ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea: Matematică și Informatică

Florența-Violeta Croitoru (Tripșa)

# Aproximare prin metode probabiliste
# Approximation by probabilistic methods

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător ştiințific
Prof.dr. Gabriel V. ORMAN

BRAȘOV, 2019

D-lui (D-nei)
...............................................................................................................

COMPONENȚA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Braşov
Nr. ........... din ...................

| | |
|---|---|
| PREŞEDINTE: | Conf. Dr. PĂLTÂNEA Eugen<br>Facultatea de Matematică şi Informatică<br>Universitatea "Transilvania" din Brașov |
| CONDUCĂTOR ŞTIINȚIFIC: | Prof. Dr. ORMAN V.Gabriel<br>Facultatea de Matematică şi Informatică<br>Universitatea "Transilvania" din Brașov |
| REFERENȚI: | Acad. Dr. Doc. IOSIFESCU Marius<br>Academia Română |
| | Prof. Dr. PREDA Vasile<br>Facultatea de Matematică şi Informatică<br>Universitatea București |
| | Conf. Dr. SÂNGEROZAN Livia<br>Facultatea de Matematică şi Informatică<br>Universitatea "Transilvania" din Brașov |

Data, ora şi locul susținerii publice a tezei de doctorat: 05 septembrie 2019, ora 11.00, sala PP6.

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa florenta.croitoru@unitbv.ro.

Totodată, vă invităm să luați parte la şedința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim.

## Cuvânt înainte

Prezenta teză are ca scop introducerea și studiul prin metode probabiliste, a unui nou operator de aproximarede tip Bernstein, folosind distribuția urnei lui Polya cu parametru de înlocuire negativ, și arătăm că acest nou operator are proprietăți similare operatorului Bernstein (este liniar, pozitiv, uniform convergent, monoton, etc.), și îmbunătățește estimările de aproximare cunoscute ale operatorului Bernstein (în termeni de modulul de continuitate al funcției, al derivatei al erorii asimptotice de aproximare), aceste rezultate teoretice fiind susținute și de rezultatele numerice comparative prezentate în lucrare.

Rezultatele originale prezentate în capitolul trei al lucrării au fost publicate de autoare în colaborare cu domnii profesori M. N. Pascu și N. R. Pascu în trei lucrări ISI apărute anul acesta ([37], [38], [56]).

Pe această cale doresc să-mi exprim recunoștința pentru sprijinul științific și moral acordat de către domnul Profesor Dr. M. N. Pascu și de către domnul Profesor Dr. N. R. Pascu, pentru colaborarea fructuoasă și vastele cunoștințe de care am avut privilegiul să beneficiez în ultimii trei ani.

Sunt recunoscătoare pentru șansa de a fi făcut studiile doctorale sub îndrumarea domnului Profesor Dr. Gabriel V. Orman, căruia îi mulțumesc pentru coordonarea științifică, pentru supravegherea și răbdarea de care a dat dovadă în toți acești ani asupra studiilor și cercetărilor mele.

Adresez mulțumiri domnului decan al Facultății de Matematică și Informatică, Conferențiar Dr. Eugen Păltânea, pentru încurajarea performanței în activitatea de cercetare, pentru îndrumarea atentă în procesul dinamic al cercetării, cu alte cuvinte îi sunt profund recunoscătoare pentru formarea mea ca profesor și cercetător.

Țin să-i mulțumesc doamnei Conferențiar Dr. Livia Sângeorzan pentru încurajarea și îndrumarea de care m-am bucurat pe tot parcursul stagiului de doctorat, pentru suportul moral acordat.

De asemenea doresc să-mi exprim profunda recunoștință pentru sprijinul constant acordat de către domnul Profesor Dr. Irinel Radomir de-a lungul întregii mele perioade doctorale, pentru suportul moral și încrederea necondiționată.

Mă simt onorată de acceptul de participare în comisie a domnului Profesor Academician Dr. Doc. Marius Iosifescu și a domnului Profesor Dr. Vasile Preda și țin să le mulțumesc pe această cale pentru analiza tezei de doctorat.

În cele din urmă țin să mulțumesc familiei mele pentru susținerea morală.

# CUPRINS (lb. română)

# TABLE OF CONTENTS

# Introducere

Scopul lucrării de faţă este introducerea şi studiul, prin metode probabiliste, a unui nou operator de aproximare de tip Bernstein. Operatorul clasic de aproximare $B_n$ a lui Bernstein a fost introdus în anul 1912 de către Serge Bernstein în lucrarea [4], dând astfel o demonstraţie constructivă a teoremei lui Weierstrass privind aproximarea funcţiilor continue prin polinoame (operatorul lui Bernstein fiind un operator polinomial).

Operatorul lui Bernstein a fost şi este intens studiat în literatura de specialitate (aproape 4000 de lucrări ştiinţifice având cuvântul cheie "Bernstein" în titlu numai în baza de date Mathscinet). Pentru detalii se pot consulta lucrările [28], [29], [8], [11], [42], [44], [16], [48], [34], [41], [22], [24], [35], [36], [44], pentru a menţiona doar câteva referinţe bibliografice.

Prima generalizare importantă a operatorului Bernstein este datorată academicianului român Dimitrie D. Stancu, care în 1968 a observat că distribuţia binomială folosită de către Berstein pentru a defini operatorul Bernstein este un caz particular al distribuţiei Pólya, observaţie ce l-a condus la introducerea unei generalizări a operatorului Bernstein ([51], [52]), operator cunoscut astăzi sub numele de *operatorul Bernstein-Stancu*.

Punctul de plecare al prezentei lucrări este observaţia că operatorul Bernstein-Stancu este definit folosind distribuţia Pólya cu parametru de înlocuire ne-negativ. Aşa cum vom încerca să arătăm pe parcursul lucrării, putem defini noi operatori de aproximare de tip Bernstein şi în cazul parametrilor de înlocuire negativi, iar pentru o anumită alegere a acestui parametru, operatorul $R_n$ obţinut are proprietăţi de aproximare ce îmbunătăţesc rezultatele corespunzătoare pentru operatorul clasic de aproximare a lui Bernstein, sau a altor operatori înrudiţi.

Lucrarea este structurată în 3 capitole, şi conţine o listă de referinţe bibliografice cuprinzând 58 de titluri.

Capitolul întâi al lucrării este intitulat "*Probabilitate şi variabile aleatoare*", şi conţine elementele de teoria probabilităţilor necesare în vederea prezentării rezultatelor din capitolele următoare.

Secţiunea 1.1 conţine definiţii şi noţiuni elementare de teoria mulţimilor şi a funcţiilor.

Sunt prezentate aici submulţimile importante ale mulţimii numerelor reale, operaţii cu mulţimi, noţiunile de bază din teoria funcţiilor reale de variabilă reală, şi conceptul de cardinalitate a unei mulţimi, în particular noţiunile de mulţime finită şi mulţime infinit numărabilă.

În Secţiunea 1.2 este introdus conceptul fundamental de *spaţiu de probabilitate*. Sunt prezentate aici noţiunile de spaţiu de evenimente, operaţii şi relaţii între mulţimile de evenimente, ilustrate cu exemple sugestive. În continuare se introduce noţiunea de spaţiu măsurabil, prin definirea conceptelor importante de algebră, $\sigma$-algebră, şi $\sigma$-algebră generată de o familie de mulţimi (însoţite de asemenea de exemple), şi a proprietăţilor importante ale acestora.

Este apoi introdusă *măsura de probabilitate*, şi sunt prezentate principalele proprietăţi ale acesteia (Propoziţia 1.2.32 şi Propoziţia 1.9) şi mai multe exemple de spaţii de probabilitate (spaţiu de probabilitate cu un număr finit de evenimente egal probabile, spaţiul de probabilitate al aruncării zarului, a unei monede, etc). Secţiunea se încheie cu prezentarea rezultatului important de continuitate a măsurii de probabilitate (Propoziţia 1.2.42).

În Secţiunea 1.3 este introdusă noţiunea de *variabilă aleatoare*, şi sunt prezentate principalele proprietăţi ale variabilelor aleatoare. În continuare este introdusă *funcţia de distribuţie* a unei variabile aleatoare, sunt prezentate exemple şi proprietăţi ale acesteia, precum şi teorema de caracterizare a funcţiei de distribuţie (Teorema 1.3.19).

Secţiunea se încheie prin introducerea noţiunii de *medie* a unei variabile aleatoare şi a câteva caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare discrete (momente, momente centrate, dispersie, etc). Sunt de asemenea aici prezentate principalele proprietăţi ale mediei (linearitate, monotonie, inegalitatea Jensen, etc – a se vedea Propoziţia 1.3.23) şi ale caracteristicilor variabilelor aleatoare discrete (Propoziţia 1.3.26).

Capitolul se încheie cu prezentarea câtorva modele clasice de urne (Secţiunea 1.4), ce vor fi folosite în capitolele următoare ale lucrării. Sunt aici prezentate distribuţia Bernoulli, distribuţia binomială (extragere repetată din urnă cu înlocuirea bilei extrase), distribuţia hipergeometrică (extragere repetată din urnă fără înlocuirea bilei extrase), şi modelul general al urnei/distribuţiei lui Pólya (extragere repetată din urnă cu parametru de înlocuire $c$: pentru $c = 0$ se obţine distribuţia binomială, iar pentru $c = -1$ se obţine distribuţia hipergeometrică). Pentru toate distribuţiile considerate sunt indicate principalele caracteristici numerice (media şi dispersia).

**Contribuţia în cadrul acestui capitol a constat în studiul bibliografic, sintetizarea rezultatelor esenţiale, elaborarea de exemple, şi prezentarea într-o manieră unitară a rezultatelor acestui capitol.**

Capitolul al doilea al lucrării este intitulat "*Operatorul Bernstein*", şi conţine o prezentare succintă a principalelor rezultate privind operatorul de aproximare a lui S. Bernstein.

Astfel, în Secţiunea 2.1 este introdus operatorul de aproximare $B_n$ a lui Bernstein, şi este prezentată ideea probabilistă din spatele definiţiei (distribuţia binomială).

În Secţiunea 2.2 sunt prezentate principalele proprietăţi ale operatorului Bernstein: proprietatea de aproximare uniformă a unei funcţii continue (Teorema 2.2.1, cu demonstraţia originală a lui Bernstein), proprietatea de liniaritate, pozitivitate, şi convergenţă (Teorema 2.2.4), şi proprietatea de monotonie (Teorema 2.2.10). Sunt de asemenea prezentate aici rezultate privind eroare de aproximare a operatorului Bernstein: eroarea de aproximare folosind modulul de continuitate al funcţiei (Teorema 2.2.5 şi Teorema 2.2.6), rezultat datorat iniţial lui T. Popoviciu şi dezvoltat ulterior de alţi cercetători (a se vedea spre exemplu [28], [50]), eroarea de aproximare folosind modulul de continuitate al derivatei funcţiei (Teorema 2.2.7), şi eroarea de aproximare asimptotică (teorema lui Voronovskaja, Teorema 2.2.9). De menţionat aici că demonstraţiile teoremelor privind eroarea de aproximare a operatorului Bernstein menţionate mai sus sunt originale, fiind bazate pe rezultatul obţinut în Lema 3.3.2 ([39]) prezentat în ultimul capitol al lucrării.

În ultima secţiune a acestui capitol (Secţiunea 2.3) sunt prezentate câteva generalizări ale operatorului Bernstein, generalizări ce vor fi utilizate pentru comparaţie cu operatorul $R_n$ introdus în lucrare. Astfel, sunt aici prezentaţi operatorul Bernstein-Stancu $P_n^{\langle\alpha\rangle}$ introdus de Stancu ([51], [52]), operatorul Lupaş $L_n$ introdus de A. Lupaş şi L. Lupaş ([32]), operatorul $q$-Bernstein a lui Lupaş $L_{n,q}$ introdus de A. Lupaş ([30]), operatorul $q$-Bernstein a lui Phillips $B_{n,q}$ introdus de G. M. Phillips ([43]), şi operatorul $(p,q)$-Bernstein a lui Mursaleen $S_{n,p,q}$ introdus de Mursaleen şi co-autorii săi ([36]).

**Contribuţia în cadrul acestui capitol a constat în studiul bibliografic, sintetizarea rezultatelor esenţiale, prezentarea într-o manieră unitară a rezultatelor acestui capitol, şi, aşa cum am menţionat, demonstraţiile originale ale Teoremei 2.2.7, Teoremei 2.2.7, şi Teoremei 2.2.9, demonstraţii bazate pe rezultatul obţinut în Lema 3.3.2 ([39], în colaborare cu M. N. Pascu şi N. R. Pascu).**

Ultimul capitol al lucrării, intitulat "Un nou operator de aproximare de tip Bernstein" este în întregime original, fiind bazat pe rezultatele obţinute în colaborare cu M. N. Pascu în lucrările [39] şi [40] (ISI), şi cu N. R. Pascu în lucrările [39], [40], [58] (ISI), în ultima lucrare fiind prim autor.

În Secţiunea 3.1, intitulată "*Un nou operator de aproximare de tip Bernstein*", este introdus un nou operator de aproximare de tip Bernstein, notat $P_n^{a,b,c}$, definit folosind distribuţia Pólya $X_n^{a,b,c}$. Aşa cum se observă în lucrare, pentru valori $a = x$, $b = 1 - x$ şi $c = \alpha \geq 0$ acest operator coincide cu operatorul Bernstein-Stancu, dar interesul în această lucrare este pentru valori negative ale parametrului $c$ satisfăcând condiţia de compatibilitate (1.39) a distribuţiei Polya (a se vedea Observaţia 3.1.1).

Motivat de această observaţie, am considerat în definiţia operatorului $P_n^{a,b,c}$ alegerea particulară $a = x$, $b = 1 - x$ şi $c = -\min\{x, 1-x\}/(n-1)$, obţinând astfel operatorul notat prin $R_n$, definit de relaţia (3.5), ale cărui proprietăţi vor fi studiate în continuare.

Astfel, în Teorema 3.2.1 (Secţiunea 3.2) sunt prezentate câteva din proprietăţile operatorului $R_n$: proprietatea de monotonie, de pozitivitate, de convergenţa uniformă, şi proprietatea de supra-aproximare a funcţiilor convexe, proprietăţi similare operatorului clasic Bernstein $B_n$.

În Secţiunea 3.3 sunt prezentate estimări privind eroarea de aproximare a operatorului $R_n$. Demonstraţiile acestor rezultate folosesc Lema 3.3.2, în care se obţin estimări pentru $|Ef(X) - f(x)|$ în funcţie de modulul de continuitate al funcţiei $f$, al derivatei acesteia, respectiv o formulă Taylor de ordin doi pentru $Ef(X)$, şi de dispersia variabilei aleatoare $X$ având medie $E(X) = x$.

Folosind această lemă, în Teorema 3.3.3 se obţine o estimare a erorii de aproximare a operatorului $R_n$ în funcţie de modulul de continuitate al funcţiei, în Teorema 3.3.5 se obţine o estimare erorii de aproximare a operatorului $R_n$ în funcţie de modulul de continuitate al derivatei funcţiei, iar în Teorema 3.3.7 se obţine comportamentul asimptotic al erorii de aproximare al operatorului $R_n$. Aşa după cum se arată în observaţiile ce succed aceste teoreme, în toate cazurile eroarea de aproximare este îmbunătăţită comparativ cu rezultatele corespunzătoare pentru operatorul clasic de aproximare $B_n$ a lui Bernstein.

În Secţiunea 3.4 se demonstrează un rezultat important obţinut în colaborare cu M. N. Pascu şi N. R. Pascu în lucrarea [40], şi anume că, constanta optimală ce apare în inegalitatea de mărginire a erorii de aproximare a operatorului $R_n$ în funcţie de modulul de continuitate al funcţiei este mai mică decât constanta corespunzătoare a lui Sikkema în cazul operatorului Bernstein $B_n$ (Teorema 3.4.2). Demonstraţia foloseşte o proprietate având interes de sine stătător, şi anume o proprietate de monotonie a factorialului crescător, demonstrată în Lema 3.4.1, obţinută de asemenea în colaborare cu M. N. Pascu şi N. R. Pascu în lucrarea [40].

În Secţiunea 3.5 se demonstrează proprietatea de monotonie a operatorului $R_n$ (Teorema 3.5.8), proprietate similară cu cea a operatorului Bernstein clasic. Într-o formulare echivalentă (Teorema 3.5.7), acest rezultat arată că variabilele aleatoare de tip Pólya verifică o anumită ordonare stochastică, fapt ce are un interes de sine stătător în teoria ordonărilor stochastice.

Demonstraţia acestor rezultate foloseşte trei rezultate auxiliare demonstrate în această secţiune, rezultate de interes independent. Astfel, în Lema 3.5.1 se demonstrează o rafinare a inegalităţii inverse inegalităţii Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (a se vedea Observaţia 3.5.2), în Lema 3.5.3 se demonstrează inegalităţi de mărginire inferioară şi superioară a unei integrale folosind metoda trapezelor (rezultat cunoscut doar în cazul asimptotic), iar în Lema 3.5.4 se demonstrează un rezultat precis privind semnul unei anumite funcţii.

Capitolul se încheie cu Secţiunea 3.6 în care sunt prezentate rezultate numerice comparative între operatorul $R_n$ introdus în lucrare şi operatorii de tip Bernstein prezentaţi în Secţiunea 2.3.

