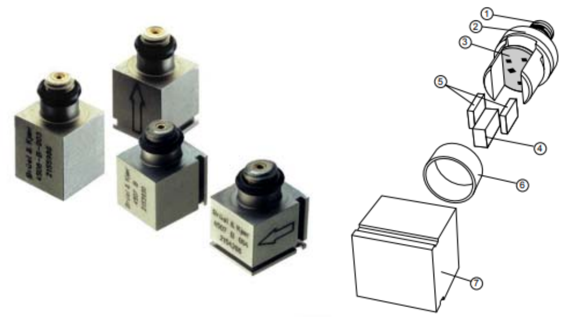


Figura 6.28

1- conector 10-32 UNF

2-parte superioară ce conţine preamplificatorul 3

4- masa seismică

5- mase piezometrice

6- inel de prindere

7- carcasă de titan

- **Ciocan de impact 8206-003[60]**

Poate fi utilizat pentru diferite tipuri de structuri (de la mici la mari). Măsoară funcţiile de răspuns în frecvenţă utilizînd tehnici excitatoare de impact. Sensibilitate de la 1 la 22 mV/N. Ciocanul are incorporat un compensator de accelerare care elimină zgomotele obţinute din rezonanţa ciocanului. Astfel rezultatul este un semnal curat, ce reprezintă excitaţia atât în aplitudine cât şi în fază.

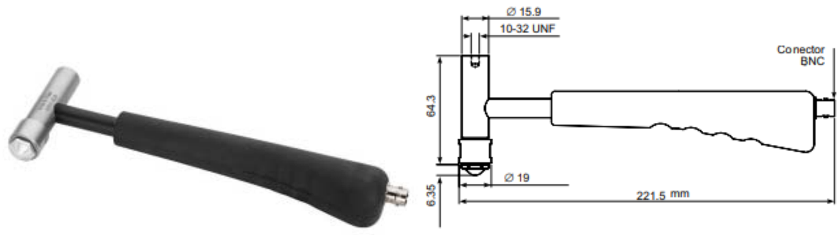


Figura 6.29

Accelerometrele preiau răspunsul structurii care a fost excitată cu ajutorul ciocanului de impact, transmit semnalul la placa de achiziţii, astfel fiind prelevate datele exerimentale.

- **Placa de achiziţie PULSE 3560 C**

Figura 6.30

Măsurătorile experimentale au fost realizate în cadrul Departamentului de Inginerie Mecanică al Universităţii, utilizand echipamentele laboratorului de analiză modală şi vibraţii.

Montajul experimental

Montajul experimental utilizat este compus dintr-un motor cuplat la un transformator, pe care este poziționat un volant. De volant este legată o bielă care la rândul ei antrenează tija pendulului. La unul din capetele tijei pendulului este legată o greutate, iar la celălalt capăt se află fouă pompe cu piston.

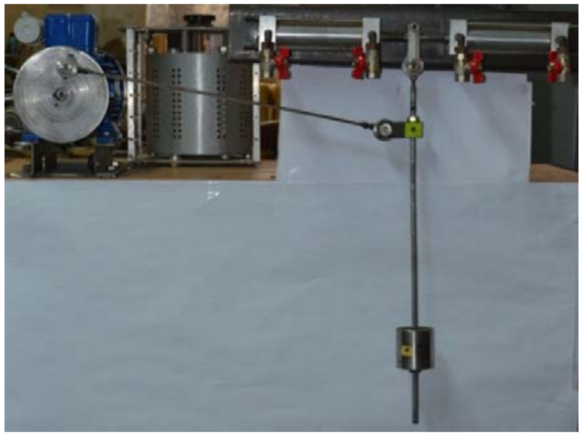


Figura 6.31. Montaj experimental în repaus

Biela montată pe mecanism reprezintă o bară de secțiune dreptunghiulară pe suprafața căreia s-au montat suporturile accelerometrelor.

Pe fiecare suport se ataşează accelerometrele care vor fi cuplate la placa de achiziții.

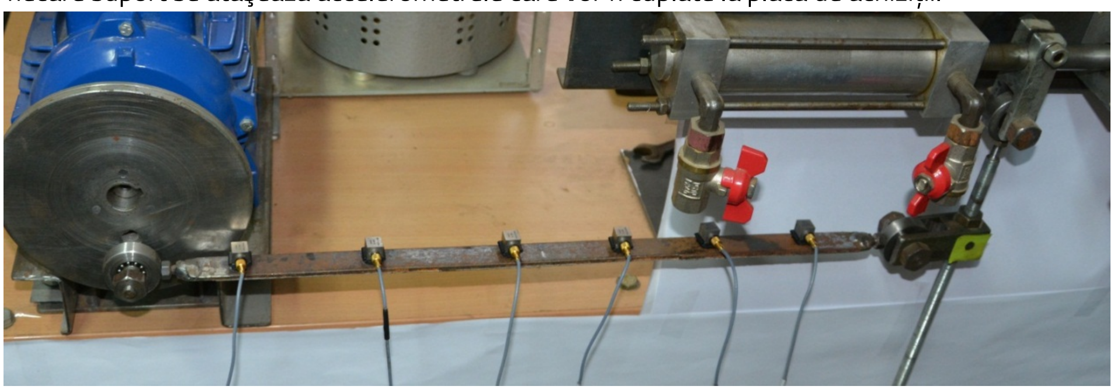


Figura 6.34. Accelerometrele montate pe grindă şi cuplate la placa de achiziții

6.3.2. Efectuarea testelor

În acest capitol este prezentat modul în care au fost efectuate măsurătorile experimentale utilizând montajul prezentat anterior. Modul de testare constă în solicitarea structurii studiate cu ajutorul ciocanului de impact. Accelerometrele dispuse pe bară vor înregistra deplasările şi vibrațiile transmise pe structura studiată. Semnalul a fost preluat de către placa de achizi ii.

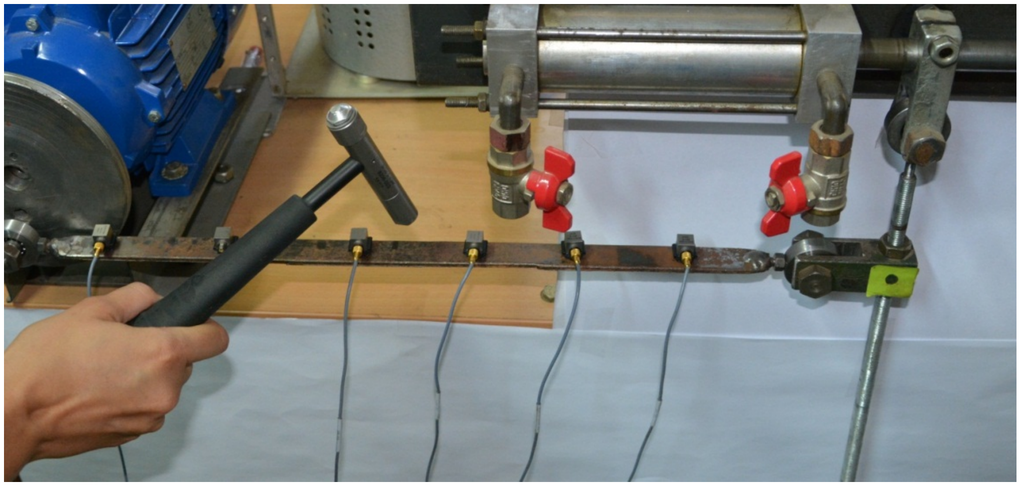


Figura 6.35. Solicitarea grinzii utilizând ciocanul de impact

Solicitările au fost efectuate în diferite poziții ale volantului. S-a variat si locul în care structura a fost solicitată cu ajutorul ciocanului de impact pentru a putea extrage valorile care corespund doar barei.