Analiza numerică arată că operatorul $R_n$ reduce, comparativ cu operatorul Bernstein, eroarea de aproximare la jumătate, iar analiza grafică arată că în toate cazurile considerate (funcţie continuu diferenţiabilă, funcţie continuă, respectiv funcţie discontinuă), operatorul $R_n$ oferă cea mai bună aproximare a funcţiei considerate în raport cu ceilalţi operatori de tip Bernstein consideraţi.

# Capitolul 1

# Probabilitate şi variabile aleatoare

## 1.1 Noţiuni preliminare

### 1.1.1 Noţiuni de teoria mulţimilor

În cele ce urmează vom considera următoarele mulţimi importante:

- mulţimea vidă (mulţimea fără nici un element): $\varnothing$
- mulţimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- mulţimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- mulţimea numerelor raţionale: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- mulţimea numerelor reale: $\mathbb{R}$

### 1.1.2 Definiţii şi notaţii

Spunem că o mulţime $A$ este *conţinută* în mulţimea $B$, şi notăm $A \subset B$, dacă orice element al mulţimii $A$ aparţine şi mulţimii $B$. Spunem în acest caz că mulţimea $A$ este o *submulţime* a mulţimii $B$.

Spunem că mulţimea $A$ este *egală* cu mulţimea $B$, şi notăm $A = B$, dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$. În caz contrar spunem că mulţimile $A$ şi $B$ nu sunt egale, şi notăm $A \neq B$.

Pentru o mulţime de bază nevidă $\Omega \neq \varnothing$, vom nota prin $\mathcal{P}(\Omega)$ *mulţimea părţilor* mulţimii $\Omega$, formată din toate submulţimile mulţimii $\Omega$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}.$$

Pe mulţimea $\mathcal{P}(\Omega)$ introducem următoarele operaţii:

- *reuniunea* a două mulţimi $A$ şi $B$, notată cu $A \bigcup B$, definită prin

$$A \bigcup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \tag{1.1}$$

- *intersecţia* a două mulţimi $A$ şi $B$, notată cu $A \bigcap B$, definită prin

$$A \bigcap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ şi } x \in B\} \tag{1.2}$$

- *diferenţa* a două mulţimi $A$ şi $B$, notată cu $A - B$, definită prin

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\} \tag{1.3}$$

- *complementara* unei mulţimi $A$ (în raport cu mulţimea de referinţă $\Omega$), notată cu $A^c$, definită prin

$$A^c = \Omega - A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\} \tag{1.4}$$

- *produsul cartezian* a două mulţimi $A$ şi $B$, notat cu $A \times B$, definit ca mulţimea perechilor ordonate $(x, y)$ cu $x \in A$şi $y \in B$, adică:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \tag{1.5}$$

**Observaţia 1.1.1** *Să observăm că spaţiul euclidian $E_2 \equiv \mathbb{R}^2$ poate fi interpretat ca produsul cartezian $E_1 \times E_1$ unde $E_1 \equiv \mathbb{R}$ este spaţiul euclidian unidimensional, adică dreapta reală.*

### 1.1.3 Funcţii de o variabilă reală

**Definiţia 1.1.2** *Date fiind două mulţimi nevide $X$ şi $Y$, dacă fiecărui element $x \in X$ îi corespunde - printr-un anumit procedeu - un unic element $y \in Y$, vom numi corespondenţa dintre elementele mulţimii $X$ şi elementele mulţimii $Y$ funcţie sau aplicaţie.*

Dacă fiecărui element $x \in X$ îi corespunde elementul bine determinat $f(x) \in Y$, vom nota funcţia corespunzătoare prin $f : X \to Y$. Mulţimea $X$ se numeşte *mulţimea de definiţie* (sau *domeniul*) a funcţiei $f$, iar mulţimea $Y$ se numeşte mulţimea în care funcţia $f$ ia valori (sau *codomeniul* funcţiei $f$).

Dacă elementului $x$ îi corespunde elementul $y \in Y$ prin funcţia $f$ , spunem că $y$ este imaginea lui $x$ prin funcţia $f$ sau că $y$ este valoarea funcţiei $f$ în punctul $x$, şi notăm $y = f(x)$.

Dată fiind o funcţie $f : X \to Y$, numim *imaginea* mulţimii $A \subset X$ prin funcţia $X$ mulţimea

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\},$$

şi *imaginea inversă (sau preimaginea)* mulţimii $B \subset Y$ prin funcţia $f$ mulţimea

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Considerăm în cele ce urmează că $X, Y \subset \mathbb{R}$ , şi vom spune că funcţia $f : X \to Y$ este o funcţie reală de variabilă reală.

**Definiţia 1.1.3** *Funcţia reală de variabilă reală $f : X \to Y$ se numeşte:*

- *strict crescătoare (crescătoare) dacă $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$), oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 < x_2$.*

- *strict descrescătoare (descrescătoare) dacă $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 < x_2$.*

- *injectivă dacă $f(x_1) \neq f(x_2)$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$.*

- *surjectivă dacă oricare ar fi $y \in Y$ există $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.*

- *bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă, adică dacă oricare ar fi $y \in Y$ există un* ***unic*** *element $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.*

Dacă funcţia $f : X \to Y$ este bijectivă, putem defini *funcţia inversă funcţiei* $f$, notată cu $f^{-1} : Y \to X$, şi definită prin

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y.$$

Observăm că dacă funcţia $f$ este bijectivă atunci şi funcţia inversă $f^{-1}$ este de asemenea bijectivă, şi au loc relaţiile $f^{-1}(f(x)) = x$ şi $f(f^{-1}(y)) = y$, oricare ar fi $x \in X$ şi $y \in Y$.

### 1.1.4 Cardinalul unei mulţimi

**Definiţia 1.1.4** *Spunem că două mulţimi $A$ şi $B$ sunt* echipotente *(sau* cardinal echivalente*) dacă există o bijecţie $f : A \to B$. Notăm în acest caz $A \sim B$ sau $|A| = |B|$.*

*Clasa tuturor mulţimilor cardinal echivalente cu o mulţime dată* $A$ *se numeşte* cardinalul *mulţimii* $A$ *şi se notează* $\mathrm{card}\,(A)$ *sau* $|A|$.

Prin definiţie, o mulţime *infinită* este o mulţime care este echipotentă cu o submulţime strictă a sa. Se poate demonstra că o mulţime este infinită dacă şi numai dacă ea nu este o mulţime finită.

O mulţime infinită se numeşte *numărabilă* (sau *infinit numărabilă*) dacă ea este echipotentă cu mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, şi nenumărabilă în caz contrar.

## 1.2 Spaţiu de probabilitate

### 1.2.1 Spaţiu de evenimente

Pentru definirea conceptului de spaţiu de probabilitate, vom considera un experiment, al cărui rezultat nu se poate preciza cu siguranţă înaintea efectuării lui, dar pentru care mulţimea tuturor rezultatelor posibile este cunoscută.

Numim *eveniment elementar* oricare din rezultatele efectuării experimentului considerat, şi notăm cu $\Omega$ *mulţimea tuturor evenimentelor elementare*, adică mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment considerat.

Numim *eveniment* o submulţime a lui $\Omega$, adică un eveniment reprezintă o mulţime de evenimente elementare. Vom nota evenimentele cu majuscule $A, B, C, ...$, iar eveimentele elementare cu $\omega, \omega_1, \omega_2, ...$

Remarcăm două evenimente importante, şi anume *evenimentul sigur*, notat cu $\Omega$ (este evenimentul care apare la fiecare efectuare a experimentului) şi *evenimentul imposibil,* notat cu $\varnothing$ (este evenimentul care nu apare la nici o efectuare a experimentului).

**Examplul 1.2.1** *În cazul aruncării unui zar, următoarele sunt exemple de evenimente:*

- $A = \{1, 3, 5\}$, *adică apariţia unui număr impar*
- $B = \{2, 4, 6\}$, *apariţia unui număr par*
- $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *adică apariţia unui număr mai mic decât* $6$
- $D = \{4, 5, 6\}$, *adică apariţia unui număr mai mare sau egal cu* $4$.

**Examplul 1.2.2** *În cazul aruncării unei monede, mulţimea rezultatelor posibile este* $\Omega = \{B, S\}$, *unde prin* $B$ *am notat apariţia feţei "ban", iar prin* $S$ *am notat apariţia feţei "stemă".*

*Putem în acest caz considera următoarele evenimente:*

- $A = \{B\}$, *adică apariţia feţei "ban"*
- $B = \{S\}$, *adică apariţia feţei "stemă"*

Pe un spaţiu $\Omega$ de evenimente elementare fixat, introducem următoarele definiţii pentru două evenimente $A, B \subset \Omega$.

**Definiţia 1.2.3 (evenimente compatibile)** *Spunem că evenimentele $A$ şi $B$ sunt* compatibile *dacă ele se pot realiza simultan la efectuarea experimentului.*

**Examplul 1.2.4** *În experimentul aruncării zarului, considerăm evenimentul $A$ ce constă în apariţia uneia din feţele* 1 *sau* 3*, şi evenimentul $B$ ce constă în apariţia uneia din feţele cu numerele impare. Evenimente $A$ şi $B$ sunt compatibile deoarece dacă rezultatul experimentului este apariţia feţei* 1*, atunci se realizează simultan şi evenimentul $A$ şi evenimentul $B$.*

***Definiţia 1.2.5 (evenimente incompatibile)*** *Spunem că evenimentele $A$ şi $B$ sunt* incompatibile *dacă ele nu pot apărea simultan la nici o efectuare a experimentului.*

***Examplul 1.2.6*** *În experimentul aruncării zarului, considerăm evenimentul $A$ ce constă în apariţia uneia din feţele cu numere impare, şi evenimentul $B$ ce constă în apariţia uneia din feţele cu numere pare. Evenimentele $A$ şi $B$ nu se pot realiza simultan, şi deci evenimentele $A$ şi $B$ sunt evenimente incompatibile.*

***Definiţia 1.2.7 (reuniunea a două evenimente)*** *Definim* reuniunea evenimentelor *$A$ şi $B$, notată prin $A \bigcup B$, ca fiind evenimentul care se realizează dacă cel puţin unul din evenimentele $A$ şi $B$ se realizează.*

***Examplul 1.2.8*** *În experimentul aruncării zarului, considerăm următoarele evenimente: $A = \{1, 3, 4\}$ şi $B = \{2, 4, 6\}$. Evenimentul $A$ se realizează dacă la aruncarea zarului apare una din feţele* $1, 3$ *sau* 4*, iar evenimentul $B$ se realizează dacă la aruncarea zarului apare una din feţele* $2, 4$ *sau* 6*. Reuniunea evenimentelor $A$ sau $B$ constă deci în apariţia uneia din feţele* $1, 2, 3, 4$ *sau* 6*, şi deci $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.*

***Definiţia 1.2.9 (intersecţia a două evenimente)*** *Definim* intersecţia evenimentelor *$A$ şi $B$, notată prin $A \bigcap B$, ca fiind evenimentul care se realizează dacă se realizează simultan ambele evenimente $A$ şi $B$.*

**Examplul 1.2.10** *În notaţia din exemplul anterior deducem că intersecţia evenimentelor $A$ şi $B$ este evenimentul $A \bigcap B = \{4\}$.*

**Definiţia 1.2.11 (eveniment contrar)** *Definim* evenimentul contrar *evenimentului A, notat prin $A^c$, evenimentul constând în nerealizarea evenimentului A (adică $A^c$ se realizează dacă nu se realizează A, şi $A^c$ nu se realizează dacă se realizează evenimentul A).*

**Observaţia 1.2.12** *Este uşor de observat din definiţia anterioară că evenimentul contrar evenimentului $A^c$ este evenimentul A, adică $(A^c)^c = A$.*

**Examplul 1.2.13** *În experimentul aruncării zarului, considerăm următoarele evenimente: $A = \{1, 3, 5\}$ şi $B = \{2, 4, 6\}$. Observăm că dacă nu se realizează evenimentul A (adică dacă nu apare una din feţele $1, 3$ sau $5$) atunci se realizează evenimentul B (adică apare una din feţele $2, 4$ sau $6$). Rezultă deci că evenimentul B este contrarul evenimentului A, şi viceversa.*

***Definiţia 1.2.14 (diferenţa a două evenimente)*** *Definim diferenţa evenimentelor A şi B (în această ordine), notată prin $A \setminus B$, ca fiind evenimentul ce constă în realizarea lui A şi nerealizarea lui B.*

***Definiţia 1.2.15 (implicaţia între două evenimente)*** *Spunem că evenimentul A implică evenimentul B dacă realizarea evenimentului A atrage după sine şi realizarea evenimentului B.*

***Examplul 1.2.16*** *În experimentul aruncării zarului, considerăm următoarele evenimente: $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{1, 2, 3\}$. Realizarea evenimentului A atrage după sine şi realizarea evenimentului B, şi deci evenimentul A implică evenimentul B.*

### 1.2.2 Spaţiu măsurabil

**Definiţia 1.2.17 (algebră)** *Fiind dată o mulţime nevidă $\Omega \neq \varnothing$, numim algebră (sau corp de părţi) pe $\Omega$ o familie nevidă $\mathcal{F} \subset P(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ de părţi a lui $\Omega$ cu următoarele proprietăţi:*

**i)** *$\mathcal{F}$ este închisă la complementară, adică $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$*

**ii)** *$\mathcal{F}$ este închisă la reuniune, adică $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \bigcup B \in \mathcal{F}$*

***Examplul 1.2.18*** *Considerăm $\Omega = [a, b) \subset \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Este uşor de verificat că familia*

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \in \mathbb{N}^*, a_i, b_i \in [a, b), a_i < b_i \right\} \tag{1.6}$$

*formează o algebră de mulţimi pe $\Omega$.*

***Examplul 1.2.19*** *Este uşor de verificat că pentru* $\Omega = \{B, S\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ *şi* $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{B\}, \{S\}, \Omega\}$ *sunt algebre pe* $\Omega$ *(de fapt acestea sunt singurele algebre pe* $\Omega$*).* $\mathcal{F}_1$ *este algebra "minimală" pe* $\Omega$*, iar* $\mathcal{F}_2$ *este algebra "maximală" pe* $\Omega$*.*

În general , pentru o algebră $\mathcal{F}$ arbitrară pe o mulţime de evenimente elementare $\Omega$, are loc relaţia de incluziune

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2,$$

unde $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ şi $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$. Din acest motiv $\mathcal{F}_1$ se numeşte *algebra minimală* pe $\Omega$, iar $\mathcal{F}_2$ se numeşte *algebra maximală* pe $\Omega$.

**Propoziţia 1.2.20** *Dacă* $\mathcal{F}$ *este o algebră pe* $\Omega$*, atunci au loc următoarele proprietăţi.*

*1)* $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$

*2) Oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *avem* $A \bigcap B \in \mathcal{F}$

*3) Oricare ar fi* $n \geq 1$ *şi* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *avem* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ *şi* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

*4) Oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *avem* $A \diagdown B$, $B \diagdown A$, $A \Delta B := (A \diagdown B) \bigcup (B \diagdown A) \in \mathcal{F}$.

**Definiţia 1.2.21 ($\sigma$-algebră)** *Fiind dată o mulţime nevidă* $\Omega \neq \varnothing$*, numim* $\sigma-$algebră *($\sigma$-corp de părţi) pe* $\Omega$ *o familie nevidă* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ *de părţi a lui* $\Omega$*, cu proprietăţile:*

**i)** $\mathcal{F}$ *este închisă la complementară, adică* $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

**ii)** $\mathcal{F}$ *este închisă la reuniuni numărabile, adică* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

**Examplul 1.2.22** *Este uşor de verificat că dată fiind o mulţime nevidă* $\Omega$ *de evenimente elementare,* $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \varnothing\}$ *şi* $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ *reprezintă* $\sigma-$*algebre pe* $\Omega$*.*

*De asemenea, dacă* $\mathcal{F}$ *este o* $\sigma-$*algebră arbitrară pe* $\Omega$*, atunci se poate arăta (a se vedea Propoziţia 1.2.24) că are loc dubla incluziune*

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2,$$

*motiv pentru care* $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ *se mai numeşte* $\sigma-$*algebra minimală pe* $\Omega$*, iar* $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ *se numeşte* $\sigma-$*algebra maximală pe* $\Omega$*.*

**Examplul 1.2.23** *Dacă* $\Omega$ *este o mulţime infinit nenumărabilă, se verifică uşor că familia de mulţimi*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \mid A \textit{ cel mult numărabilă sau } A^c \textit{ cel mult numărabilă}\}$$

*este o* $\sigma-$*algebră pe* $\Omega$*.*

**Propoziţia 1.2.24** *Dacă $\mathcal{F}$ este o $\sigma-$algebră pe $\Omega$, atunci au loc următoarele:*

*1) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$*

*2) Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ avem $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ şi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$*

*3) Pentru şi orice şir de evenimente $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$*

*4) Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{F}$ avem $A \Delta B \overset{def}{=} (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) \in \mathcal{F}$.*

**Definiţia 1.2.25 (spaţiu măsurabil)** *O mulţime nevidă $\Omega \neq \varnothing$ pe care s-a definit o $\sigma-$algebră $\mathcal{F}$ se numeşte* spaţiu măsurabil *şi se notează $(\Omega, \mathcal{F})$. Elementele lui $\mathcal{F}$ se numesc evenimente măsurabile.*

**Observaţia 1.2.26** *Punctul 2) din Propoziţia 1.2.24 arată că orice $\sigma-$algebră pe $\Omega$ este de asemenea o algebră de mulţimi pe $\Omega$, dar reciproca nu este în general adevărată.*

*Pentru a arăta aceasta, considerăm algebra $\mathcal{F} = \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \in \mathbb{N}^*, a_i, b_i \in [a, b), a_i < b_i \right\}$ din Exemplul 1.2.18. Dacă $\mathcal{F}$ ar fi o $\sigma$-algebră, cum $A_n = [a + \frac{b-a}{n+1}, b) \in \mathcal{F}$ oricare ar fi $n \geq 1$, ar rezulta că evenimentul*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{b-a}{n+1}, b \right) = (a, b)$$

*ar aparţine lui $\mathcal{F}$, o contradicţie (deoarece intervalul $(a, b)$ nu se poate scrie ca o reuniune finită de intervale de forma $[a_i, b_i)$).*

Dată fiind o submulţime arbitrară $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, ea nu este în general o $\sigma$-algebră. Se poate demonstra însă că există o $\sigma$-algebră minimală ce conţine pe $\mathcal{L}$, notată prin $\sigma(\mathcal{L})$, şi numită $\sigma$-algebră *generată* de $\mathcal{L}$.