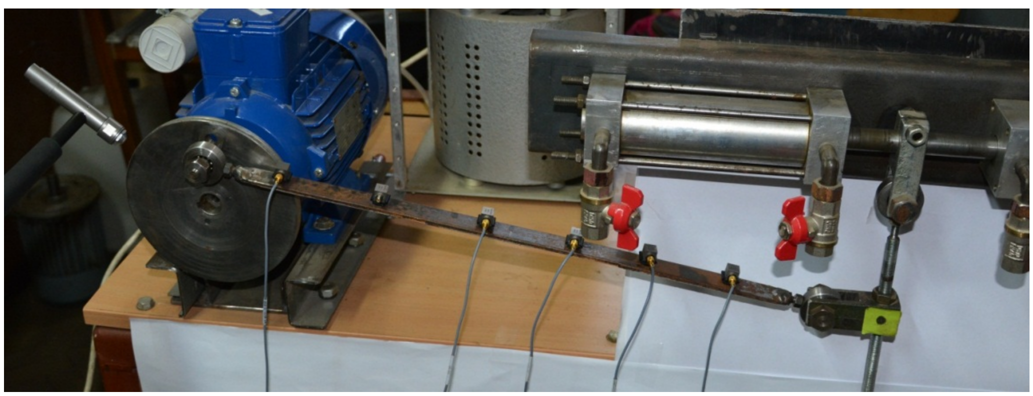


Figura 6.36. Solicitarea grinzii cu lovitură în volant, utilizând ciocanul de impact

Procesul de achiziție a datelor obținute în urma măsurătorilor experimentale s-a realizat conform schemei din imaginea de mai jos.

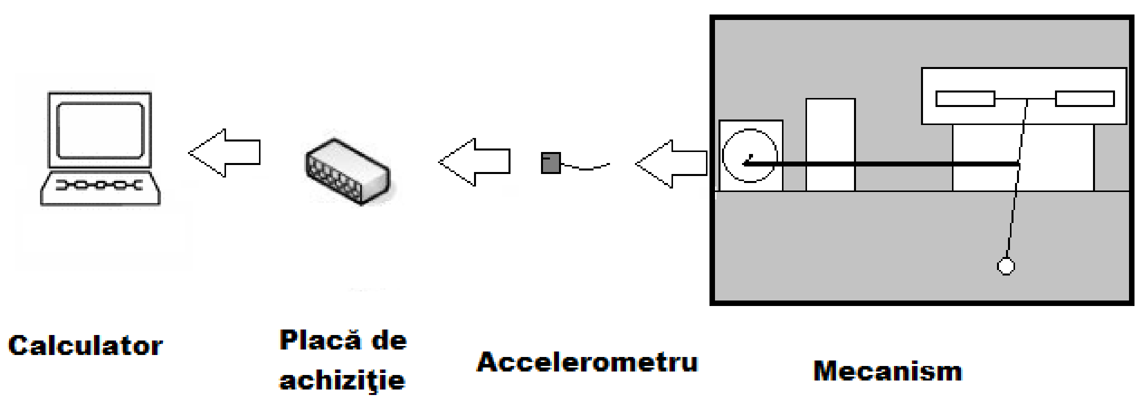


Figura 6.37. Achiziția datelor experimentale

6.3.3. Rezultatele obținute

Pentru a evidenția răspunsul în frecvență al barei studiate se va trata cazul accelerometrului 4, plasat în apropierea centrului platbandei. Pentru a provoca variații de frecvențe s-au lovit diferite puncte din ansamblul studiat utilizând ciocanul de impact. S-au realizat mai multe măsurători pentru diferite cazuri de excitare a structurii:

- Lovitură în greutatea pendulului

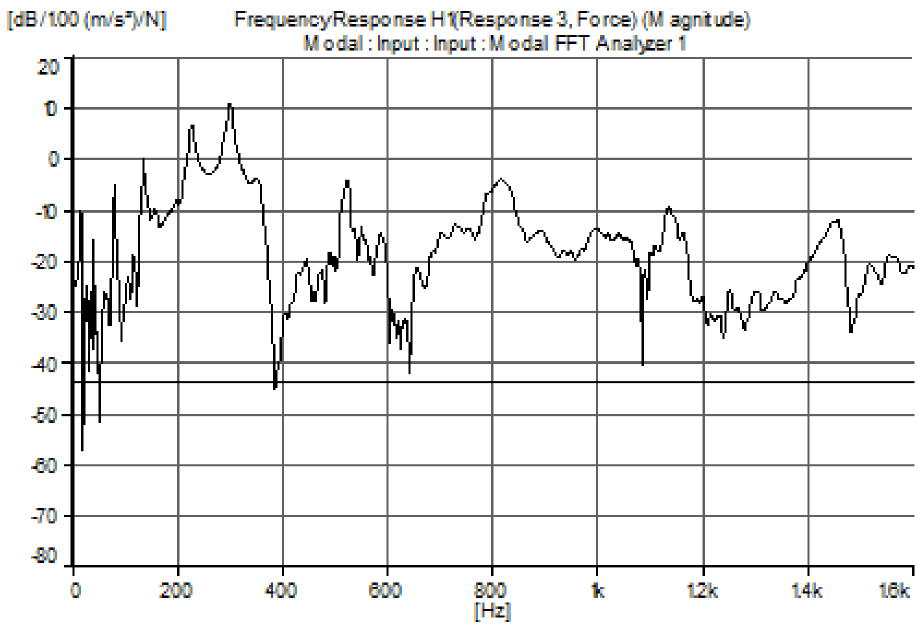


Figura 6.38. Răspunsul în frecvență (dB)

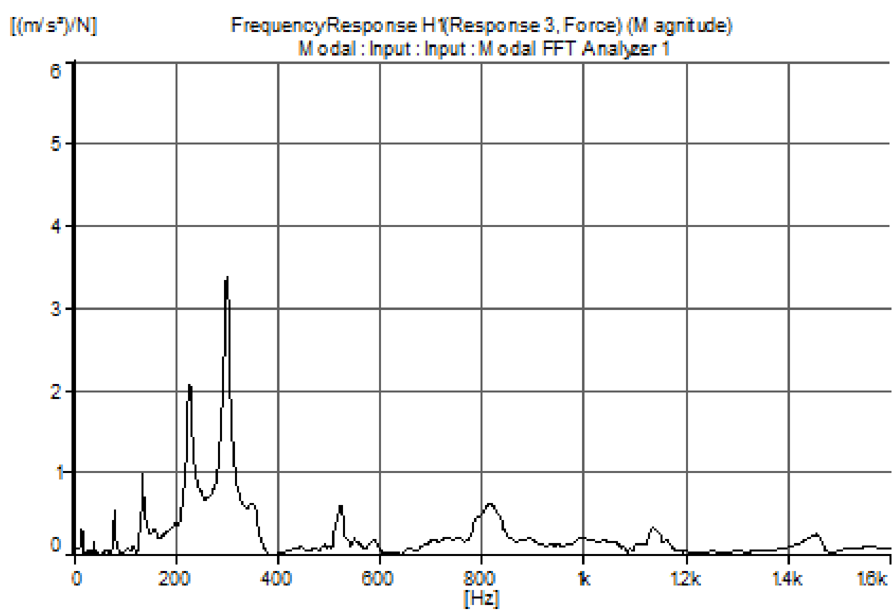


Figura 6.39. Răspunsul în frecvență

- Lovitură în volant în partea superioară

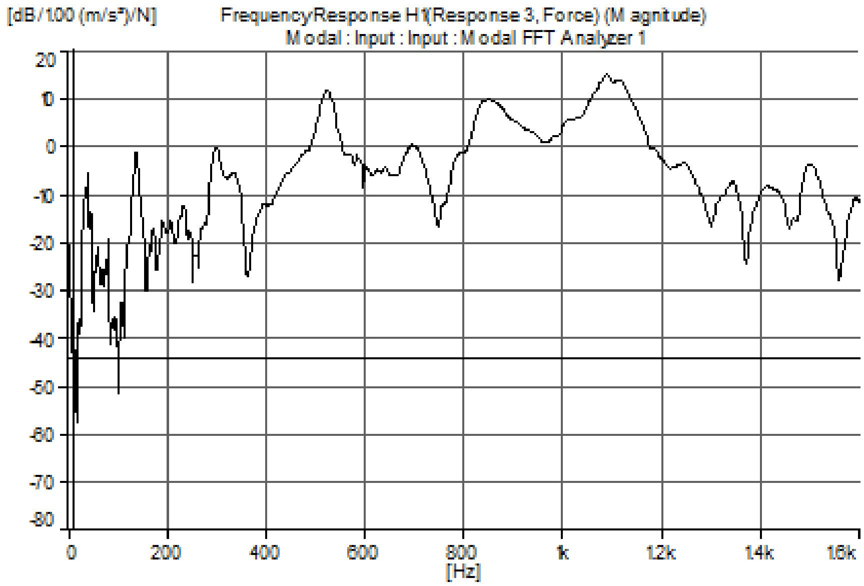


Figura 6.40. Răspunsul în frecvență (dB)

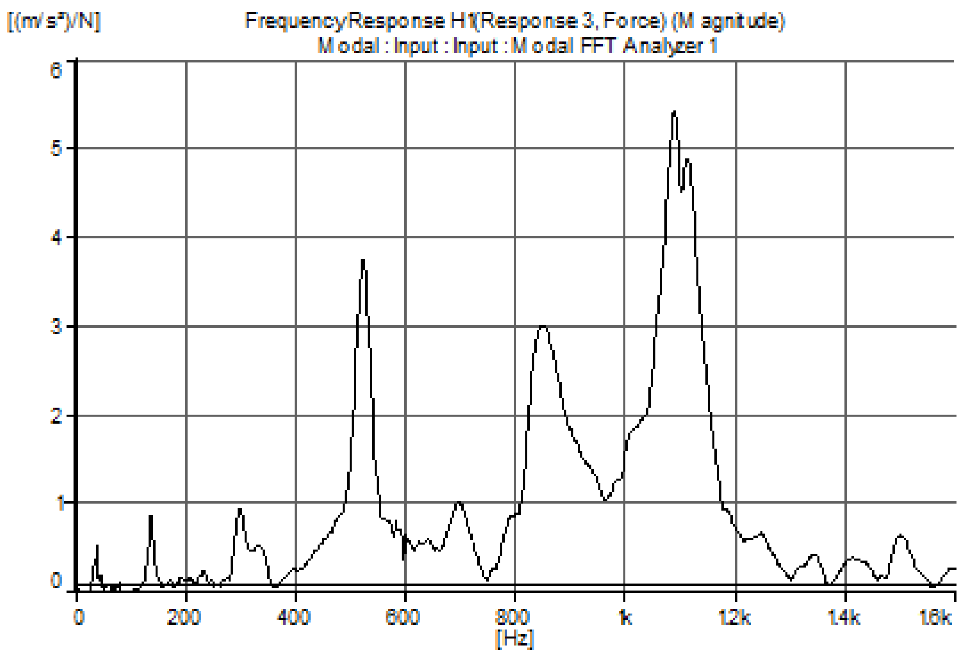


Figura 6.41. Răspunsul în frecvență

- Lovitură în volant în partea inferioară

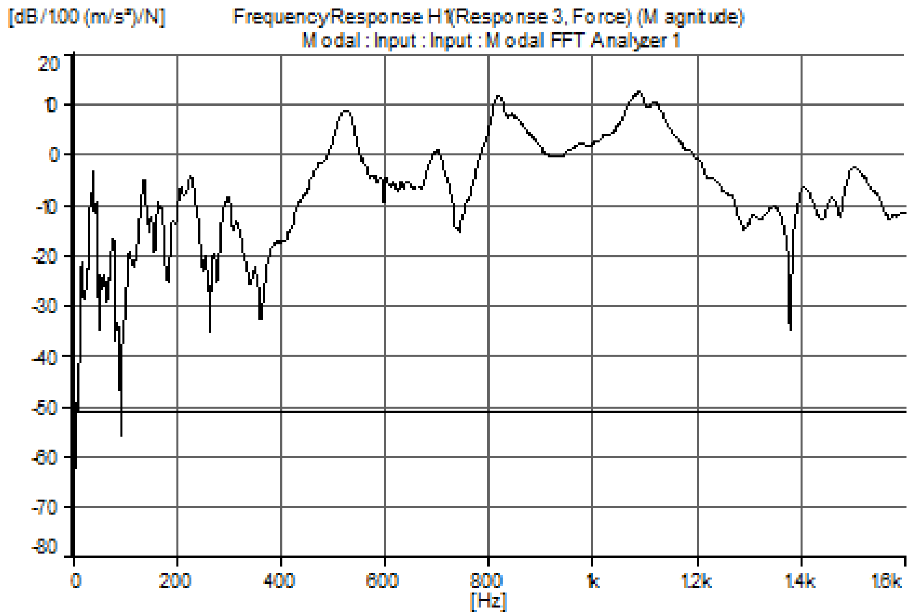


Figura 6.42. Răspunsul în frecvență (dB)

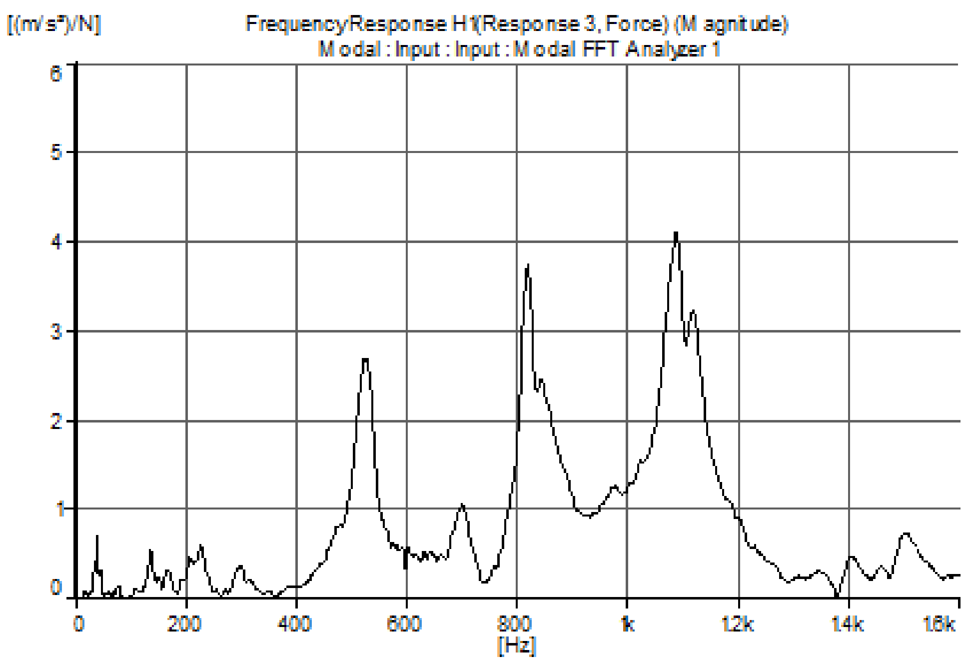


Figura 6.43. Răspunsul în frecvență (dB)

S-a studiat mecanismul și în momentul mișcării barei, analiza realizându-se pentru mai multe accelerații ale volantului. S-a luat în considerare accelerometrul 4, situat în zona centrală a barei. În graficele de mai jos este prezentat spectrul Fourier pentru diferite accelerații ale volantului.