**Propoziţia 1.2.27** *Dacă $\Omega$ este mulţime de evenimente elementare şi $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ este o familie de mulţimi, atunci*

$$\sigma(\mathcal{L}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \text{ este } \sigma - \text{algebră pe } \Omega \text{ şi } \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F} \} \tag{1.7}$$

*este $\sigma-$algebra generată de $\mathcal{L}$ ($\sigma$-algebra minimală ce conţine pe $\mathcal{L}$).*

**Propoziţia 1.2.28** *Fie $\Omega \neq \varnothing$ o mulţime nevidă şi $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ familii de mulţimi pe $\Omega$. Au loc următoarele:*

**i)** *Dacă $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ atunci $\sigma(\mathcal{L}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{L}_2)$*

**ii)** *Dacă $\mathcal{F}$ este $\sigma$-algebră pe $\Omega$ dacă şi numai dacă $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$.*

**Examplul 1.2.29 ($\sigma$-algebra mulţimilor Boreliene pe $\mathbb{R}$)** *Un exemplu important de $\sigma$-algebră generată de o familie de mulţimi este $\sigma$-algebra mulţimilor Boreliene pe $\mathbb{R}$, definită prin:*

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma\left(\{A\subset\mathbb{R}\mid A \textit{ mulţime deschisă în } \mathbb{R}\}\right) \tag{1.8}$$

*Se poate arăta (a se vedea spre exemplu [38]) că oricare dintre familiile de mulţimi ale lui* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}\\
\mathcal{L}_2 &= \{(a,b]\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}\\
\mathcal{L}_3 &= \{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}\\
\mathcal{L}_4 &= \{[a,b]\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}\\
\mathcal{L}_5 &= \{(-\infty,a)\mid a\in\mathbb{R}\}\\
\mathcal{L}_6 &= \{(-\infty,a]\mid a\in\mathbb{R}\}\\
\mathcal{L}_7 &= \{(b,\infty)\mid b\in\mathbb{R}\}\\
\mathcal{L}_8 &= \{[b,\infty)\mid b\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

*generează $\sigma$-algebra mulţimilor Boreliene pe $\mathbb{R}$, adică*

$$\sigma(\mathcal{L}_n)=\mathcal{B}(\mathbb{R}), \qquad n=1,2,\ldots,8.$$

### 1.2.3 Măsura de probabilitate

**Definiţia 1.2.30 (măsură de probabilitate)** *Numim* măsură de probabilitate *pe spaţiul măsurabil $(\Omega,\mathcal{F})$ o funcţie $P:\mathcal{F}\longrightarrow[0,+\infty)$ cu proprietăţile:*

**i)** $P(\Omega)=1$

**ii)** *Oricare ar fi evenimentele $A_1,A_2,...\in\mathcal{F}$ incompatibile două câte două, avem:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

**Definiţia 1.2.31 (spaţiu de probabilitate)** *Numim* spaţiu de probabilitate (câmp de probabilitate complet aditiv) *un triplet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ unde:*

- $\Omega\neq\varnothing$ *este mulţimea evenimentelor elementare*

- $\mathcal{F}$ *este o* $\sigma$*-algebră pe* $\Omega$
- $P$ *este o măsură de probabilitate pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{F})$ *.*

**Propoziţia 1.2.32** *Dacă* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *este un spaţiu de probabilitate, atunci au loc următoarele.*

*1)* $P(\varnothing) = 0$

*2)* $P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$, *oricare ar fi* $n \geq 1$ *şi* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *disjuncte două câte două.*

*3)* $P(A) \leq P(B)$, *oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $A \subset B$

*4)* $0 \leq P(A) \leq 1$, *oricare ar fi* $A \in \mathcal{F}$

*5)* $P(A^c) = 1 - P(A)$, *oricare ar fi* $A \in \mathcal{F}$

*6)* $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$, *oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $A \subset B$

*7)* $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$, *oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$*.*

**Examplul 1.2.33** *Un exemplu important de spaţiu de probabilitate este cel în care mulţimea de evenimente elementare este finită, fiind formată din evenimente elementare egal probabile.*

*Dacă spaţiul de evenimente elementare este* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ *pentru un anumit* $n \geq 1$, *şi evenimentele elementare* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *sunt egal probabile (adică* $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$, *oricare ar fi* $1 \leq i, j \leq n$, *din proprietăţile măsurii de probabilitate obţinem*

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_1\}),$$

*şi deci* $P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$, *oricare ar fi* $1 \leq i \leq n$. *Este uşor de observat că dacă* $A \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, *atunci funcţia de probabilitate* $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ *este definită de*

$$P(A) = \frac{|A|}{n}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

*Spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *astfel definit se numeşte* spaţiu de probabilitate cu un număr finit de evenimente egal probabile*.*

**Examplul 1.2.34** *În cazul aruncării unui zar, putem considera ca spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *unde*

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; ...; \{1, 2\}; ...; \{5, 6\}; ...; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; \infty)$, $P(A) = \frac{|A|}{6}$, $A \in \mathcal{F}$.

**Examplul 1.2.35** *În cazul aruncării unei monede, putem considera ca spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde*

- $\Omega = \{B, S\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{B\}, \{S\}, \{B, S\}\}$
- $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; \infty)$, $P(\{B\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}$.

*Mai general, în cazul unui ban "măsluit" (pentru care una din feţe apare mai frecvent decât cealaltă), putem defini funcţia de probabilitate prin $P(\{B\}) = p$ şi $P(\{S\}) = 1 - p$, unde $p \in (0, 1)$ este probabilitatea de apariţie a feţei "ban".*

**Examplul 1.2.36** *În cazul aruncării a două monede, putem considera ca spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde*

- $\Omega = \{\{B, B\} \{B, S\} \{S, B\} \{S, S\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; \infty)$, $P(A) = \frac{|A|}{4}$, $A \in \mathcal{F}$ *(în cazul în care evenimentele elementare sunt egal probabile, adică dacă $P(\{B, B\}) = P(\{B, S\}) = P(\{S, B\}) = P(\{S, S\}) = \frac{1}{4}$).*

**Propoziţia 1.2.37 (inegalitatea lui Boole)** *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, au loc inegalităţile*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.9}$$

*şi*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^C). \tag{1.10}$$

### 1.2.4 Continuitatea măsurii de probabilitate

**Definiţia 1.2.38** *Pentru un şir de evenimente* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$*, definim evenimentele:*

*(i)* $\liminf F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

*(ii)* $\limsup F_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

*(iii) Dacă* $\liminf F_n = \limsup F_n$*, definim* limita şirului $F_n$ *(notată cu* $\lim F_n$*) prin:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n \overset{def}{=} \liminf F_n = \limsup F_n \in \mathcal{F}$$

**Propoziţia 1.2.39** *Pentru un şir arbitrar de evenimente* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$*, au loc următoarele:*

**i)** $\liminf F_n \subseteq \limsup F_n$

**ii)** *Dacă* $(F_n)_{n\geq 1}$ *este un şir crescător de evenimente, atunci există limita şirului* $F_n$ *şi are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

**iii)** *Dacă* $(F_n)_{n\geq 1}$ *este un şir descrescător de evenimente, atunci există limita şirului* $F_n$ *şi are loc:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

**Observaţia 1.2.40** *Să observăm că evenimentul elementar* $\omega \in \Omega$ *aparţine evenimentului* $\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} F_i$ *dacă şi numai dacă există un indice* $n \geq 1$ *cu proprietatea că* $\omega \in \bigcap_{i=n}^{\infty} F_i$*, şi deci* $\omega$ *aparţine tuturor evenimentelor* $F_i$ *pentru* $i \geq n$*.*

*În concluzie evenimentul* $\liminf F_n$ *este format din toate evenimentele elementare ce aparţin tuturor evenimentelor* $F_n$*, începând de la un anumit rang.*

*În mod analog se poate justifica faptul că evenimentul* $\limsup F_n$ *este format din toate evenimentele elementare* $\omega$ *ce aparţin unui număr infinit de evenimente* $F_n$ *(adică există un şir* $n_1 < n_2 < \ldots$ *astfel încât* $\omega \in F_{n_1} \bigcap F_{n_2} \bigcap \ldots$*).*

**Observaţia 1.2.41** *Notând cu* $I_F : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ *funcţia caracteristică a unei mulţimi* $F \subset \Omega$*, definită prin*

$$I_F(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \omega \in F \\ 0, & \text{dacă } \omega \in \Omega - F \end{cases},$$

*se pot demonstra următoarele egalităţi:*

*i)* $\liminf F_n = \{\omega \in \Omega : \liminf I_{F_n}(\omega) = 1\}$

*ii)* $\limsup F_n = \{\omega \in \Omega : \limsup I_{F_n}(\omega) = 1\}$

*iii) Dacă există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \left\{\omega \in \Omega : \text{ există } \lim_{n\to\infty} I_{F_n}(\omega) \text{ şi } \lim_{n\to\infty} I_{F_n}(\omega) = 1\right\}.$$

*Relaţiile de mai sus arată că definiţiile pentru* $\liminf F_n$ *şi* $\limsup F_n$ *corespund celor pentru şiruri de numere reale,* $\liminf x_n$ *şi* $\limsup x_n$.

**Propoziţia 1.2.42 (continuitatea măsurii de probabilitate)** *Dacă* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *este un şir de evenimente pentru care există* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F_n$*, atunci*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n).$$

*În particular:*

*a) Dacă* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *este şir crescător de evenimente atunci are loc*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n)$$

*b) Dacă* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *este şir descrescător de evenimente atunci are loc*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n).$$

**Propoziţia 1.2.43** *Pentru un şir de evenimente* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *are loc inegalitatea*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n).$$

## 1.3 Variabile aleatoare

### 1.3.1 Definiţie şi proprietăţi

**Definiţia 1.3.1 (variabilă aleatoare)** *Numim* variabilă aleatoare *reală pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *o funcţie* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *măsurabilă în raport cu* $\sigma$*-algebrele corespunzătoare (*$\mathcal{F}$ *pe* $\Omega$*, respectiv* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pe* $\mathbb{R}$*), adică având proprietatea că:*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \tag{1.11}$$

*pentru orice mulţime boreliană $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

**Examplul 1.3.2** *La aruncarea a două monede, funcţia $X$ reprezentând numărul de feţe stemă obţinut este o variabilă aleatoare pe spaţiul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ unde:*

- $\Omega = \{(S,S), (S,B), (B,S), (B,B)\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $P : \Omega \to [0,\infty)$, $P(A) = \frac{|A|}{4}$, $A \in \mathcal{F}$,

*deoarece*

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing, & 0,1,2 \notin B \\ \{(B,B)\}, & 0 \in B \text{ şi } 1,2 \notin B \\ \{(S,B),(B,S)\}, & 1 \in B \text{ şi } 0,2 \notin B \\ \{(S,S)\} & 2 \in B \text{ şi } 0,1 \notin B \\ \{(B,B),(S,B),(B,S)\} & 0,1 \in B \text{ şi } 2 \notin B \\ \{(S,B),(B,S),(S,S)\} & 1,2 \in B \text{ şi } 0 \notin B \\ \{(B,S),(S,S)\} & 0,2 \in B \text{ şi } 1 \notin B \\ \{(S,S),(S,B),(B,S),(B,B)\} & 0,1,2 \in B \end{cases} \in \mathcal{F}$$

*pentru orice mulţime boreliană $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

**Observaţia 1.3.3** *Pentru a simplifica notaţia, pentru o mulţime Boreliană $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ şi o variabilă aleatoare $X$, în continuare vom nota pe scurt mulţimea $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ prin $\{X \in B\}$.*

*Spre exemplu, evenimentul $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, a)\}$ va fi notat pe scurt prin $\{X < a\}$ sau $\{X \in (-\infty, a)\}$.*

**Propoziţia 1.3.4** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dacă şi numai dacă are loc una din următoarele relaţii echivalente:*

*i)* $\{X < c\} = X^{-1}((-\infty, c)) \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $c \in \mathbb{R}$.

*ii)* $\{X \le c\} = X^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $c \in \mathbb{R}$.

*iii)* $\{X > c\} = X^{-1}((c, +\infty)) \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $c \in \mathbb{R}$.

*iv)* $\{X \ge c\} = X^{-1}([c, +\infty)) \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $c \in \mathbb{R}$.

**Definiţia 1.3.5** *Fie $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ spaţii măsurabile. O funcţie $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ se numeşte* măsurabilă *dacă*

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{F}, \qquad \forall G \in \mathcal{G}.$$

**Teorema 1.3.6** *Dacă $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ este continuă, atunci $f$ este măsurabilă.*

**Propoziţia 1.3.7** *Dacă $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ este o funcţie măsurabilă şi $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ este o variabilă aleatoare, atunci $f \circ X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ este de asemenea o variabilă aleatoare.*

**Consecinţa 1.3.8** *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $X$ este o variabilă aleatoare, atunci $f \circ X$ este de asemenea o variabilă aleatoare.*

*În particular, $c + X$ $(c \in \mathbb{R})$, $c \cdot X$ $(c \in \mathbb{R})$, $X^2$, $|X|, \frac{1}{X}$ (dacă $X \neq 0$), $\sin X$ sunt de asemenea variabile aleatoare.*

**Propoziţia 1.3.9** *Dacă $(X_n)_{n \geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare, atunci*

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \inf_{n \geq 1} X_n(\omega), \qquad Y(\omega) = \sup_{n \geq 1} X_n(\omega), \\ \liminf X_n(\omega) &= \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} X_k(\omega) \text{ şi } \limsup X_n(\omega) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} X_k(\omega) \end{aligned}$$

*sunt de asemenea varibile aleatoare.*

**Consecinţa 1.3.10** *Dacă $(X_n)_{n \geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare pentru care există limita $X(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_n(\omega)$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci $X$ este o variabilă aleatoare.*

**Propoziţia 1.3.11** *Dacă $X$ şi $Y$ sunt variabile aleatoare, atunci mulţimile următoare sunt măsurabile:*

$$\begin{aligned} \{X < Y\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\} \in \mathcal{F} \\ \{X \leq Y\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\{X < Y\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} \left( \underbrace{\{X < c\}}_{\in \mathcal{F}} \bigcap \underbrace{\{Y > c\}}_{\mathcal{F}} \right) \in \mathcal{F}$$

*şi* $\{X \geq Y\} = \left( \underbrace{\{X < Y\}}_{\mathcal{F}} \right)^c \in \mathcal{F}$.