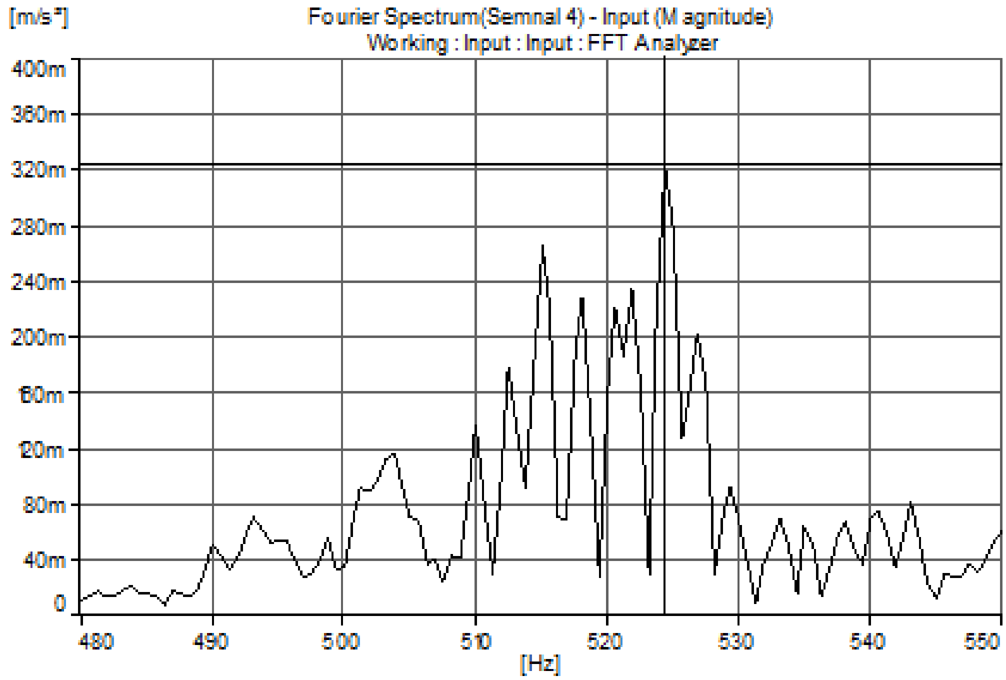


Figura 6.44. Analiza Fourier – accelerații – 160 rot/min

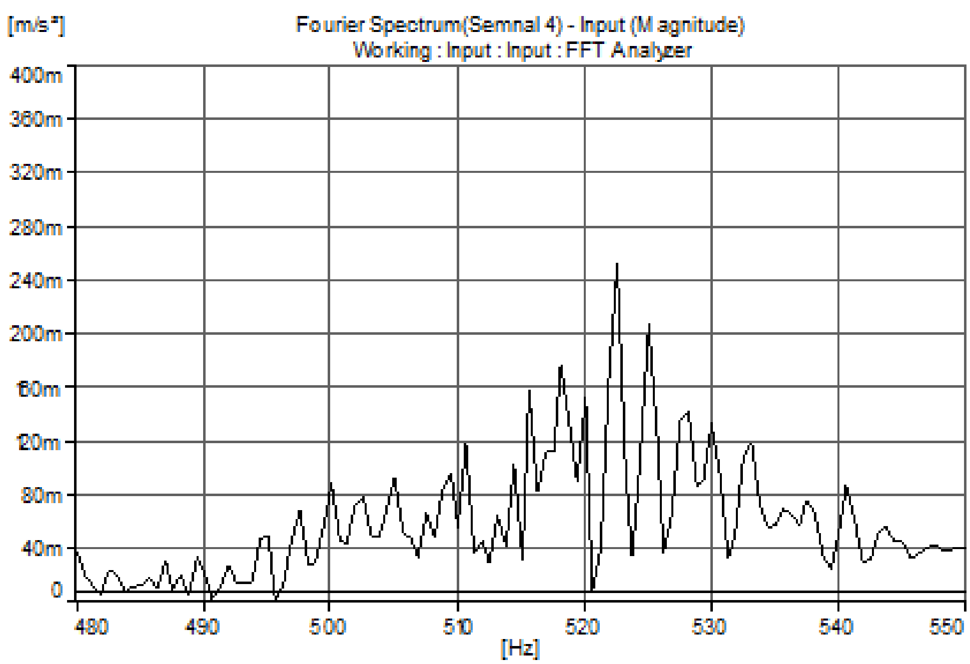


Figura 6.45. Analiza Fourier – accelerații – 140 rot/min

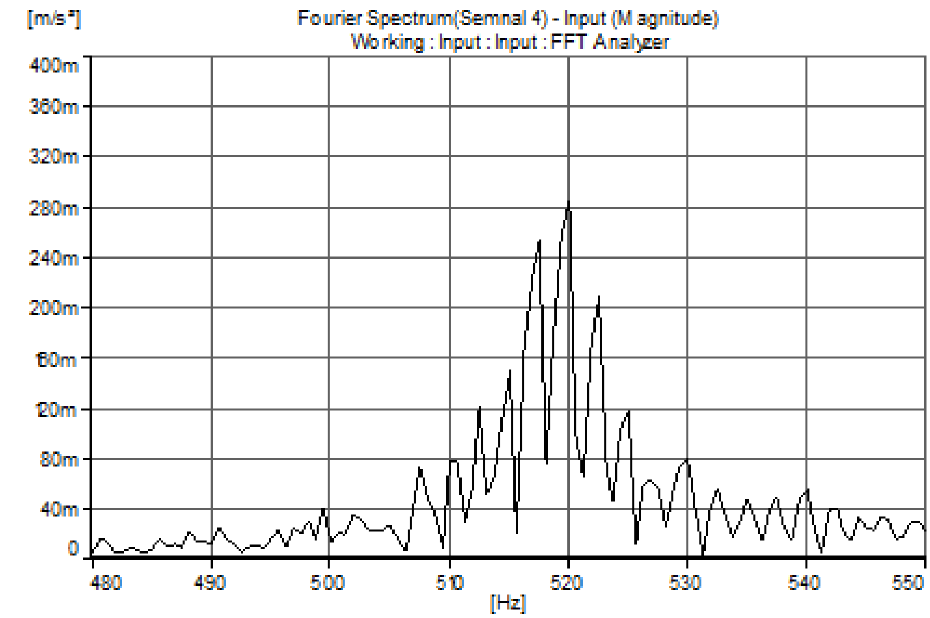


Figura 6.46. Analiza Fourier – accelerații – 120 rot/min

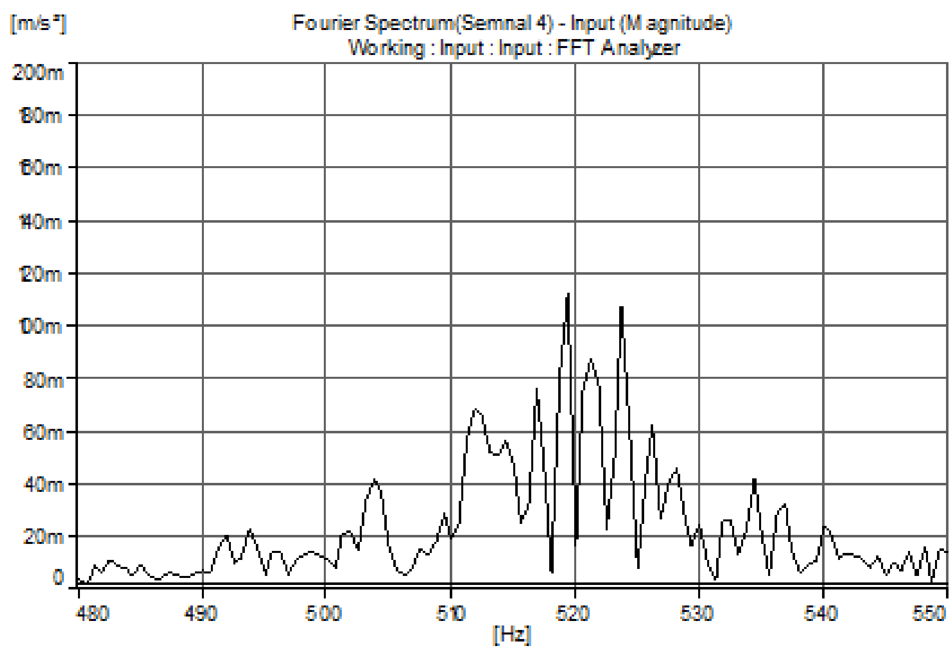


Figura 6.47. Analiza Fourier – accelerații – 100 rot/min

7. CONTRIBUȚIILE AUTORULUI, CONCLUZII, DISEMINAREA REZULTATELOR, PERSPECTIVE DE DEZVOLTARE A CERCETĂRII

7.1. Concluzii generale

Lucrarea se încadrează în cadrul cercetărilor care se ocupă de sistemele multicorp cu elemente elastice, un domeniu în continuă dezvoltare în ultimile decade, datorată mai ales dezvoltaării industriei *și* fabricației de roboți și de manipulatoare.

7.2. Contribuții personale

Metodele obținute în cadrul tezei pot fi utilizate la diversificarea tipurilor de structuri studiate si în felul acesta se poate obține ca procesul de proiectare, de calcul sau de fabricare a unor astfel de sisteme mecanice să devină mai simplu iar timpii alocați acestei etape în cadrul unul proiect să se micșoreze. Teza s-a ocupat de:

- analiza comparativă a unor elemente finite unidimensionale cu mișcare de rotatie cu axă fixă. unor tipuri de elemente finite existente in cadrul aplicatiilor inginerești;

- s-au dezvoltat tipuri noi de elemenete finite bidimensionale pentru care s-au scris ecuațiile de mișcare;

- s-au determinat proprietățile pe care le au ecuațiilor de mișcare pentru elementele finite analizate;

- s-au făcut calcule pentru cateva cazuri concrete de elemente finite;

- s-a făcut validarea experimentală a rezultatelor prin realizarea unui stand cu un mecanism al unei pompe eoliene de apă pe care s-au făcut măsurători;

- pe baza rezultatelor obținute se pot formula recomandări care să ajute proiectanții unor astfel de structuri să utilizeze rezultatele obținute în cadrul tezei.

In cadrul tezei s-au abordat urmatoarele subiecte:

- Analiza stadiului în care se află cercetările în domeniul tezei prin analiză critică a lucrărilor elaborate de alți cercetători. Este un domeniu interdisciplinar și impune o gamă largă de lucrări studiate. Domeniul se întrepătrunde cu mecanica, rezistența materialelor, organe de mașini și mecanisme, matematica, metode numerice de calcul, construcții, măsurători experimentale. În cadrul secțiunii Bibliografie au fost trecute doar lucrările semnificative pentru tema aleasă, alese dintr-un număr foarte mare de lucrări analizate existente în cadrul domeniului;
- Identificarea direcției de cercetare în cadrul domeniului, stabilirea temei și a obiectivelor principale care urmează a fi realizate. Identificarea unor noi tipuri de structuri care nu au mai fost analizate în trecut din acest punct de vedere;
- Identificarea metodelor care vor fi utilizate pentru rezolvarea obiectivelor;

- Modelarea sistemelor studiate utilizând Metoda Elementelor Finite;
- Analiza dinamică a sistemelor multicorp utilizând proceduri specifice;
- Analiza metodelor de scriere a ecuațiilor de mișcare pentru un element finit și utilizarea unui formalism adecvat pentru dezvoltarea cercetărilor;
- Analiza critică a metodelor de modelare și de rezolvare cantitativă și calitativă a ecuațiilor diferențiale de ordinul doi obținute;
- Analiza și identificarea celor mai potrivite metode de calcul numeric pentru rezolvarea problemelor speciale impuse de tematică;
- Determinarea unor proprietăți caracteristice în cazul studiului unor astfel de sisteme;
- Conceperea și realizarea fizică a unui stand cu un mecanism care simuleaza o pompa de apă eoliană;
- Analiza unui sistem structural real, modelarea, calculul la vibrații și verificarea teoretică a proprietăților enunțate anterior;
- Efectuarea unor simulări numerice și compararea acestora cu rezultatele măsurătorilor;
- Analiza critică a rezultatelor teoretice obținute, concluzii și propuneri de valorificare a cercetărilor;
- Diseminarea rezultatelor prin publicarea rezultatelor în reviste indexate ISI și prin participarea la conferințe științifice naționale și internaționale;
- Identificarea unor posibile viitoare direcții de cercetare și de dezvoltare ale subiectului;
- Formularea unor concluzii și indicații pentru proiectanții de structuri mecanice.

7.3. Direcții viitoare de dezvoltare

Pentru sistemele mecanice uzuale folosite în inginerie simularea pe calculator reprezintă, în momentul de față, doar o mică parte a timpului total de proiectare. Foarte mult timp este utilizat pentru formularea problemei, generarea modelului, și etapelor de pre și post procesare a rezultatelor. Următoarele tehnici, utilizate împreună cu procedurile standard de calcul a (MBS) pot reduce in mod semnificativ timpul de proiectare și pot ajuta în sensul îmbunătățirii proiectului, astfel încât să se obțină o soluție apropiată de soluția optima pentru problema respectivă.

◘ **Strategii orientate spre aplicatie**: Startegiile orientate spre aplicație pot cupla proiectarea, simularea și fabricarea lucru care poate duce la scaderea timpului de realizare a sistemului și a costurilor. Acest obiectiv este în direcția transformării tehnologiilor CAD spre un sistem de dezvoltare virtuală a produsului cu instrumente de simulare numerică incorporate;

◘ **Metode de optimizare a proiectării**. Analiza dinamică a unui (MBS) implică variabile de proiectare continue, discontinue, discrete sau intregi. Metodele actuale de optimizare opereaza, în mod obișnuit, cu variabile continue. În acest domeniu se pot adduce contribuții interesante privind optimizarea nelineara, fuzzy sau utilizarea algoritmilor genetici. Spre exemplu sunt încercări de a utiliza parametrii lingvistici în modelare întrucât descrierea lingvistică reprezintă un mod natural de transmitere a informațiilor pentru oameni.

◘ **Relitatea virtuală.** Această tehnologie poate ajuta analiștii și proiectanții să vizualizeze, să construiasca și să interacționeze cu modelele (MBS) utilizate pe calculator. Realitatea virtuală poate fi utilizată pentru a defini geometric un (MBS) dar și pentru o analiză dinamică inversă, care este tot mai utilizată în tehnică în momentul de față. Această tehnologie poate oferi o reprezentare vizuală realistică a mișcării și a forțelor care apar în punctele de interes ale sistemului.

◘ **Proiectare și analiză colaborativă a (MBS).** Mediile de vizualizare și simulare colaborative permit echipelor dispersate geografic să lucreze împreună în dezvoltarea și analizarea prototipurilor virtuale de (MBS). Aceste medii vor reduce semnificativ timpul de dezvoltare, vor reduce costurile și vor îmbunătăți calitatea și performanța viitorului (MBS). Internetul poate furniza infrastructura de comunicare pentru aceste medii.

7.4. Diseminarea rezultatelor. Lista lucrărilor publicate

Cercetările legate de analiza sistemelor MBS utilizând metoda elementelor finite sunt dezvoltate in ultimile 5 decenii in literatura de specialitate, studiile relevând diferite aspecte ale problemei. Cercetările efectuate în cadrul tezei au acoperit câteva zone mai puțin abordate dar care ar putea avea aplicații tehnice evidente. Autoarea a publicat articole cu rezultatele cercetărilor obținute, în reviste în domeniu sau în volumele unor conferințe, menționate în cele ce urmează:

- **cinci articole în reviste indexate Clarivate - Web of Science**;
- **patru lucrări în volumele unor conferințe cu proceedings-uri indexate Clarivate - Web of Science**.