**Propoziţia 1.3.12** *Dacă $X$ şi $Y$ sunt două variabile aleatoare, atunci $X - Y, X + Y, X \cdot Y$, şi $\frac{X}{Y}$ (dacă $Y \neq 0$) sunt de asemenea variabile aleatoare.*

**Definiţia 1.3.13** *O variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte* discretă*, dacă mulţimea valorilor posibile $X(\Omega)$ a lui $X$ este o mulţime discretă (o mulţime finită sau o mulţime infinit numărabilă).*

**Observaţia 1.3.14** *O variabila aleatoare discretă $X$ poate lua numai un număr finit de valori sau o mulţime de valori cel mult numărabilă, şi deci mulţimea valorilor posibile a lui $X$ formează un şir (finit sau infinit). În ambele cazuri, aceste valori formează un şir $x_1, x_2, \ldots$ (finit sau infinit) şi există $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjuncte două câte două cu $\cup_{n\geq 1} A_n = \Omega$ astfel încât*

$$X(\omega) = \sum_{n\geq 1} x_n 1_{A_n}(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{1.12}$$

*Reamintim că pentru o mulţime $A \subset \Omega$ am notat prin $1_A$ funcţia caracteristică (sau indicatorul) mulţimii $A$, adică*

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega \backslash A \end{cases}. \tag{1.13}$$

*Notând cu $p_n = P(A_n)$, $n \geq 1$, putem reprezenta variabila aleatoare $X$ dată de (1.12) sub forma*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

*numită şi* distribuţia variabilei aleatoare *$X$.*

*Cum evenimentele $A_i$, $i = 1, 2, ...$, formează un sistem complet de evenimente (sunt disjuncte două câte două şi $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \Omega$), obţinem condiţiile necesare şi suficiente ca distribuţia (1.14) să reprezinte o variabilă aleatoare: $p_i \geq 0$ oricare ar fi $i \geq 1$, şi*

$$\sum_{i\geq 1} p_i = \sum_{i\geq 1} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = P(\Omega) = 1. \tag{1.15}$$

### 1.3.2 Funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare

**Definiţia 1.3.15** *Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare, numim* funcţie de distribuţie *a variabilei aleatoare $X$ , funcţia $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definită prin*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

**Examplul 1.3.16** *Dacă $X$ este o variabilă aleatoare ce ia un număr finit de valori $x_1 < \ldots < x_n$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_n$, adică dacă*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix},$$

*atunci funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare $X$ este:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + ...p_{n-1}, & x_{n-1} \leq x < x_n \\ \underbrace{p_1 + p_2 + ...p_n}_{1}, & x_n \leq x \end{cases}$$

**Examplul 1.3.17** *Dacă $X$ este o variabila aleatoare discretă finită, dată de*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix},$$

*atunci funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare $X$ este*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.5, & 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}.$$

**Teorema 1.3.18** *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare şi $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare $X$.*

*Pentru orice numere reale $x_1$ şi $x_2$ cu $x_1 < x_2$ au loc următoarele:*

$$\begin{aligned} P(x_1 &< X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1), \\ P(x_1 &< X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) - P(X = x_2), \\ P(x_1 &\leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) - P(X = x_2) + P\left(X = x_1\right), \\ P(x_1 &\leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) + P(X = x_2). \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.19 (caracterizarea funcţiei de distribuţie)** *Dacă $F = F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ este funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare $X$ atunci $F$ are următoarele proprietăţi:*

*i) $F$ este nedescrescătoare, adică $F(x_1) \leq F(x_2)$, oricare ar fi $x_1 \leq x_2$*

*ii)* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ *şi* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

*iii)* $F(x+0) = \lim_{y\searrow x} F(y) = F(x)$, *adică* $F$ *este continuă la dreapta în orice punct* $x \in \mathbb{R}$.

*Reciproc, dacă o funcţie* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *verifică cele trei proprietăţi de mai sus, atunci* $F$ *este funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare, adică există o variabilă* $X$ *(pe un anumit spaţiu de probabilitate) având funcţia de distribuţie* $F = F_X$*).*

### 1.3.3 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare discrete

Reamintim că o variabilă aleatoare reală $X$ definită pe un spaţiu de probabilitatea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numeşte *discretă* dacă mulţimea valorilor ei $X(\Omega)$ este o mulţime finită sau infinit numărabilă. În ambele cazuri, aceste valori formează un şir $x_1, x_2, \ldots$ (finit sau infinit) şi există $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjuncte două câte două cu $\cup_{n\geq 1} A_n = \Omega$ astfel încât

$$X(\omega) = \sum_{n\geq 1} x_n 1_{A_n}(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{1.17}$$

Notând cu $p_n = P(A_n)$, $n \geq 1$, putem reprezenta variabila aleatoare $X$ dată de (1.17) sub forma

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

**Definiţia 1.3.20** *Definim* media *variabilei aleatoare* $X$ *discrete dată de (1.17) (sau (1.18)), notată cu* $E(X)$*, prin*

$$E(X) = \sum_{n\geq 1} x_n P(A_n) = \sum_{n\geq 1} x_n p_n, \tag{1.19}$$

*dacă această serie este absolut convergentă, adică* $\sum_{n\geq 1} |x_n p_n| < \infty$.

**Observaţia 1.3.21** *Condiţia de absolut convergenţă a seriei de mai sus este necesară pentru corectitudinea definiţiei mediei, deoarece, aşa după cum a observat B. Riemann într-una din lucrările sale (Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, publicată în 1854), dacă o serie este convergentă dar nu şi absolut convergentă, atunci pentru orice număr real, există o permutare a termenilor seriei, astfel încât noua serie este convergentă la numărul real ales.*

*De asemenea, se ştie că dacă o serie este absolut convergentă, atunci suma seriei este aceeaşi pentru orice permutare a indicilor termenilor seriei (a se vedea spre exemplu [14], Toerema 1.0.1, sau [7], p. 68).*

**Observaţia 1.3.22 (corectitudinea definiţiei mediei)** *Pentru ca definiţia de mai sus a mediei variabilei aleatoare $X$ să fie corectă, trebuie să verificăm că dacă variabila aleatoare $X$ se poate reprezenta în două moduri*

$$X(\omega) = \sum_{n\geq 1} x_n 1_{A_n}(\omega) = \sum_{m\geq 1} y_m 1_{B_m}(\omega), \qquad \omega \in \Omega, \tag{1.20}$$

*unde $x_n, y_m \in \mathbb{R}$, $m, n \geq 1$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ şi $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ sunt disjuncte două câte două, şi $\cup_{n\geq 1} A_n = \cup_{m\geq 1} B_m = \Omega$, atunci*

$$\sum_{n\geq 1} x_n P(A_n) = \sum_{m\geq 1} y_m P(B_m).$$

*Considerăm $C_{mn} = A_n \cap B_m \in \mathcal{F}$, $m, n \geq 1$, şi observăm că evenimentele $\{C_{mn}\}_{m,n\geq 1}$ sunt disjuncte două câte două, şi au loc relaţiile:*

$$\begin{aligned} \cup_{m\geq 1} C_{mn} &= \cup_{m\geq 1} (A_n \cap B_m) = A_n \cap (\cup_{m\geq 1} B_m) = A_n \cap \Omega = A_n, & (1.21)\\ \cup_{n\geq 1} C_{mn} &= \cup_{n\geq 1} (A_n \cap B_m) = B_m \cap (\cup_{n\geq 1} A_n) = B_m \cap \Omega = B_m, & (1.22) \end{aligned}$$

*oricare ar fi $m, n \geq 1$. De asemenea, dacă $C_{mn} \neq \varnothing$, considerând în egalitatea (1.20) $\omega \in C_{mn} = A_n \cap B_m$ rezultă că $x_n = y_m$, şi deci avem*

$$x_n P(C_{mn}) = y_m P(C_{mn}),$$

*oricare ar fi $m, n \geq 1$. Sumând după $m, n \geq 1$ aceste relaţii, obţinem*

$$\sum_{m,n\geq 1} x_n P(C_{mn}) = \sum_{m,n\geq 1} y_m P(C_{mn}). \tag{1.23}$$

*Folosind relaţia (1.21) şi faptul că evenimentele $\{C_{mn}\}_{m,n\geq 1}$ sunt disjuncte două câte două, putem rescrie echivalent suma din membrul drept astfel*

$$\begin{aligned} \sum_{m,n\geq 1} x_n P(C_{mn}) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} x_n P(C_{mn}) \\ &= \sum_{n\geq 1} x_n \sum_{m\geq 1} P(C_{mn}) \\ &= \sum_{n\geq 1} x_n P(\cup_{m\geq 1} C_{mn}) \\ &= \sum_{n\geq 1} x_n P(A_n), \end{aligned}$$

*şi în mod similar*

$$\sum_{m,n\geq 1} y_m P\left(C_{mn}\right) = \sum_{m\geq 1} y_m P\left(B_m\right).$$

*Folosind cele două relaţii de mai sus şi egalitatea (1.23), obţinem*

$$\sum_{n\geq 1} x_n P\left(A_n\right) = \sum_{m\geq 1} y_m P\left(B_m\right),$$

*ceea ce demonstrează corectitudinea definiţiei mediei (valoarea mediei nu depinde de alegerea reprezentării (1.17) a variabilei aleatoare).*

**Propoziţia 1.3.23** *Fie $X$ şi $Y$ două variabile aleatoare discrete cu medii finite. Au loc următoarele:*

**i)** *Dacă $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$ (constantă) oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci:*

$$E(X) = c.$$

**ii) (liniaritatea mediei)** *Pentru orice numere reale $a, b \in \mathbb{R}$, variabila aleatoare $aX + bY$ are medie şi*

$$E\left(aX + bY\right) = aE\left(X\right) + bE\left(Y\right).$$

**iii)** *Dacă în plus variabilele aleatoare $X$ şi $Y$ sunt independente, atunci variabila aleatoare $XY$ are medie şi*

$$E\left(XY\right) = E\left(X\right)E\left(Y\right).$$

**iv) (monotonia mediei)** *Dacă $X(\omega) \geq Y(\omega)$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci*

$$E\left(X\right) \geq E\left(Y\right).$$

**v) (inegalitatea Jensen)** *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă pentru care variabila aleatoare $f(X)$ are medie, atunci are loc inegalitatea*

$$f\left(E\left(X\right)\right) \leq E\left(f\left(X\right)\right).$$

**Definiţia 1.3.24 (caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare discrete)** *Pentru o variabilă aleatoare discretă $X$ având reprezentarea $X = \sum_{i\geq 1} x_i 1_{A_i}$ (unde $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{F}$ for-*

*mează o partiţie disjunctă a lui $\Omega$), sau echivalent (notând $p_i = P(A_i)$, $i \geq 1$)*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix},$$

*definim următoarele:*

**i)** *momentul de ordin $n \in \mathbb{N}^*$, notat prin $M_n(X)$, definit prin*

$$M_n(X) = E(X^n) = \sum_{i \geq 1} x_i^n P(A_i) = \sum_{i \geq 1} x_i^n p_i, \tag{1.24}$$

**ii)** *momentul centrat de ordin $n \in \mathbb{N}^*$, notat prin $\mu_n(X)$, definit prin*

$$\mu_n(X) = E((X - E(X))^n) = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^n P(A_i) = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^n p_i, \tag{1.25}$$

**iii)** *dispersia, notată prin $\sigma^2(X)$, definită prin*

$$\sigma^2(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^2 P(A_i) = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X))^2 p_i,$$

*atunci când mediile respective sunt bine definite.*

**Observaţia 1.3.25** *Este uşor de observat că momentul de ordin $n = 1$ coincide cu media, adică $M(X) = E(X)$, şi că dispersia coincide cu momentul centrat de ordin $n = 2$, adică $\mu_2(X) = \sigma^2(X)$.*

**Propoziţia 1.3.26** *Fie $X, Y$ variabile aleatoare discrete. Au loc următoarele.*

**i)** *Dacă $X$ şi $Y$ au momente de ordin doi (finite), atunci variabila aleatoare $X \cdot Y$ are medie, şi are loc relaţia*

$$|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) E(Y^2)} \tag{1.26}$$

**ii)** *Dacă $X$ are moment de ordin doi (finite), atunci $X$ are dispersie (finită), şi are loc*

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{1.27}$$

**iii)** *Dacă variabilele $X$ şi $Y$ sunt independente şi admit dispersii (finite), atunci:*

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \tag{1.28}$$

**iv)** *Dacă $X$ are dispersie (finită), atunci şi variabila aleatoare $aX+b$ are dispersie finită oricare ar fi constantele $a, b \in \mathbb{R}$, şi are loc relaţia*

$$\sigma^2(aX+b) = a^2\sigma^2(X) \tag{1.29}$$

*În particular, dispersia unei variabile aleatoare constante este nulă:*

$$\sigma^2(b) = 0, \qquad \text{oricare ar fi } b \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

**v)** *Dacă $X$ are dispersie (finită), atunci oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea*

$$\sigma^2(X) = E\left((X - M(X))^2\right) \le E\left((X-x)^2\right)$$

## 1.4 Câteva modele clasice de urne

### 1.4.1 Distribuţia Bernoulli cu parametrul $p \in [0,1]$

**Definiţia 1.4.1** *Spunem că o variabilă aleatoare $X$ are o distribuţie Bernoulli cu parametrul $p \in [0,1]$ dacă $X$ este o variabilă aleatoare discretă ce ia (numai) valorile $0$ şi $1$, cu probabilităţile $q = 1-p$, respectiv $p$, adică $X$ are reprezentarea*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

**Observaţia 1.4.2** *Distribuţia Bernoulli modelează rezultatul efectuării unui experiment ce poate rezulta (numai) în unul din două cazuri posibile, pe care convenim să le numim "succes" (reprezentat de valoarea "1"), respectiv "insucces" (reprezentat de valoarea "0").*

*Parametrul $p$ al distribuţiei Bernoulli reprezintă probabilitatea obţinerii succesului, adică $p = P(X=1)$, iar $q = 1-p$ reprezintă probabilitatea obţinerii insuccesului, adică $q = 1-p = P(X=0)$.*

**Propoziţia 1.4.3** *Media şi dispersia unei variabile aleatoare $X$ având distribuţia Bernoulli cu parametrul $p \in [0,1]$ sunt*

$$E(X) = p \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2(X) = p(1-p). \tag{1.32}$$

### 1.4.2 Distribuţia binomială cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in [0,1]$

**Definiţia 1.4.4** *Spunem că o variabilă aleatoare $X$ are o distribuţie binomială cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in [0,1]$ dacă $X$ este o variabilă aleatoare discretă având reprezentarea*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

*unde*

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{1.34}$$

**Observaţia 1.4.5** *Este uşor de observat $p_k \geq 0$ oricare ar fi $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ şi că*

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1,$$

*ceea ce demonstrează corectitudinea definiţiei anterioare, adică relaţiile (1.33) – (1.34) de mai sus definesc într-adevăr distribuţia unei variabile aleatoare.*

**Observaţia 1.4.6** *Este uşor de observat că distribuţia binomială cu parametrii $n = 1$ şi $p \in [0,1]$ devine distribuţia Bernoulli cu parametrul $p$, şi deci distribuţia binomială poate fi privită ca o generalizare a a distribuţiei Bernoulli.*

**Propoziţia 1.4.7** *Media şi dispersia unei variabile aleatoare binomiale $X$ cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $p \in [0,1]$ sunt date de relaţiile:*

$$E(X) = np \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2(X) = np(1-p).$$

### 1.4.3 Distribuţia hipergeometrică cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$

**Definiţia 1.4.8** *Spunem că o variabilă aleatoare $X$ are o distribuţie hipergeometrică cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$ dacă $X$ este o variabilă aleatoare discretă ce ia (numai) valori $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ satisfăcând condiţia de compatibilitate*

$$\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{a, n\}, \tag{1.35}$$

*cu probabilităţi corespunzătoare*

$$P(X = k) = p_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}. \tag{1.36}$$

**Observaţia 1.4.9** *Egalând coeficientul lui $x^n$ din egalitatea*

$$(1+x)^a (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$$

*obţinem*

$$\sum_{\max\{0,n-b\}\leq k\leq\min\{a,n\}} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n,$$

*de unde prin împărţire cu $C_{a+b}^n$ obţinem*

$$\sum_{\max\{0,n-b\}\leq k\leq\min\{a,n\}} p_k = \sum_{\max\{0,n-b\}\leq k\leq\min\{a,n\}} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = 1,$$

*ceea ce demonstrează corectitudinea definiţiei anterioare.*

**Propoziţia 1.4.10** *Media şi dispersia unei variabile hipergeometrice $X$ cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$ sunt date de relaţiile:*

$$E(X) = np \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2(X) = \frac{a+b-n}{a+b-1} np(1-p), \tag{1.37}$$

*unde $p = \frac{a}{a+b}$.*

### 1.4.4 Distribuţia urnei lui Pólya

**Notaţia 1.4.11** *Pentru a simplifica notaţia, pentru $x, h \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ vom nota prin*

$$x^{(n,h)} = x(x+h)(x+2h)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)h) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+ih) \tag{1.38}$$

*factorialul (crescător) generalizat cu incrementul $h$. Vom folosi convenţia că un produs după o mulţime vidă de indici este egal cu 1, adică $x^{(0,h)} = 1$ oricare ar fi $x, h \in \mathbb{R}$.*

*In cazul particular $h = -1$ vom nota prin $x^{(n)} = x^{(n,-1)} = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)$ factorialul descrescător, iar pentru $h = 1$ vom nota prin $x^{[n]} = x^{(n,1)} = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$ factorialul crescător (simbolul Pochhammer $x_n$).*

**Definiţia 1.4.12** *Spunem că o variabilă aleatoare $X_n^{a,b,c}$ are o distribuţie Pólya cu parametrii $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $c \in \mathbb{R}$ care verifică ipoteza*

$$a+(n-1)c \geq 0 \qquad \text{şi} \qquad b+(n-1)c \geq 0, \tag{1.39}$$

*dacă $X_n^{a,b,c}$ este o variabilă aleatoare discretă având reprezentarea*

$$X_n^{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_{0,k}^{a,b,c} & p_{1,k}^{a,b,c} & \dots & p_{n,k}^{a,b,c} \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

*cu probabilităţi corespunzătoare*

$$P\left(X_n^{a,b,c} = k\right) = p_{n,k}^{a,b,c} = C_n^k \frac{a^{(k,c)} b^{(n-k,c)}}{(a+b)^{(n,c)}}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{1.41}$$

**Observaţia 1.4.13** *Folosind formula binomială generalizată*

$$(a+b)^{(n,c)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{(k,c)} b^{(n-k,c)}, \tag{1.42}$$

*prin împărţire cu $(a+b)^{(n,c)}$ obţinem $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}^{a,b,c} = 1$, relaţie ce demonstrează corectitudinea definiţiei (relaţiile (1.40) – (1.41)) definesc într-adevăr distribuţia unei variabile aleatoare).*

**Observaţia 1.4.14** *În cazul $c = 0$ obţinem*

$$p_{n,k}^{a,b,0} = C_n^k \frac{a^{(k,0)} b^{(n-k,0)}}{(a+b)^{(n,0)}} = C_n^k \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k},$$

*şi comparând cu probabilităţile (1.34) corespunzătoare ale distribuţiei binomiale, rezultă că distribuţia lui Pólya $X_n^{a,b,0}$ coincide cu distribuţia binomială cu parametrii $n$ şi $p = \frac{a}{a+b}$ (extragere cu înlocuire).*

*Similar, în cazul $c = -1$ obţinem*

$$\begin{aligned}
p_{n,k}^{a,b,-1} &= C_n^k \frac{a^{(k,-1)} b^{(n-k,-1)}}{(a+b)^{(n,-1)}} \\
&= C_n^k \frac{a(a-1)\dots(a-(k-1)) \cdot b(b-1)\dots(b-(n-k-1))}{(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-(n-1))} \\
&= C_n^k \frac{\frac{a!}{(a-k)!} \frac{b!}{(b-(n-k))!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-n)!}} \\
&= \frac{\frac{a!}{k!(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!(b-(n-k))!}}{\frac{(a+b)!}{n!(a+b-n)!}} \\
&= \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},
\end{aligned}$$

*şi comparând cu probabilităţile (1.36) corespunzătoare ale distribuţiei hipergeometrice, rezultă că distribuţia lui Pólya $X_n^{a,b,-1}$ coincide cu distribuţia hipergeometrică cu parametrii $n$ şi $a, b$*

*(extragere fără înlocuire).*

**Propoziţia 1.4.15** *Media şi dispersia unei variabile aleatoare* $X_n^{a,b,c}$ *având o distribuţie Pólya cu parametrii* $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}_+$ *şi* $c \in \mathbb{R}$ *care verifică ipoteza (1.39), sunt date de*

$$E\left(X_n^{a,b,c}\right) = \frac{na}{a+b} \qquad \text{şi} \qquad \sigma^2\left(X_n^{a,b,c}\right) = \frac{nab}{(a+b)^2}\left(1 + \frac{(n-1)c}{a+b+c}\right). \tag{1.43}$$

# Capitolul 2

# Operatorul Bernstein

## 2.1 Operatorul Bernstein

Polinomul Bernstein de grad $n$ corespunzător unei funcţii $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este definit prin

$$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k}, \tag{2.1}$$

iar operatorul corespunzător $B_n$ se numeşte *operatorul Bernstein.*

## 2.2 Câteva proprietăţi ale operatorului Bernstein

**Teorema 2.2.1 ([4])** *Pentru orice funcţie continuă* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$*,*

$$\lim_{n\to\infty} B_n\left(f;x\right)=f\left(x\right),$$

*uniform în raport cu* $x\in[0,1]$*.*

**Teorema 2.2.2 (Teorema Bohman-Korovkin)** *Fie* $\left(L_n\right)_n$*,* $L_n:V\to\mathcal{F}\left([a,b]\right)$ *unde* $V$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului* $\mathcal{F}\left([a,b]\right)$ *al funcţiilor reale definite pe intervalul* $[a,b]$*. Presupunem că* $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\in V\cap C\left([a,b]\right)$ *formează un sistem Cebâşev pe intervalul* $[a,b]$*, adică funcţia* $\varphi=\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2$ *are cel mult două rădăcini în intervalul* $[a,b]$*, oricare ar fi constantele* $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$*.*

*Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} L_n\left(\varphi_i\right)=\varphi_i, \qquad \textit{uniform pe } [a,b] \textit{ pentru } i=0,1,2, \tag{2.2}$$

*atunci*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f, \qquad \textit{uniform pe } [a,b], \tag{2.3}$$

*pentru orice* $f \in V \cap C([a,b])$.

**Observaţia 2.2.3** *Varianta iniţială a teoremei anterioare a fost demonstrată în 1952 de către Harald Bohman ([6]) în cazul particular al funcţiilor test* $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, *şi* $\varphi_2(x) = x^2$, *ea fiind apoi extinsă în 1953 de către Pavel Korovkin ([26]).*

**Teorema 2.2.4** *Pentru orice* $n \geq 1$, *operatorul Bernstein* $B_n : \mathcal{F}([0,1]) \to C([0,1])$ *definit de (2.1) este un operator liniar pozitiv, care transformă funcţiile test* $e_0(x) \equiv 1$, $e_1(x) \equiv x$, *şi* $e_2(x) \equiv x^2$ *respectiv în*

$$\begin{aligned} B_n(e_0;x) &= 1, \\ B_n(e_1;x) &= x, \\ B_n(e_2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}, \end{aligned}$$

*oricare ar fi* $x \in [0,1]$.

*În particular, dacă funcţia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* $[0,1]$, *atunci* $B_n(f;x)$ *converge uniform la* $f(x)$ *pentru* $x \in [0,1]$ *atunci când* $n \to \infty$.

*Mai mult, dacă* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie convexă, atunci* $B_n(f;x) \geq f(x)$ *oricare ar fi* $x \in [0,1]$.

Reamintim că modulul de continuitate $\omega = \omega^f$ al unei funcţii $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este definit prin

$$\omega(\delta) = \omega^f(\delta) = \max\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \delta\}. \tag{2.4}$$

**Teorema 2.2.5** *Dacă* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$, *atunci oricare ar fi* $n > 1$ *avem*

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq (1 + x(1-x))\,\omega\left(n^{-1/2}\right), \quad x \in [0,1], \tag{2.5}$$

*unde* $\omega = \omega^f$ *reprezintă modulul de continuitate al funcţiei* $f$.

*În particular, avem*

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{5}{4}\omega\left(n^{-1/2}\right), \qquad x \in [0,1]. \tag{2.6}$$

**Teorema 2.2.6 ([50])** *Valoarea optimală a constantei $C$ pentru care inegalitatea lui Popoviciu*

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq C\omega\left(n^{-1/2}\right),\qquad x\in[0,1], \tag{2.7}$$

*este verificată pentru orice funcţiei continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ şi orice $n\geq 1$ este*

$$C_{opt}=\frac{4306+837\sqrt{6}}{5932}\approx 1.0898873..., \tag{2.8}$$

*atinsă în cazul $n=6$ pentru o anumită alegere a funcţiei continue $f$.*

**Teorema 2.2.7** *Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuu diferenţiabilă pe $[0,1]$, atunci*

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq n^{-1/2}\omega_1\left(n^{-1/2}\right)\left(x(1-x)+\sqrt{x(1-x)}\right),\qquad x\in[0,1], \tag{2.9}$$

*oricare ar fi $n>1$, unde*

$$\omega_1(\delta)=\omega_1^f(\delta)=\max\left\{\left|f'(x)-f'(y)\right|:x,y\in[0,1],\ |x-y|\leq\delta\right\}$$

*reprezintă modulul de continuitate al derivatei $f'$.*

*În particular, avem*

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq\frac{3}{4}n^{-1/2}\omega_1\left(n^{-1/2}\right),\qquad x\in[0,1]. \tag{2.10}$$

**Observaţia 2.2.8** *Tiberiu Popoviciu a obţinut pentru prima dată o estimare a erorii punctuale de aproximare a operatorului Bernstein în termeni de modulul de continuitate al derivatei funcţiei considerate ([45]), sub forma inegalităţii*

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq C\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega_1^f\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),\qquad x\in[0,1], \tag{2.11}$$

*pentru orice funcţie continuu diferenţiabilă $f\in C^1([0,1])$, unde $C$ este o constantă universală ce nu depinde de alegerea funcţiei $f$.*

*Considerând $\delta=\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ în demonstraţia teoremei anterioare şi repetând raţionamentul, avem*

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\ \leq\ \omega_1(\delta)\left(\frac{1}{\delta}\sigma^2(X)+\sigma(X)\right)$$

$$\leq \omega_1\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\left(\sqrt{\frac{n}{x(1-x)}}\frac{x(1-x)}{n}+\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$
$$\leq 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega_1\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),$$

*obţinând astfel o demonstraţie a rezultatului lui Popoviciu cu o valoare explicită a constantei $C = 2$.*

*Se ştie că valoarea constantei $C$ pentru care inegalitatea lui Popoviciu (2.11) are loc pentru orice funcţie continuu diferenţiabilă $f \in C^1([0,1])$ este $C \leq \frac{5}{8}$ (a se vedea spre exemplu [41], pag. 95).*

**Teorema 2.2.9 (Teorema lui Voronovskaja, [62])** *Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admite derivată de ordin doi continuă pe $[0,1]$, atunci oricare ar fi $n > 1$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2}f''(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{2.12}$$

**Teorema 2.2.10** *Operatorul Bernstein $B_n$ definit de (2.1) este un operator care păstrează monotonia, mai precis, dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie monoton crescătoare (descrescătoare), atunci $B_n(f;\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ este de asemenea o funcţie monoton crescătoare (descrescătoare).*

## 2.3 Generalizări ale operatorului Bernstein

Prima generalizare importantă a operatorului Bernstein este datorată academicianului român Dimitrie D. Stancu, care în 1968 a observat că distribuţia binomială folosită de către Berstein pentru a defini operatorul Bernstein $B_n$ este un caz particular al distribuţiei Pólya. Această observaţie l-a condus la introducerea în lucrarea [51] ([52]) a operatorului

$$P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = E\left(f\left(\frac{X_n^{x,1-x,\alpha}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,\alpha)}(1-x)^{(n-k,\alpha)}}{1^{(n,\alpha)}} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{2.13}$$

unde $X_n^{x,1-x,\alpha}$ este o variabilă aleatoare având distribuţia Pólya cu parametrii $n$ şi $x, 1-x$ şi $\alpha$ (a se vedea Secţiunea 1.4.4). Acest operator este în prezent cunoscut ca *operatorul Bernstein-Stancu* a fost intens studiat în literatura de specialitate. Este uşor de observat că pentru $\alpha = 0$ avem $P_n^{\langle 0\rangle} = B_n$, şi deci operatorul Bernstein-Stancu reprezintă o generalizare a operatorului clasic de aproximare $B_n$ a lui Bernstein.

**Observaţia 2.3.1** *Facem observaţia importantă că Stancu a considerat doar cazul $\alpha \geq 0$, cu excepţia afirmaţiei că în cazul $\alpha = -1/n$ operatorul de mai sus coincide cu operatorul de aproximare Lagrange al funcţiei $f$ pe nodurile $\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=0,\ldots,n}$, care nu poate fi folosit pentru aproximarea uniformă a funcţiilor, şi încheie cu observaţia că în continuare vom presupune că parametrul $\alpha$ este ne-negativ ("We will henceforth assume that the parameter is non-negative"). În lucrări ulterioare, D. D. Stancu foloseşte ipoteza $\alpha \geq 0$, ipoteză folosită aşa după cum am constatat cercetând literatura de specialitate de toţi cercetătorii de specialitate din aacest domeniu.*

În lucrarea [32], A. Lupaş şi L. Lupaş introduc operatorul de aproximare $L_n$ definit prin

$$L_n(f;x) = E\left(f\left(\frac{X_n^{x,1-x,1/n}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,1/n)}(1-x)^{(n-k,1/n)}}{1^{(n,1/n)}} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{2.14}$$

un caz particular al operatorului Bernstein-Stancu ($L_n = P^{\langle 1/n \rangle}$) operator cunoscut în literatura de specialitate sub numele de *operatorul Lupaş*.

Reamintim că pentru $k \in \mathbb{N}$, numărul $q$-întreg notat prin $[k]_q$ este definit prin $[0]_q = 0$, şi pentru $k > 0$ prin

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{q^k-1}{q-1}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases}, \tag{2.15}$$

$q$-factorialul $[k]_q!$ este definit prin

$$[k]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \cdot \ldots \cdot [k]_q, & k > 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}, \tag{2.16}$$

iar pentru $0 \leq k \leq n$ coeficientul $q$-binomial $\left[C_n^k\right]_q$ este definit prin

$$\left[C_n^k\right]_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}. \tag{2.17}$$

Folosind noţiunea de $q$-întreg, în 1987 Alexandru Lupaş a introdus ([30]) operatorul $L_{n,q}$ definit prin

$$L_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \left[C_n^k\right]_q \frac{q^{k(k-1)/2}}{\prod_{j=0}^{n-1}(1-x+q^j x)} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.18}$$

operator numit *operatorul q-Bernstein al lui Lupaş.* Este uşor de observat că în cazul $q = 1$ operatorul astfel definit coincide cu operatorul clasic al lui Bernstein ($L_{n,1} = B_n$), şi deci operatorul $L_{n,q}$ reprezintă o generalizare a acestuia .

O altă extensie a operatorului Bernstein folosind noţiunea de $q$-întreg este datorată lui George M. Phillips ([43]), care a considerat operatorul $B_{n,q}$ definit prin

$$B_{n,q}\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{\left[k\right]_{q}}{\left[n\right]_{q}}\right)\left[C_{n}^{k}\right]_{q}x^{k}\prod_{j=0}^{n-k-1}\left(1-q^{k}x\right), \tag{2.19}$$

numit *operatorul q-Bernstein al lui Phillips.*

O altă generalizare a operatorului Bernstein a fost dată de către Mursaleen şi co-autorii săi ([36]), folosind noţiunea de $(p,q)$-întreg, definită astfel: pentru $k\in\mathbb{N}$, $(p,q)$-întregul $\left[k\right]_{p,q}$ este definit prin

$$\left[k\right]_{p,q}=\frac{p^{k}-q^{k}}{p-q},\qquad n=0,1,2,\ldots,\quad 0<q<p\leq 1, \tag{2.20}$$

$(p,q)$-factorialul $\left[k\right]_{p,q}!$ este definit prin

$$\left[k\right]_{q}!=\begin{cases}\left[1\right]_{p,q}\left[2\right]_{p,q}\cdot\ldots\cdot\left[k\right]_{p,q}, & k>0\\ 1, & k=0\end{cases}, \tag{2.21}$$

iar pentru $0\leq k\leq n$ coeficientul $(p,q)$-binomial $\left[C_{n}^{k}\right]_{p,q}$ este definit prin

$$\left[C_{n}^{k}\right]_{p,q}=\frac{\left[n\right]_{p,q}!}{\left[k\right]_{p,q}!\left[n-k\right]_{p,q}!}. \tag{2.22}$$

Cu această pregătire, operatorul $S_{n,p,q}$ introdus de Mursaleen şi co-autorii săi în lucrarea [36] este definit prin

$$S_{n,p,q}\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{\left[k\right]_{p,q}}{\left[n\right]_{p,q}}\right)\left[C_{n}^{k}\right]_{p,q}x^{k}\prod_{j=0}^{n-k-1}\left(p^{j}-q^{j}x\right)\left(1-x\right)^{n-k},\qquad x\in\left[0,1\right], \tag{2.23}$$

numit *operatorul* $(p,q)$*-Bernstein al lui Mursaleen.*

# Capitolul 3

# Un nou operator de aproximare de tip Bernstein

## 3.1 Un nou operator de aproximare de tip Bernstein

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ vom nota prin $\mathcal{F}([a,b])$ mulţimea funcţiilor cu valori reale definite pe intervalul $[a,b]$, şi prin $C([a,b])$ mulţimea funcţiilor continue cu valori reale definite pe intervalul $[a,b]$.

Considerăm operatorul $P_n^{a,b,c} : \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$, definit prin

$$P_n^{a,b,c}(f;x) = Ef\left(\frac{1}{n}X_n^{a,b,c}\right) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}^{a,b,c} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad f \in \mathcal{F}([0,1]), \quad x \in [0,1], \tag{3.1}$$

$X_n^{a,b,c}$ este o variabilă aleatoare Pólya cu parametrii $n$ şi $a, b, c$ (a se vedea Secţiunea 1.4.4), iar parametrii $a, b, c$ depind în mod continuu de $n$ şi $x$, şi verifică $a, b \geq 0$ şi condiţia de compatibilitate (1.39) a distribuţiei Pólya:

$$a + (n-1)c \geq 0 \qquad \text{şi} \qquad b + (n-1)c \geq 0. \tag{3.2}$$

În cazul particular $a = x$, $b = 1 - x$ şi $c = \alpha \geq 0$ operatorul $P_n^{a,b,c}$ definit mai sus devine operatorul Bernstein-Stancu (2.13) definit de D. D. Stancu în [51]:

$$P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = P_n^{x,1-x,\alpha}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,\alpha)}(1-x)^{(n-k,\alpha)}}{1^{(n,\alpha)}} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{3.3}$$

operator ce generalizează operatorul clasic $B_n$ al lui Bernstein (cazul $\alpha = 0$).