Lucrări indexate ISI Web Of Science

1. **E. Chircan**, M.-L. Scutaru and C. I. Pruncu, Two-Dimensional Finite Element in General Plane Motion Used in the Analysis of Multi-Body Systems, *Symmetry*, *11*(7), 848, Symmetry in Applied Continuous Mechanics 2019. **IF 2,645.**
2. M. L. Scutaru, **E. Chircan**, M. Marin, STUDY OF AN ELASTIC BEAM, IN CENTRIFUGAL FIELD, USING FINITE ELEMENT METHOD, ACTA TECHNICA NAPOCENSIS,Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering, Vol. 62, Issue II, June, 2019, p. 251-256.
3. **E. Chircan**, M. L. Scutaru, C. Simionescu, S. Vlase, INFLUENCE OF THE NUMBER OF FINITE ELEMENTS ON DETERMINATION THE MODAL RESPONSE IN THE ANALYSIS OF MULTIBODY SYSTEMS WITH ELASTIC ELEMENTS, ACTA TECHNICA NAPOCENSIS, Series: Applied Mathematics, Mechanics , and Engineering, Vol. 62, Issue III, September, 2019, p. 489-496.
4. M.L. Scutaru, **E. Chircan**, S. Vlase, M. Marin, FINITE ELEMENT USED IN THE DYNAMIC ANALYSIS OF A MECHANICAL PLANE MBS WITH A PLANAR "RIGID MOTION", ACTA TECHNICA NAPOCENSIS, Series: Applied Mathematics, Mechanics , and Engineering, Vol. 63, Issue I, March, 2020.
5. Mitu, G.L., **Chircan, E.** , Scutaru M.L., Vlase,S., Kane's Formalism Used to the Vibration Analysis of a Wind Water Pump. Symmetry 2020, 12 (6), 1030; doi:10.3390/sym12061030. **IF 2,645**.

Lucrări prezentate la conferințe indexate Web Of Science

6. M. L. Scutaru, **E. Chircan**, M. Marin, H.-Șt. Grif, Liaison Forces Eliminating and Assembling of the Motion Equation in the Study of Multibody System with Elastic Elements. The 13th International Conference INTER-ENG 2019 Interdisciplinarity in Engineering. Publicata vol.46.
7. **E. Chircan**, M. L. Scutaru, A. Toderita, A. Modrea, Motion Equation of a Rectangular Finite Element with a Two-Dimension Motion in a Membrane State. The 13th International Conference INTER-ENG 2019 Interdisciplinarity in Engineering. Publicata vol.46.
8. **E. Chircan**, M. L. Scutaru, A. Toderiță, Dynamical response of a beam in a centrifugal field using the finite element method. „ACOUSTICS AND VIBRATION OF MECHANICAL STRUCTURES", May 30-31, 2019 - Timisoara, Romania. In curs de publicare.
9. **Chircan,E.**, Scutaru ,M.L., Roşca,I.C., Vlase, S., Păun,M., Experimental analysis of an MBS system with two degrees of freedom used in an eolian water pump. EUCOMES 2020, Cluj-Napoca, 8-th European Conference on Mechanism Science, September 07-10, 2020.

Lucrări prezentate la conferințe indexate BDI

10. P. N. Borza, S. Vlase, C. Petcu, G. Suliman, M. L. Scutaru, **E. Chircan**, V. B. Ungureanu, INTERACTION CHAMBER DESIGN AT ELI-NP Măgurele, COMEC 2019, Brasov;
11. **Chircan E.,** Dimitriu Șt., Comparison between the mechanical properties of classic polyethylene tubes and composite polyethylene tubes, COMAT 2018;
12. **Chircan E.,** Dimitriu Șt., Optimisation of a greenhouse structure, COMEC 2017;
13. **Chircan E.,** Dimitriu Șt., Traction tests on samples made of polyethylene pypes with stress concentration points, COMAT 2016
14. Cerbu C., **Chircan E.**, Boboc A., Modelarea și simularea materialelor composite de tip sandwich cu miez din diferite profile, CREATIVITATE, INVENTICĂ, ROBOTICĂ, An XXI, Agir, nr.1/2016.

BIBLIOGRAFIE

1. Amengonu, Y.H.; Kakad, Y.P. Dynamics and control for Constrained Multibody Systems modeled with Maggi's equation: Application to Differential Mobile Robots Part II. *27th International Conference on CADCAM, Robotics and Factories of the Future*, **2014**, London, VL 65, AR 012018,
2. Amini, S.; Dehkordi, S.F.; Fahraji, S.H. Motion equation derivation and tip-over evaluations for K mobile manipulators with the consideration of motors mass by the use of Gibbs-Appell formulation. *5th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (IcRoM)*, **2017**, Tehran, IRAN.
3. Anderson, K.; Critchley, J. Improved order-N performance algorithm for the simulation of constrained multi-rigid-body dynamic systems, Multibody System Dynamics **2003**, 9(2), 185–212.
4. Anderson, K. Recursive Derivation of Explicit Equations of Motion for the Efficient Dynamic/Control Simulation of Large Multibody Systems, Ph.D. Thesis, Stanford University, Department of Mechanical Engineering, Stanford, CA, **1990**.
5. Anosov,D.V., Arnold,V.I. (1988) Dynamical Systems I, Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
6. Appell, P. Sur une forme générale des equations de la dynamique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **1899**, vol. 129.
7. Arnold, V.I. (1973) Ecuații diferențiale ordinare. Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti.
8. Bahgat,B.M.; Willmert,K.D. Finite Element Vibrational Analysis of Planar Mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, vol.11, p. 47
9. Bagci,C. Elastodynamic Response of Mechanical Systems using Matrix Exponential Mode Uncoupling and Incremental Forcing Techniques with Finite Element Method. *Proceeding of the Sixth Word Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, India, p. 472 (1983).
10. Bajodah, A.H.; D. H. Hodges, Chen,Y.-H. New Form of Kane's Equations of Motion for Constrained Systems. Jourmal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 26, No. 1, 2003, pp.79-88.
11. Banerjee, A. Block-diagonal equations for multibody elastodynamics with geometric stiffness and constraints, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **1993**, 16(6), 1092–1100.
12. Bathe,K.-J., Wilson, E.L. (1976) Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
13. Bellman, R.(1969) Introducere în analiza matriceală. Ed. Tehnică, Buc.
14. Blajer, W. A geometric unification of constrained system dynamics, Multibody System Dynamics, **1997,** 1, 3–21.
15. Blajer, W. A geometrical interpretation and uniform matrix formulation of multibody system dynamics, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 81, **2001**, 247–259.
16. Bratu, P., Vibrațiile sistemelor elastice, Ed. Tehnică, 2000.
17. Bratu, P., Stuparu, A., Popa, S., Iacob, N., Voicu, O. (2017) The assessment of the dynamic response to seismic excitation for constructions equipped with base isolation systems according to the Newton-Voigt-Kelvin model. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue IV, November, 2017, p.459.
18. Bratu, P., Drăgan, N. (2002) Modelarea dinamică a rigidului cu legături vâscoelastice lineare în regim for at stabilizat. CNMS XXVI 2002, Brăila, p.221-226.