Considerând $a = x$, $b = 1 - x$, şi $c = 1/n$ obţinem operatorul lui Lupaş (3.4) introdus în

[32]:

$$P_n^{\langle 1/n\rangle}(f;x) = P_n^{x,1-x,1/n}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,1/n)}(1-x)^{(n-k,1/n)}}{1^{(n,1/n)}} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{3.4}$$

**Observaţia 3.1.1** *Aşa cum am indicat mai sus, pentru $c \geq 0$ operatorul $P_n^{x,1-x,c}$ coincide cu operatorul Bernstein-Stancu, însă în lucrarea de faţă suntem interesaţi de cazul $c < 0$, care nu pare să fi fost considerat în literatura de specialitate. Aşa după cum arată rezultatele din Secţiunea 3.3, cazul $c < 0$ este cel care îmbunătăţeşte rezultatele de aproximare pentru operatorii de tip Bernstein. Pentru a justifica această afirmaţie, să observăm că, conform Lemei 3.3.2, eroarea de aproximare pentru operatori Pólya-Bernstein de forma (3.1) este mărginită de dispersia variabilei aleatoare $X_n^{a,b,c}$, care, conform Propoziţiei 1.4.15 este o funcţie crescătoare c. Cu toate că acesta argument este doar unul intuitiv, rezultatele obţinute în Teorema 3.3.3 (şi Observaţia 3.3.4) arată că alegerea $c = c(n,x) = -\frac{\min\{x,1-x\}}{n-1}$ care mimimizează valoarea dispersiei $\sigma^2(X_n^{x,1-x,c})$ în domeniul valorilor admisibile ale lui c date de (1.39), produce un operator ce dă erori de aproximare mai bune decât operatorul clasic Bernstein. Mai mult, rezultatele numerice prezentate în Secţiunea 3.6 sugerează de asemenea că pentru această alegere particulară, operatorul corespunzător dă o aproximare mai bună decât operatorii de tip Bernstein consideraţi mai sus (sau de către alţi operatori de tip Bernstein, prezentaţi în Secţiunea 2.3).*

*Cazul $c < 0$ a fost neglijat în literatură, şi există motive întemeiate pentru aceasta. Ipoteza de compatibilitate pentru distribuţia Pólya ce trebuie impusă în cazul $c < 0$ este (1.39), iar aceasta, pentru valori a şi b fixate şi pentru $n \to \infty$ (ipoteză justificată de interesul pentru comportamentul asimptotic al distribuţiei Pólya sau al operatorului $P_n^{a,b,c}$ corespunzător - a se vedea spre exmplu [20]), implică $c \geq 0$, cazul considerat de către D. D. Stancu ([51]). Mai precis, în lucrarea [51] Stancu indică faptul că pentru alegerea $\alpha = -\frac{1}{n}$ în (3.3) se obţine operatorul de interpolare Lagrange, care nu poate fi folosit pentru aproximarea uniformă a funcţiilor continue definite pe $[0,1]$, şi încheie cu afirmaţia "We will henceforth assume that the parameter $\alpha$ is non-negative".*

*Un alt motiv pentru care alegerea $a = x$ şi $b = 1-x$, pentru o valoare arbitrară $x \in [0,1]$ (alegere considerată de către Stancu, Lupaş, şi alţi cercetători), este că ipotezaa (1.39) conduce din nou la condiţia $c \geq 0$.*

Motivat de observaţia anterioară, considerăm alegerea particulară $a = x$, $b = 1-x$ şi $c = -\min\{x, 1-x\}/(n-1)$ a operatorului $P_n^{a,b,c}$ definit mai sus (să observăm că pentru această alegere ipoteza de compatibilitate (1.39) a distribuţiei Pólya este verificată pentru orice $n > 1$ şi $x \in [0,1]$), şi notăm prin $R_n : \mathcal{F}([0,1]) \to C([0,1])$ operatorul definit prin

$$\begin{aligned} R_n(f;x) &= Ef\left(\frac{1}{n} X_n^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}(1-x)^{(n-k,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}}{1^{(n,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}} f\left(\frac{k}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

## 3.2 Proprietăţi de aproximare ale operatorului $R_n$

**Teorema 3.2.1 ([39])** *Pentru orice $n > 1$, $R_n : \mathcal{F}([0,1]) \to C([0,1])$ definit de relaţia (3.5) este un operator liniar pozitiv, care transformă funcţiile test $e_0(x) \equiv 1$, $e_1(x) \equiv x$, şi $e_2(x) \equiv x^2$ respectiv în*

$$\begin{aligned} R_n(e_0;x) &= 1, \\ R_n(e_1;x) &= x, \\ R_n(e_2;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)(n-1-n\min\{x,1-x\})}{n(n-1-\min\{x,1-x\})}. \end{aligned}$$

*În particular, dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe intervalul $[0,1]$, atunci $R_n(f;x)$ converge uniform la $f(x)$ pentru $x \in [0,1]$ atunci când $n \to \infty$.*

*Mai mult, dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă, atunci $R_n(f;x) \geq f(x)$ oricare ar fi $x \in [0,1]$.*

## 3.3 Estimări ale erorii de aproximare ale operatorului $R_n$

Aşa cum am arătat în Secţiunea 2.2, în cazul unei funcţii continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, eroarea de aproximare a operatorului Bernstein $B_n$ verifică următoarea inegalitate

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq C\omega\left(n^{-1/2}\right), \qquad x \in [0,1], \ n = 1,2,\ldots, \tag{3.6}$$

unde $\omega(\delta) = \omega^f(\delta) = \max\{|f(x) - f(y)| : x,y \in [0,1], \ |x-y| \leq \delta\}$ reprezintă modulul de continuitate al funcţiei $f$, inegalitate demonstrată iniţial de Popoviciu pentru $C = \frac{3}{2}$ ([45]), şi îmbunătăţită ulterior de Lorentz la $C = \frac{5}{4}$ ([28], pag. 20), care a demonstrat de asemenea că valoarea optimală a constantei $C$ nu poate fi mei mică decât 1 ([28], pag. 20 – 21). Valoarea optimală a constantei $C$ pentru care inegalitatea (3.6) are loc pentru orice funcţie continuă fiind obţinută de către Sikkema ([50]), care a obţinut valoarea

$$C_{opt} = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5932} \approx 1.0898873... \tag{3.7}$$

**Observaţia 3.3.1** *În secţiunea următoare vom demonstra că de valoarea optimală a constantei în inegalitatea de tip Popoviciu pentru operatorul $R_n$ este de fapt strict mai mică decât valoarea optimală a constantei lui Sikkema.*

**Lema 3.3.2 ([39])** *Fie $X$ o variabilă aleatoare discretă ce ia valori în intervalul $[a,b] \subset \mathbb{R}$, cu medie $E(X) = x$ şi dispersie $\sigma^2(X)$, şi fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie pentru variabila aleatoare $f(X)$ are medie finită. Au loc următoarele:*

*a) Dacă $f$ este continuă pe $[a,b]$, atunci oricare ar fi $\delta > 0$ avem*

$$|Ef(X) - f(x)| \le \omega(\delta)\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\sigma^2(X)\right), \tag{3.8}$$

*unde $\omega(\delta) = \omega^f(\delta)$ reprezintă modulul de continuitate al funcţiei $f$.*

*b) Dacă $f$ este continuu diferenţiabilă pe $[a,b]$, avem*

$$|Ef(X) - f(x)| \le \omega_1(\delta)\left(\frac{1}{\delta}\sigma^2(X) + \sigma(X)\right). \tag{3.9}$$

*unde $\omega_1(\delta) = \omega_1^f(\delta)$ reprezintă modulul de continuitate al derivatei $f'$.*

*c) Dacă $f$ admite derivată de ordin doi continuă pe $[a,b]$, avem*

$$Ef(X) = f(x) + \frac{1}{2}f''(x)\sigma^2(X) + R(X), \tag{3.10}$$

*şi există $M > 0$ astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$|R(X)| \le \varepsilon\sigma^2(X) + (b-a)^2 MP(|X - x| > \delta), \tag{3.11}$$

*unde $M > 0$ şi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ depind de $f$, dar nu de $X$ sau $x$.*

**Teorema 3.3.3 ([39])** *Dacă funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[0,1]$, atunci oricare ar fi $n > 1$ are loc inegalitatea*

$$|R_n(f;x) - f(x)| \le \omega\left(n^{-1/2}\right)(1 + x(1-x)(1 - \min\{x, 1-x\})), \quad x \in [0,1], \tag{3.12}$$

*unde* $\omega(\delta) = \omega^f(\delta)$ *reprezintă modulul de continuitate al funcţiei* $f$.

*În particular, are loc inegalitatea*

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{31}{27}\omega\left(n^{-1/2}\right), \qquad x \in [0,1]. \tag{3.13}$$

**Observaţia 3.3.4** *Observăm că estimarea (3.12) a erorii de aproximare a operatorului* $R$ *îmbunătăţeşte inegalitatea corespunzătoare pentru operatorul clasic Bernstein*

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \omega\left(n^{-1/2}\right)(1 + x(1-x)), \;\; x \in [0,1], \tag{3.14}$$

*(inegalitatea (2.5) din Teorema 2.2.5) cu factorul* $\min\{x, 1-x\} \leq \frac{1}{2} < 1$.

*Constanta* $C = \frac{31}{27} = 1.14815$ *din inegalitatea (3.13) din enunţul teoremei este mai mică decât constanta obţinută de Popoviciu (3/2), respectiv de către Lorentz (5/4), în cazul operatorului Bernstein (a se vedea Teorema 2.2.5), dar este puţin mai mare decât constanta optimală* $C_{opt} \approx 1.0898873...$ *obţinută de către Sikkema (Teorema 2.2.6). Cu toate acestea constanta* $\frac{31}{27}$ *ce apare în inegalitatea (3.13) nu este optimală, şi am ales să prezentăm rezultatul în această formă datorită simplităţii demonstraţiei. În secţiunea următoare vom demonstra însă că valoarea optimală a constantei pentru care inegalitatea de tip Popoviciu are loc pentru operatorul* $R_n$ *pentru orice alegere a funcţiei continue este de fapt mai mică decât constanta optimală a lui Sikkema pentru operatorul Bernstein (a se vedea Teorema 3.4.2). Aceasta arată că operatorul* $R_n(f;x)$ *îmbunătăţeşte estimarea dată de către operatorul clasic Bernstein.*

**Teorema 3.3.5 ([39])** *Dacă* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este continuu diferenţiabilă pe intervalul* $[0,1]$, *are loc inegalitatea*

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{\omega_1\left(n^{-1/2}\right)}{n^{1/2}}\left(x(1-x)(1-\min\{x,1-x\}) + \sqrt{x(1-x)(1-\min\{x,1-x\})}\right), \tag{3.15}$$

*pentru orice* $n > 1$ *şi* $x \in [0,1]$, *unde* $\omega_1(\delta)$ *reprezintă modulul de continuitate al derivatei* $f'$.

*În particular, are loc inegalitatea*

$$|R_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{4+6\sqrt{3}}{27} n^{-1/2}\omega_1\left(n^{-1/2}\right), \qquad x \in [0,1]. \tag{3.16}$$

**Observaţia 3.3.6** *Comparând aproximarea pentru operatorul* $R_n$ *din teorema anterioară cu cea corespunzătoare pentru operatorul Bernstein (Teorema 2.2.7), observăm că inegalitate (3.15) îmbunătăţeşte inegalitatea (2.9) cu un factor egal cu* $\min\{x, 1-x\} \leq \frac{1}{2} < 1$, *iar constanta* $\frac{4+6\sqrt{3}}{27} \approx 0.533$ *din inegalitatea (3.16) îmbunătăţeşte valoarea* $\frac{3}{4} = 0.75$ *a constantei cores-*

*punzătoare din inegalitatea (2.10). Ambele rezultate indică faptul că operatorul $R_n$ produce o mai bună eroare de aproximare decât operatorul clasic Bernstein şi în clasa funcţiilor continuu diferenţiabile definite pe intervalul* $[0,1]$.

**Teorema 3.3.7 ([39])** *Dacă funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ admite derivată de ordin doi continuă pe $[0,1]$, atunci oricare ar fi $n>1$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(R_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)=\frac{1}{2}f''\left(x\right)x\left(1-x\right)\left(1-\min\left\{x,1-x\right\}\right), \qquad x\in\left[0,1\right]. \tag{3.17}$$

**Observaţia 3.3.8** *Comparând teorema anterioară cu rezultatul corespunzător pentru operatorul Bernstein (Teorema 2.2.9), observăm că eroarea de aproximare în cazul operatorului $R_n$ îmbunătăţeşte eroarea de aproximare a operatorului Bernstein cu factorul $1-\min\{x,1-x\}$.*

## 3.4 O îmbunătăţire a erorii de aproximare a operatorului $R_n$

**Lema 3.4.1 ([40])** *Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice numere naturale $n>1$ şi $r\le nx-\sqrt{n}$, are loc inegalitatea*

$$\frac{x^{(r+1,c)}\left(1-x\right)^{(n-r,c)}}{1^{(n,c)}}\le x^{r+1}\left(1-x\right)^{n-r} \tag{3.18}$$

*pentru orice $c\in\left[-\min\left\{x,1-x\right\}/\left(n-1\right),0\right]$.*

*Mai mult, cu excepţia cazului $c=0$ inegalitatea anterioară este o inegalitate strictă.*

**Teorema 3.4.2 ([40])** *There exists a constant $C\le 1.08970<C_{opt}=1.0898873...$ such that for any continuous function $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ and any $n>1$ we have*

$$\left|R_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le C\omega\left(n^{-1/2}\right), \qquad x\in\left[0,1\right], \tag{3.19}$$

*where $\omega\left(\delta\right)=\omega^f\left(\delta\right)$ denotes the modulus of continuity of $f$.*

**Observaţia 3.4.3** *Prima observaţie este legată de valoarea optimală a constantei $C$ pentru care inegalitatea (3.19) din teorema anterioară este verificată pentru orice funcţie continuă pe intervalul $[0,1]$. Cu toate că nu avem o demonstraţie în acest sens, rezultatele numerice pe care le-am studiat sugerează că valoarea optimală a constantei este mult mai mică decât valoarea 1.08970 sugerată de teorema anterioară.*

**Observaţia 3.4.4** *A doua observaţie este că probabil rezultatul din Lema 3.4.1, care stă la baza demonstraţiei teoremei anterioare, poate fi îmbunătăţit prin a arăta că membrul stâng al inegalităţii (3.18) este de fapt o funcţie crescătoare de* $c \geq -\frac{\min\{x,1-x\}}{n-1}$. *Dacă această conjectură este corectă, un argument similar cu cel din demonstraţia teoremei anterioare ar arăta că expresia*

$$\frac{\left|Ef\left(\frac{1}{n}X_n^{x,1-x,c}\right) - f(x)\right|}{\omega\left(n^{-1/2}\right)}$$

*este o funcţie crescătoare de* $c \geq -\min\{x, 1-x\}/(n-1)$, *şi deci dintre toţi operatorii de tip Pólya-Bernstein de forma*

$$P_n^{x,1-x,c}(f;x) = Ef\left(\tfrac{1}{n}X_n^{x,1-x,c}\right), \qquad x \in [0,1],$$

*cu* $c$ *satisfăcând condiţia de compatibilitate* $c \geq -\frac{\min\{x,1-x\}}{n-1}$, *cel care produce cea mai bună aproximare în clasa funcţiilor continue pe* $[0,1]$ *este operatorul* $R_n$ *definit prin (3.5), operator ce corespunde alegerii minimale a parametrului* $c = -\frac{\min\{x,1-x\}}{(n-1)}$.

## 3.5 O proprietate de monotonie a operatorului $R_n$

**Lema 3.5.1** ([58]) *Pentru întregi* $n \geq 2$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *şi numere reale pozitive* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_{n-k}$ *cu* $\max_{1\leq i\leq n} a_i \leq \min_{1\leq j\leq n-k} b_j$ *şi* $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^{n-k} b_j$, *are loc inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \sum_{j=1}^{n-k} b_j^2. \tag{3.20}$$

**Observaţia 3.5.2** *Din inegalitatea (3.20) de mai sus, se poate obţine o inegalitate Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inversă (a se vedea spre exmplu [12]), utilă în special în cazul valorilor aproape egale, după cum urmează.*

*În notaţia lemei anterioară, considerând* $b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$, $i \in \{1, \ldots, n-k\}$, *obţinem*

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2} \leq \frac{1}{n-k}, \tag{3.21}$$

*care este utilă în special pentru valori mici ale lui* $k \geq 1$. *Spre exemplu, putem considera în inegalitatea anterioară* $k = 1$, *dacă* $a_n \leq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n a_i$, *condiţie ce are loc în particular dacă* $p \in \left\{1, \ldots, \left[\sqrt{A/(A-a)}\right]\right\}$ *dintre numerele* $a_1, \ldots, a_n$ *sunt egale cu* $a > 0$, *şi* $q = n - p \geq 1$ *dintre acestea sunt egale cu* $A > a$.

*Inegalitatea Pólya-Szegö (a se vedea spre exmplu [12, Theorem 5.5]) este următoarea inega-*

*litate Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inversă:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2, \tag{3.22}$$

*unde* $0 < a \leq a_i \leq A < \infty$ *şi* $0 < b \leq b_i \leq B < \infty$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

*Considerând* $b_1 = \ldots = b_n = 1$ *(şi deci* $b = B = 1$*), inegalitatea anterioară devine*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2} \leq \frac{1}{4n}\left(\sqrt{\frac{A}{a}} + \sqrt{\frac{a}{A}}\right)^2, \tag{3.23}$$

*pentru orice şir* $0 < a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq A$.