19. Brezeanu, A.I., Dragomir, G., Hornet, M., Năstac, D.C., Iordan, N.F., Boeriu, L. (2014) The Usage of Earth's Natural Potential for Cooling and Heating in Industrial Building. Capitol in Sustainable Energy in the Built Environment - Steps Towards nZEB; Springer International Publishing ISBN: 978-3-319-09706-0.
20. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Rades, M. (1982) Vibrații mecanice. Ed. Did. si Ped., Bucharest, 1982.
21. Cleghorn, W.L.; Fenton, E.G.; Tabarrok, K.B. Finite Element Analysis of High-Speed Flexible Mechanism. *Mech.Mach.Theory*, 16, p. 407 (1981).
22. Demidovici, B., Maron,I. (1973) Elements de calcul numerique. Editions Moscou.
23. Den Hartog, J.P. (1960) Vibrations mecaniques, Paris, Dunod.
24. Douglas, Th. (2012) Structural Dynamics and Vibrations in Practice: An Engineering Handbook, CRC Press.
25. Erdman, A.G.; Sandor,G.N.; Oakberg, A. A General Method for Kineto-Elastodynamic Analysis and Synthesis of Mechanisms. *Journal of Engineering for Industry. ASME Trans.*, **1972,** p. 1193.
26. Gerstmayr, J.; Schöberl, J. A 3D Finite Element Method for Flexible Multibody Systems, *Multibody System Dynamics*, Volume 15, Number 4, 305–320 (2006).
27. Gibbs, J.W. On the fundamental formulae of dynamics. *American Journal of Mathematics*, **1879**, V.2, pp 49-64.
28. Gillich,G.-R., Praisach,Z.-I., Iavornic,C.M. (2012) Reliable method to detect and assess damages in beams based on frequency changes. ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. p. 129-137.
29. Gioncu, V., Ivan, M. (1983) Bazele calculului structurilor la stabilitate. Ed. Facla, Timişoara.
30. Guckenheimer,J., Holmes, Ph.(1983) Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heilderberg, Tokyo.
31. Haug, E.J. Extension of Maggi and Kane Equations to Holonomic Dynamic Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **2018**, 13(12), AR 121003, DI 10.1115/1.4041579
32. Henderson, J., Luca, R. (2016) Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equations: Positive Solutions. Elsevier.
33. Heylen, W., Lammens,S., Sasa, P.(1997) Modal Analysis Theory and Testing, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
34. Hussain, Z.; Azlan, N.Z. KANE'S Method for Dynamic Modeling. Proceeding of the IEEE International Conference on Automatic Control and Intelligent Systems (I2CAC, IS), Shah Alam, MALAYSIA, **2016,** pp 174- 179.
35. Ivan, M. (1985) Bazele calcului liniar al structurilor. Ed. Facla, Timişoara.
36. de Jalon, J.G.; Callejo, A.; Hidalgo, A.F. Efficient Solution of Maggi's Equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,* **2012**, 7(2), AR 021003.
37. Kane, T.R.; Levinson, D.A. Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft, Journal of Guidance and Control, **1980** ,Vol. 3, No. 2, pp. 99–112.
38. Kane, T.R.; Levinson, D.A. Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, International Journal of Robotics Research, **1983**, Vol. 2, No. 3, pp. 3-21. 21
39. Kane, T.R.; Levinson, D.A. Multibody Dynamics, Journal of Applied Mechanics, **1983**,Vol. 50, No. 4b, pp. 1071-1078.
40. Kane, T.R.; Levinson, D.A. Multibody dynamics, ASME Journal of Applied Mechanics, **1983**, 50, 1071–1078.

41. Korayem, M.H.; Dehkordi, S.F. Derivation of dynamic equation of viscoelastic manipulator with revolute-prismatic joint using recursive Gibbs-Appell formulation. *Nonlinear Dynamics*, **2017**, Vol 89, Issue 3, pp 2041-2064.
42. Korayem, M.H.; Dehkordi, S.F. Motion equations of cooperative multi flexible mobile manipulator via recursive Gibbs-Appell formulation. *Applied Mathematical Modelling*, **2019**, Vol. 65, pp 443-463.
43. Ladyzynska-Kozdras, E. Application of the Maggi equations to mathematical modeling of a robotic underwater vehicle as an object with superimposed non-holonomic constraints treated as control laws. *Mechatronic Systems, Mechanics and Materials*, **2012**, *180*, pp.152-159.
44. Landau,L., Lifchitz,E. (1967) Théorie de l´élasticité. Editions Mir, Moscou.
45. Li, X.; Sun, H.X.; Liao, L.J.; Song, J.Z. Simulation and Comparison Research of Lagrange and Kane Dynamics Modeling for The 4-DOF Modular Industrial Robot. Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering (ICADME), S- 19-20, 2015, Shenzhen, China, **2015**, VL 39, pp 251- 254.
46. Malvezzi, F.; Matarazzo Orsino R.M.; Hess Coelho, T.A. Lagrange's, Maggi's and Kane's equations to the dynamic modelling of serial manipulator. DINAME 2017 - *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, ABCM, São Sebastião, SP, Brazil, March 5-10, **2017**.
47. Mehrjooee, O.; Dehkordi, S.F.; Korayem, M.H. Dynamic modeling and extended bifurcation analysis of flexible-link manipulator. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, DOI: 10.1080/ 15397734.2019.1665542, Early Access: SEP **2019**
48. Meghdari, F. Fahimi Dynamic Modeling of Multi-Elastic Body Systems using Kane's Method and Congruency Transformations. TECHNISCHE MECHANIK, **1999**, Band 19, Heft 2,127—140.
49. Meirovitch, L., Principles and Techniques of Vibrations. Pearson (1996).
50. Meirovitch, L (1986) Elements of Vibration Analysis. 2nd ed., McGraww-Hill, New York.
51. Mirtaheri, S. M.; Zohoor, H. The Explicit Gibbs-Appell Equations of Motion for Rigid-Body Constrained Mechanical System. Book Series: *RSI International Conference on Robotics and Mechatronics ICRoM*, **2018**, pp 304-309.
52. Myint-U, T (1977) Ordinary differential equations, Elsevier.
53. Nath, P.K.; A. Ghosh, A. Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms by Finite Element Method, *Mech.Mach.Theory*, 15, pp. 179 (1980).
54. Negrean, I. (2017a) Advanced notions in analytical dynamics of systems. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue IV, November, 2017, p. 491.
55. Negrean, I. (2017b) Mass distribution in analytical dynamics of systems. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue II, June, 2017, p.175.
56. Negrean, I.; Kacso,K.; Schonstein, C.; Duca, A. *Mechanics. Theory and Applications*. UTPRESS, Cluj-Napoca, **2012**.
57. Negrean, I.; Crișan, A.-D. Synthesis on the Acceleration Energies in the Advanced Mechanics of the Multibody Systems. *Symmetry,* **2019**, *11(9),* 1077.

58. Negrean, I.; Crișan, A.-D.; Vlase, S. A New Approach in Analytical Dynamics of Mechanical Systems. *Symmetry,* **2020**, *12*(1), 95.
59. Nukulwuthiopas, W., Laowattana, S., Maneewarn, T., Dynamic modeling of a one-wheel robot by using Kane's method. IEEE ICIT' 02: 2002 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRIAL TECHNOLOGY, VOLS I AND II, PROCEEDINGS, DEC 11-14, 2002, BANGKOK, THAILAND, **2002**, pp 524- 529.
60. Parlett,B.N.(1980) The Symmetric Eigenvalue Problem, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
61. Pennestri', E.; de Falco,D; Vita,L. An Investigation of the Inuence of Pseudoinverse Matrix Calculations on Multibody Dynamics by Means of the Udwadia-Kalaba Formulation, *Journal of Aerospace Engineering*, Volume 22, Issue 4, pp. 365–372 (2009).
62. Phillips, J.R.; Amirouche, F. A momentum form of Kane's equations for scleronomic systems. Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems. **2018**, VL 24, IS 2, pp 143-169, DOI 10.1080/13873954.2017.1385638
63. Scutaru, M.L. *Ph. D. Thesis*, Transylvania University, **2014**.
64. Piras, G.; Cleghorn, W.L.; Mills, J.K. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links. *Mech. Mach. Theory*, **2005**, Vol.40, Issue 7, p. 849-862.
65. Rades, M. (2010) Mechanical Vibrations, II. Ed. PRINTECH.
66. Radeș, M. (1979) Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice. Ed. Academiei
67. Rădoi, M., Deciu, E. (1981) Mecanica. Ed. Didactică şi Pedagogică, Buc.
68. Rosenthal, D. An order n formulation for robotic systems, Journal of Astronautical Sciences, **1990**, 38(4), 511–529.
69. Shafei, A.M.; Korayem, M.H. Theoretical and experimental study of dynamic load-carrying capacity for flexible robotic arms in point-to-point motion. *Optimal Control Applications & Methods*, **2017**, Vol 38, Issue 6, pp 963-972.
70. Shafei, A.M.; Shafei, H.R. A systematic method for the hybrid dynamic modeling of open kinematic chains confined in a closed environment. *Multibody System Dynamics*, **2017**, Vol. 38, Issue 1, pp 21-42.
71. Teodorescu, P.P. (1972) Dinamica corpurilor liniar elastice. Ed. Academiei.
72. Thompson,B.S.; Sung,C.K. A survey of Finite Element Techniques for Mechanism Design. *Mech.Mach.Theory*, 21, nr. 4, p. 351–359 (1986).
73. Timoshenko, S., Zoung, D.H. (1955) Vibration Problems in Engineering. Van Nastrand Company.
74. Timoshenko, PS, Gere, JM (2009) Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, London, 2nd Edition.
75. Tofan, M., Vlase, S. (1985), Vibrații sistemelor mecanice. Ed. Universității Transilvania.
76. Tu, T.W. First-order form, Lagrange's form, and Gibbs-Appell's form of Kane's Equations. ACTA MECHANICA, **2016**, VL 227, IS 7, pp1885-1901, DOI 10.1007/s00707-016-1611-8.
77. Ursu-Fisher,N. *Elements of Analitical Mechanics*. House of Science Book Press, Cluj-Napoca, **2015**.
78. Vasile, O., Vlase, S., Năstac, D.C., Scutaru, M.L.(2018) Experimental Analysis of a Mechanical System Composed by Two identical Parts. ACTA TECHNICA NAPOCENSIS. Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering, Vol. 61, Issue 3, Septembre, 2018 (în curs de apariție).

79. Vâlcovici, V., Bălan, St., Voinea, R. (1963) Mecanică teoretică. Ed. Tehnică, Bucureşti.
80. Vlase, S (1987a) A Method of Eliminating Lagrangean Multipliers from the Equation of Motion of Interconnected Mechanical System. ASME Transaction. Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, p.235-236.
81. Vlase, S (1987b) Elimination of Lagrangean Multipliers. Mech. Research Communications, Vol. 14, p.17-20.
82. Vlase, S. (2012) Dynamical response of a multibody system with flexible elements with a general three-dimensional motion. Romanian Journal of Physics, VL 57,IS 3-4, p676-693,2012.
83. Vlase, S., Teodorescu, P. P. (2013) Elasto-dynamics of a solid with a general "rigid" motion using FEM model. Part I. Theoretical approach. Romanian Journal of Physics, VL 58,IS 7-8, p.872-881, 2013.
84. Vlase, S., Borza, P.N., Suliman, G., Petcu, C., Scutaru, M.L., Ghițescu, M., Năstac, D.C, (2018) Dynamic Analysis of the Reaction Chamber for the ELIADE Array. In: Herisanu N., Marinca V. (eds) Acoustics and Vibration of Mechanical Structures - AVMS-2017. Springer Proceedings in Physics, vol 198. Springer, Cham.
85. Vlase, S.; Negrean, I.; Marin, M.; Scutaru, M.L., Energy of Accelerations Used to Obtain the Motion Equations of a Three-Dimensional Finite Element. *Symmetry* **2020**, *12*(2), 321.
86. Vlase, S.; Marin, M.; Öchsner, A.; Scutaru, M.L. Motion equation for a flexible one-dimensional element used in the dynamical analysis of a multibody system. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **2019**, doi.org/10.1007/s00161-018-0722-y
87. Vlase, S. Dynamical Response of a Multibody System with Flexible Elements with a General Three-Dimensional Motion. *Romanian Journal of Physics*, **2012**, Vol. 57, Issue 3-4, pp. 676-693.
88. Vlase, S.; Dănăşel, C.; Scutaru, M.L.; Mihălcică, M. Finite Element Analysis of a Two-Dimensional Linear Elastic Systems with a Plane “rigid Motion. *Rom. Journ. Phys.*, **2014**, Vol. 59, Issue 5–6, pp 476–487.
89. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V. (1976) Elasticitate şi plasticitate, I.P. Bucureşti.
90. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceauşu, V. (1984) Mecanica. Ed. Didactică şi Pedagogică, Buc.
91. Voinea,P.R., Stroe, V.I. (2000), Introducere in teoria sistemelor dinamice. Ed. Academiei Romane, Bucuresti.
92. Zhang, X.; Lu, J.; Shen, Y. Simultaneous optimal structure and control design of flexible linkage mechanism for noise attenuation. *Journal of Sound and Vibration*, **2007**, Vol. 299, Issues 4-5, p. 1124-1133.
93. Zhao, J., Zhao, R., Xue, Z. et al. A new modeling method for flexible multibody systems. Multibody Syst Dyn, **2015**, 35, 179–190.
94. Wang, J.T. ; Huston, R.L. Kane’s equations with undetermined multipiers-application to constrained multibody systems, ASME Journal of Applied Mechanics, **1987**, 54, 424–429.
95. Wang, J.T.; Huston, R.L. Computational methods in constrained multibody dynamics: Matrix formalisms, Computers and Structures, **1988**, 29, 331–338.
96. Wilkinson, J.H.(1965) The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford.
97. https://www.roga-messtechnik.de/roga-instruments_accelerometer_4507.pdf
98. https://www.upc.edu/sct/documents_equipament/d_283_id-684.pdf

Universitatea Transilvania din Brașov

REZUMAT

Ultimile decade se caracterizează printr-o dezvoltare industrială fără precedent, prin fabricarea unor mașini și utilaje care să funcționeze la viteze tot mai mari și să dezvolte forțe cât mai mari. Această tendință de dezvoltare nu ar fi posibilă printr-o reproiectare atentă a soluțiilor tehnologice adoptate și printr-o modelare cât mai precisă a sistemelor studiate. Lucrarea se înscrie în această tendință, de a dezvolta metodele de modelare și calcul a sistemelor de tip multicorp cu elemente elastice. Sunt astfel studiate câteva tipuri de elemente finite pentru care sunt stabilite ecuațiile de mișcare, metodele de asamblare și de rezolvare a ecuațiilor diferențiale care se obțin. O analiză comparativa a soluțiilor obținute variind anumiți parametri ai modelelor utilizate dau o imagine a influenței acestor parametrii asupra soluțiilor. Rezultatele teoretice obținute sunt susținute de măsuratorile experimentale făcute. Sunt aplicate, de asemenea, ecuațiile lui Kane pentru a obține ecuațiile de mișcare pentru anumite tipuri de elemente finite. Este un mod nou de abordare, utilizand formalisme alternative din mecanica analitică, care va avea ca rezultat micșorarea timpului de analiză a unui sistem multicorp cu elemente elastice. Această metodă vine să completeze formalisme alternative cum ar fi ecuațiile lui Maggi, metoda energiei accelerațiilor sau formalismul lui Hamilton. Rezultatele obținute sunt aplicate la calculul unui sistem cu două grade de libertate, de actionare eoliana a unei pompe de apă. Pe baza rezultatelor obținute, atât în partea teoretică dar și în partea experimentală, se formulează concluzii și se identifică direcțiile ulterioare de dezvoltare ale tematicii.

ABSTRACT

The last decades are characterized by an unprecedented industrial development, by the manufacture of machines and equipment that operate at increasing speeds and developing high forces. This development trend would not be possible through a careful redesign of the adopted technological solutions and through a more precise modeling of the studied systems. The paper is part of this trend to develop methods for modeling and calculating multibody systems with elastic elements. Thus, several types of finite elements are studied, for which the equations of motion, the methods of assembly and solving the differential equations obtained are established. A comparative analysis of the solutions obtained by varying certain parameters of the models used gives an image of the influence of these parameters on the solutions. The theoretical results obtained are supported by the experimental measurements. Kane's equations are also applied to obtain the equations of motion for certain types of finite elements. It is a new approach, using alternative formalisms in analytical mechanics, which will result in reduced analysis time of a multibody system with elastic elements. This method came to complete alternative formalisms such as Maggi's equations, the acceleration energy method or Hamilton's formalism. The obtained results are applied to the calculation of a system with two degrees of freedom, of a water pump powered by wind. Based on the results obtained, both in the theoretical part and in the experimental part, conclusions are formulated and the subsequent development directions of the topic are identified.