*Dacă* $A > a(1 + 2/(\sqrt{n} - 1))$, *membrul drept al inegalităţii (3.23) este mai mare decât* $\frac{1}{n-1}$, *şi deci inegalitatea (3.21) (cu* $k = 1$*) îmbunătăţeşte inegalitatea Pólya-Szegö (în ipotezele considerate mai sus).*

**Lema 3.5.3 ([58])** *Dacă* $f \in C^3([0,1])$ *verifică* $f, f', f'', f''' \geq 0$ *pe intervalul* $[0,1]$, *atunci pentru orice întreg* $N \geq 1$ *are loc inegalitatea*

$$0 \leq \sum_{i=0}^{N} f\left(\frac{i}{N}\right) - N\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{f(0) + f(1)}{2} \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{4N}. \tag{3.24}$$

**Lema 3.5.4 ([58])** *Pentru orice întregi* $n \geq 2$ *şi* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, *există* $x_{n,k} \in \left[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right]$ *astfel încât funcţia*

$$\varphi_{n,k}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \frac{i}{n-1}x} - \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{1}{1 - x - \frac{i}{n-1}x}, \quad x \in \left[0, \frac{n-1}{2n-k-2}\right), \tag{3.25}$$

*este pozitivă pe intervalul* $(0, x_{n,k})$ *şi negativă pe intervalul* $\left(x_{n,k}, \frac{n-1}{2n-k-2}\right)$.

**Teorema 3.5.5 ([58])** *Pentru întregi* $n \geq 2$ *şi* $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *arbitrar fixaţi, probabilităţile* $p_{n,k}(x) = p_{n,k}^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)}$ *ale distribuţiei Pólya definite prin (1.41) cresc pentru* $x \in [0, x_{n,k}^*]$ *şi descresc pentru* $x \in [x_{n,k}^*, 1]$, *unde*

$$x_{n,k}^* = \begin{cases} x_{n,k}, & \text{if } k \leq \frac{n-1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{if } \frac{n-1}{2} < k < \frac{n+1}{2} \\ 1 - x_{n,n-k}, & \text{if } k \geq \frac{n+1}{2} \end{cases}, \tag{3.26}$$

$x_{n,k} \in \left[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right]$ *fiind dat de Lema 3.5.4.*

**Observaţia 3.5.6** *Cum* $p_{n,k}(x) = p_{n,n-k}(1-x)$ *pentru* $x \in [0,1]$*, din teorema anterioară rezultă că* $x_{n,k}^* = 1 - x_{n,n-k}^*$*, oricare ar fi* $n \geq 2$ *şi* $k \in \{0, \dots, n\}$*.*

*De asemenea să observăm că deoarece* $x_{n,k} \in \left[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right]$*, din relaţia (3.26) rezultă că avem de asemenea* $x_{n,k}^* \in \left[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}\right]$ *oricare ar fi* $n \geq 2$ *şi* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$*.*

Reamintim că o variabilă aleatoare $X$ este mai mică decât o variabilă aleatoare $Y$ în sensul *ordinii stochastice*, relaţie notată prin $X \leq_{\text{st}} Y$ (a se vedea spre exmplu [49]) dacă funcţiile distribuţie corespunzătoare $F_X$ şi $F_Y$ verifică inegalitatea $F_X(x) \geq F_Y(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**Teorema 3.5.7 ([58])** *Pentru orice număr natural* $n \geq 2$*, variabila aleatoare* $X_n^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)}$ *având distribuţia Pólya dată de (1.40) – (1.41) cu parametrul* $x \in [0,1]$ *verifică următoarea ordonare stochastică*

$$X_n^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)} \leq_{st} X_n^{y,1-y,-\min\{x,1-y\}/(n-1)},$$

*pentru orice valori* $0 \leq x \leq y \leq 1$*.*

**Teorema 3.5.8 ([58])** *Operatorul* $R_n$ *definit de relaţia (3.5) este un operator monoton, adică oricare ar fi funcţia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul* $[0,1]$*, funcţia* $R_n(f,\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *este de asemenea monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul* $[0,1]$*.*

## 3.6 Rezultate numerice pentru operatorul $R_n$

În această secţiune prezentăm câteva rezultate numerice şi grafice privind operatorul $R_n$ introdus în Secţiunea 3.1, definit de

$$\begin{aligned} R_n(f;x) &= Ef\left(\frac{1}{n}X_n^{x,1-x,-\min\{x,1-x\}/(n-1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}(1-x)^{(n-k,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}}{1^{(n,-\min\{x,1-x\}/(n-1))}} f\left(\frac{k}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Pentru rezultate comparative, am considerat următorii operatori clasici de aproximare de tip Bernstein (a se vedea Secţiunea 2.1 şi Secţiunea 2.3) a funcţiilor reale definite pe intervalul $[0,1]$:

- operatorul clasic Berstein $B_n$ definit de

$$B_n(f;x) = Ef\left(\frac{X_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1]; \tag{3.28}$$

- operatorul Lupaş $L_n = P_n^{\langle 1/n\rangle}$ definit de

$$L_n(f;x) = E\left(f\left(\frac{X_n^{x,1-x,1/n}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,1/n)}(1-x)^{(n-k,1/n)}}{1^{(n,1/n)}} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in [0,1], \tag{3.29}$$

un caz particular al operatorului Bernstein-Stancu $P_n^{\langle\alpha\rangle}$ definit de

$$P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = E\left(f\left(\frac{X_n^{x,1-x,\alpha}}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{(k,\alpha)}(1-x)^{(n-k,\alpha)}}{1^{(n,\alpha)}} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in [0,1]; \tag{3.30}$$

- operatorul $q$-Bernstein $B_{n,q}$ al lui Phillips definit de

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \left[C_n^k\right]_q x^k \prod_{j=0}^{n-k-1}\left(1-q^k x\right), \qquad x \in [0,1]; \tag{3.31}$$

- operatorul $(p,q)$-Bernstein $S_{n,p,q}$ introdus de Mursaleen şi co-autorii săi, definit de

$$S_{n,p,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}\right) \left[C_n^k\right]_{p,q} x^k \prod_{j=0}^{n-k-1}\left(p^j - q^j x\right)(1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1]. \tag{3.32}$$

Pentru rezultatele numerice prezentate în această secţiune, am folosit următorul program Mathematica pentru a genera valorile operatorului $R_n$, şi coduri sursă similare pentru ceilalţi operatori.

```
fact[a_, b_, k_]:= If[k = = 0, 1, Product[a + b t, {t, 0, k - 1}]];

PolyaProb[a_, b_, c_, n_, k_] := Binomial[n, k] fact[a, c, k] fact[b, c, n - k]/fact[a + b, c, n];

R[x_, n_] := Sum[PolyaProb[x, 1 - x, -Min[x, 1 - x]/(n - 1), n, k] f[k/n], {k, 0, n}];
```

**Observaţia 3.6.1** *În codul sursă Mathematica de mai sus,* `f[x]` *reprezintă valoarea funcţiei $f$ alese pentru aproximare din definiţia operatorului $R_n$ definit de relaţia (3.27), funcţia* `fact[a,b,k]` *calculează valoarea factorialului crescător $a^{(b,k)}$ definit de relaţia (1.38),* `PolyaProb[a,b,c,n,k]` *calculează probabilităţile $p_{n,k}^{a,b,c}$ ale distribuţiei Pólya definite de (1.41), iar* `R[x,n]` *calculează valoarea operatorului $R_n(f;x)$ conform definiţiei (3.27).*

Aşa după cum se indică în lucrarea [16] (a se vedea nota de subsol de la pagina 385), un dezavantaj al operatorului Bernstein $B_n$ în aplicaţii practice este convergenţa înceată a aproximării în cazul anumitor funcţii. Aşa cum se arată în această lucrare, pentru a obţine o eroare de aproximare mai mică de $10^{-4}$ în cazul funcţiei $f(x) = x^2$ definite pe intervalul $[0,1]$, este nevoie să se considere valoarea $n = 2500$. Pentru aceeaşi funcţie şi cu aceeaşi eroare de aproximare, rezultatele numerice arată că în cazul operatorului $R_n$ este suficient să considerăm valoarea $n = 1250$. Deşi acest număr este mare pentru anumite aplicaţii practice, observăm că în cazul operatorului $R_n$ valoarea lui $n$ este înjumătăţită, în comparaţie cu operatorul Bernstein. În mod echivalent, aceasta arată că pentru aceeaşi valoare a lui $n$, operatorul $R_n$ reduce eroarea de aproximare a operatorului Bernstein $B_n$ la jumătate, în timp ce numărul de operaţii necesare evaluării operatorilor $R_n$ şi $B_n$ este de acelaşi ordin (aşa cum am indicat în Secţiunea 3.1).

Pentru comparaţia grafică a operatorului $R_n$ cu operatorii indicaţi mai sus, am considerat trei alegeri reprezentative ale funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$: o funcţie netedă, foarte oscilantă ($f(x) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}x\right)$, a se vedea Figura 3-1 şi Figura 3-2), o funcţie continuă, diferenţiabilă doar pe anumite subintervale ($f(x) = |2|x - 0.5| - 0.5|$, a se vedea Figura 3-3 şi Figura 3-4), şi o funcţie discontinuă ($f(x) = (x + 1)1_{[1/3,1]}(x)$, a se vedea Figura 3-5 şi Figura 3-6). Pentru operatorii $B_{n,q}$ şi $S_{n,p,q}$ am folosit valorile $p = 0.99$ şi $q = 0.95$ apropiate de 1, deoarece, aşa cum se indică în lucrările corespunzătoare ([42], [36]), ele produc rezultate de aproximare mai bune.

Analiza grafică a Figurilor 3-1 – 3-6 indică clar faptul că operatorul $R_n$ oferă cea mai bună aproximare a funcţiei $f$ în toate cele trei cazuri considerate, urmată de operatorul Bernstein $B_n$. Ordonarea celorlalţi operatori este următoarea: pentru valori mici ale lui $n$ operatorul $B_{n,q}$ oferă o mai bună aproximare a funcţiei $f$, în timp ce pentru valori mai mari ale lui $n$, operatorul Lupaş $L_n$ pare să ofere o mai bună aproximare a funcţiei $f$. Cu toate că operatorul $S_{n,p,q}$ oferă o aproximare rezonabilă a funcţiei $f$ pentru valori mici ale lui $n$, această situaţie se schimbă pentru valori mai mari ale lui $n$.

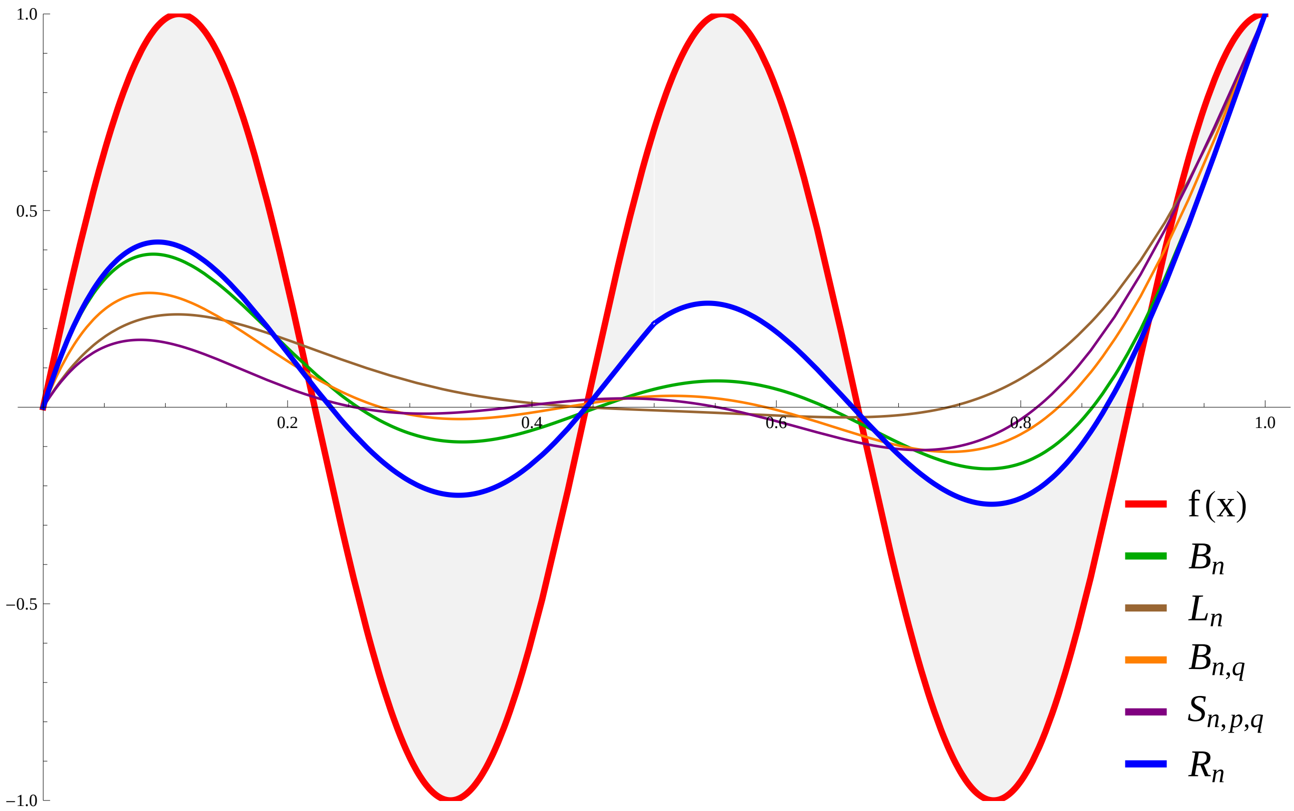


Figura 3-1: Aproximarea funcţiei $f(x) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}x\right)$ pentru $n = 10$.

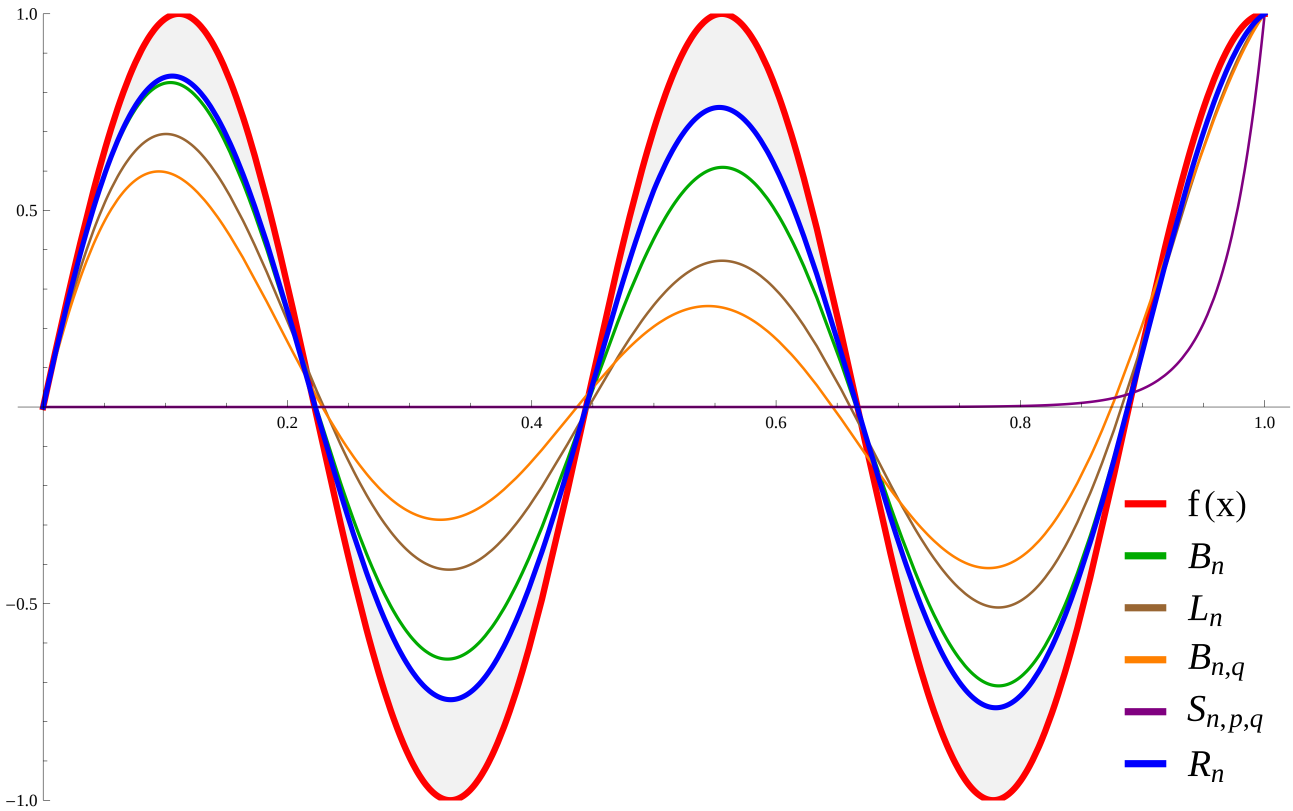


Figura 3-2: Aproximarea funcţiei $f(x) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}x\right)$ pentru $n = 50$.

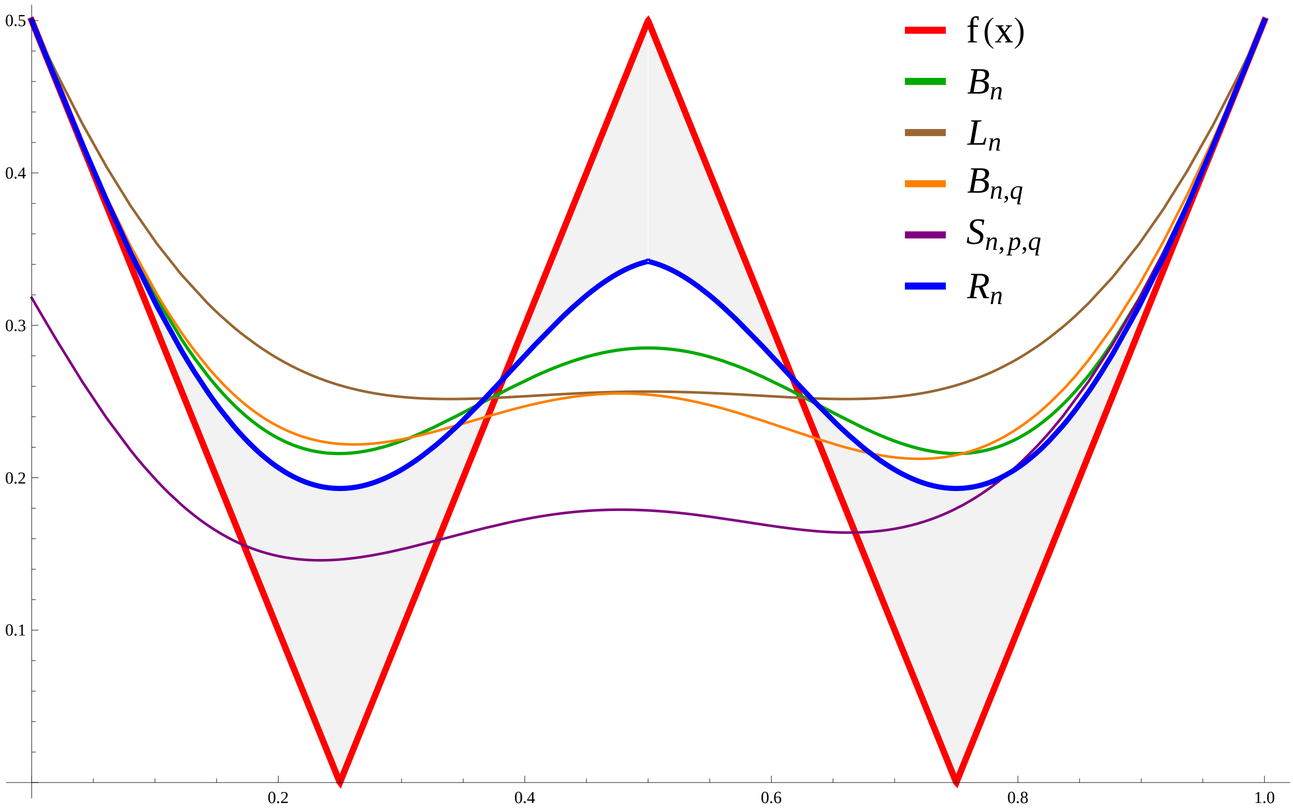


Figura 3-3: Aproximarea funcţiei $f(x) = |2|x - 0.5| - 0.5|$ pentru $n = 10$.

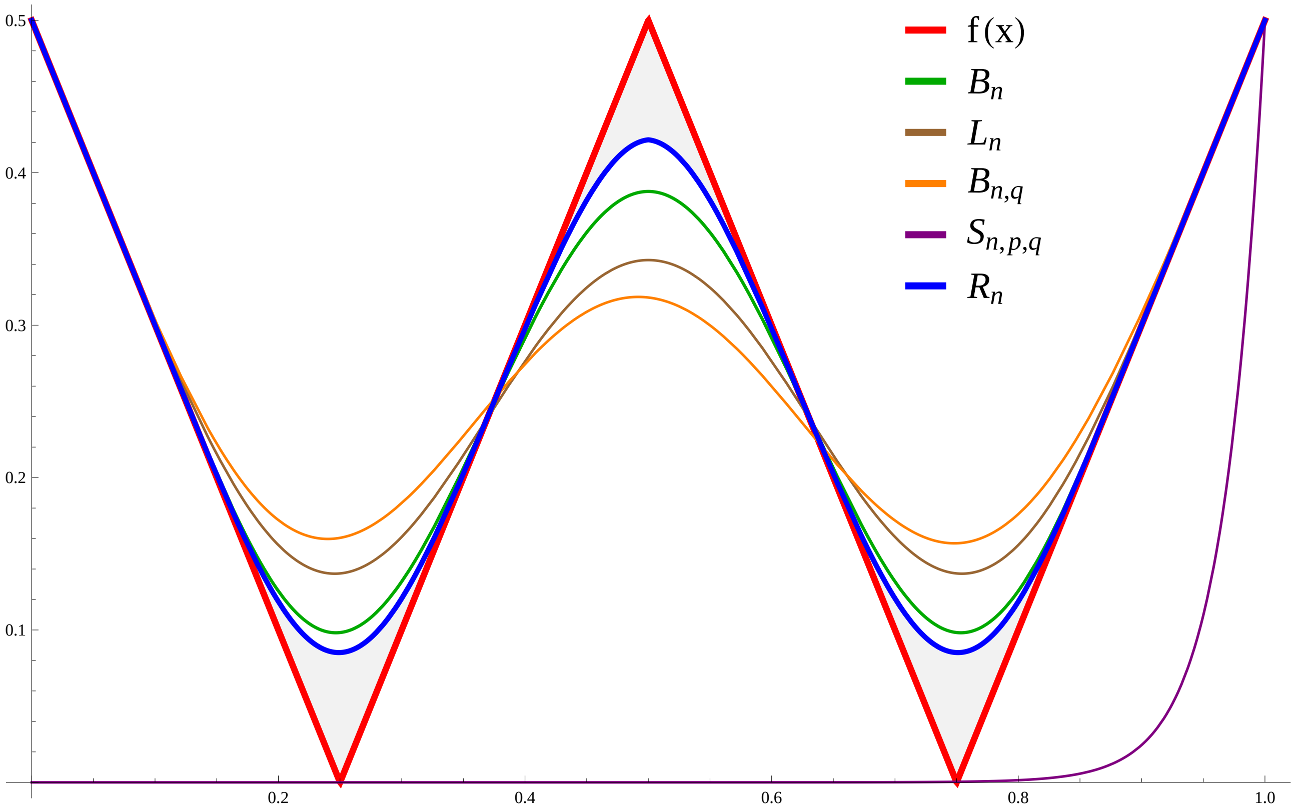


Figura 3-4: Aproximarea funcţiei $f(x) = |2|x - 0.5| - 0.5|$ pentru $n = 50$.

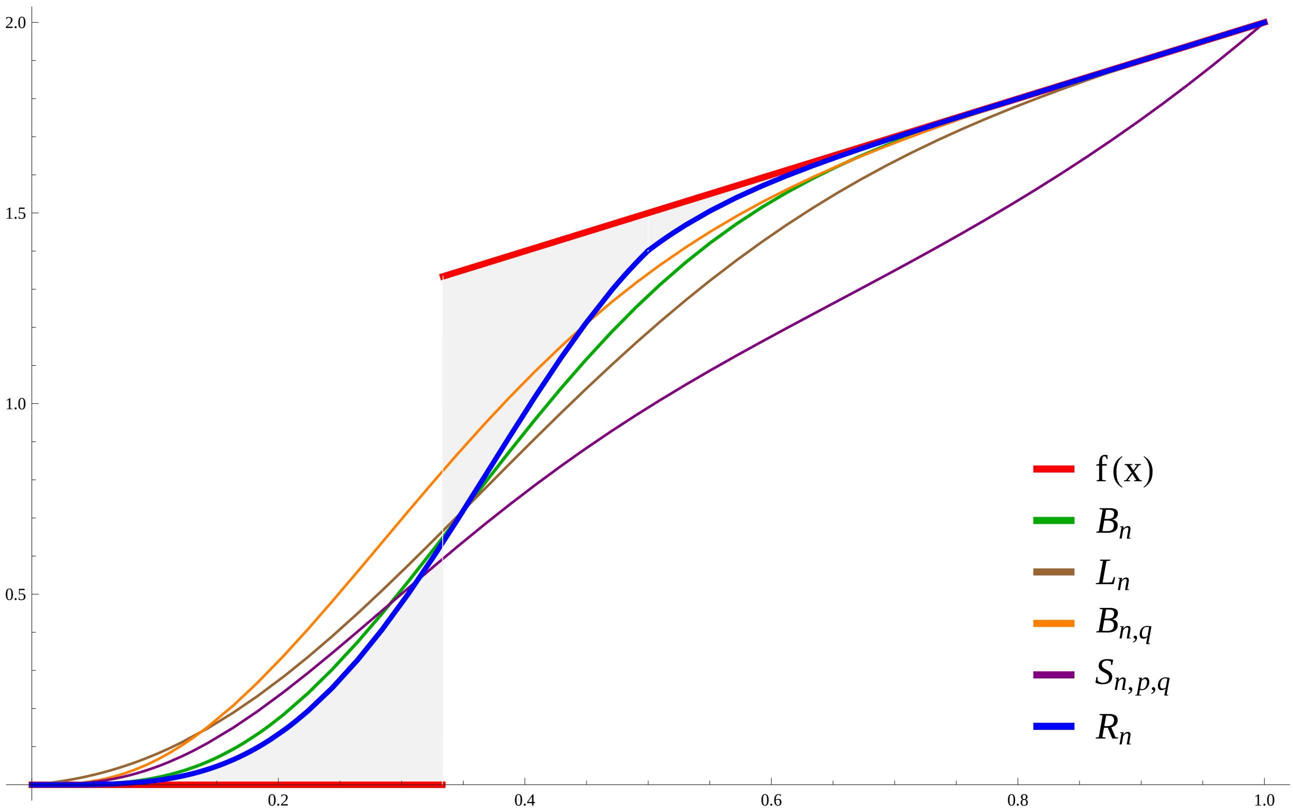


Figura 3-5: Aproximarea funcţiei $f(x) = (x+1)1_{[1/3,1]}(x)$ pentru $n = 10$.

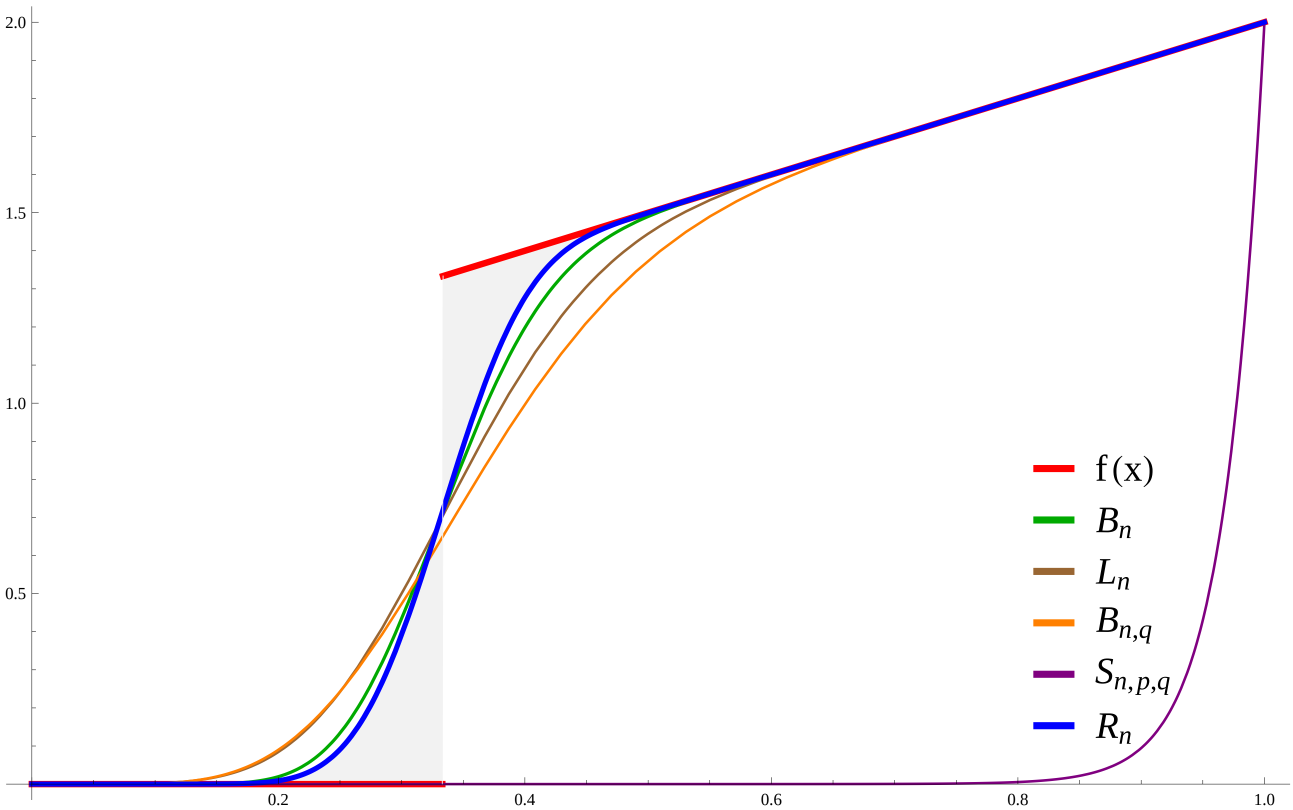


Figura 3-6: Aproximarea funcţiei $f(x) = (x+1)1_{[1/3,1]}(x)$ pentru $n = 50$.

# Bibliografie


[1] J. A. Adell, J. de la Cal, On a Bernstein-type operator associated with the inverse Pólya-Eggenberger distribution, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl 33 (1993), pp. 143 – 154.

[2] K. E. Atkinson, An introduction to numerical analysis (second edition), John Wiley & Sons, New York (1989).

[3] J. Bernoulli, Ars Conjectandi: Usum & Applicationem Praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis, 1713, Chapter 4.

[4] S. N. Bernstein, Démonstration du Théorčme de Weierstrass fondée sur le calcul des Probabilités, Comm. Soc. Math. Kharkov **2** (1912), Series XIII, No.1, pp. 1 – 2.

[5] S. Bernstein, Sur un problème du schéma des urnes á composition variable, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **28** (1940), pp. 5 – 7.

[6] H. Bohman, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat. **2** (1952), pp. 43 – 56.

[7] Bromwich, T. J. I'A. and MacRobert, T. M. An Introduction to the Theory of Infinite Series, 3rd ed. New York: Chelsea, p. 74, 1991.

[8] J. Bustamante, Bernstein operators and their properties, Birkhäuser/Springer, Cham (2017).

[9] J. de la Cal, J. Cárcamo, A general Ostrowski-type inequality, Statist. Probab. Lett. **72** (2005), No. 2, pp. 145 – 152.

[10] B. Della Vecchia, On the approximation of functions by means of the operators of D. D. Stancu, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **37** (1992), No. 1, pp. 3 – 36.

[11] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive approximation, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 303, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[12] S. S. Dragomir, A survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities, J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), No. 3, Article 63, 142 pp.

[13] R. Durrett, Probability: theory and examples (fourth edition), Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[14] Y. Dybskiy, K. Slutsky, Riemann rearrangement theorem for some types of convergence. J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), No. 2, pp. 605 – 613.

[15] F. Eggenberger, G. Pólya, Über die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift Angew. Math. Mech. **3** (1923), pp. 279 – 289.

[16] R. T. Farouki, The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective, Comput. Aided Geom. Design **29** (2012), No. 6, pp. 379 – 419.

[17] D. A. Freedman, Bernard Friedman's urn, Ann. Math. Statist. **36** (1965), pp. 956 – 970.

[18] B. Friedman, A simple urn model, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), pp. 59 – 70.

[19] H. M. Gonska, J. Meier, Quantitative theorems on approximation by Bernstein-Stancu operators, Calcolo **21** (1984), No. 4, pp. 317 – 335.

[20] S. Janson, Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns, Stochastic Process. Appl. **110** (2004), No. 2, pp. 177 – 245.

[21] N. L. Johnson, S. Kotz, Urn models and their application. An approach to modern discrete probability theory, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1977.

[22] A. Kajla, N. Ispir, P. N. Agrawal, M. Goyal, $q$–Bernstein–Schurer–Durrmeyer type operators for functions of one and two variables, Appl. Math. Comput. **275** (2016), pp. 372 – 385.

[23] R. A. Khan, Some probabilistic methods in the theory of approximation operators, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **35** (1980), No. 1 – 2, pp. 193 – 203.

[24] T. Kim, A note on $q$-Bernstein polynomials, Russ. J. Math. Phys. **18** (2011), No. 1, pp. 73 – 82.

[25] J. P. King, Positive linear operators which preserve $x^2$, Acta Math. Hungar. **99** (2003), No. 3, pp. 203 – 208.

[26] P. P. Korovkin, On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **90** (1953), pp. 961 – 964.

[27] I. Koźniewska, The first absolute central moment for Pólya's distribution. (Polish) Zastos. Mat. **1** (1954), pp. 206 – 211.

[28] G. G. Lorentz, Bernstein polynomials (second edition), Chelsea Publishing Co., New York, 1986.

[29] G. G. Lorentz, Approximation of functions (second edition), Chelsea Publishing Co., New York, 1986.

[30] A. Lupaş, A $q$-analogue of the Bernstein operator, Semin. Numer. Stat. Calc. Univ. Cluj-Napoca 9 (1987), pp. 85 – 92.

[31] A. Lupaş, $q$-analogues of Stancu operators, Mathematical analysis and approximation theory, pp. 145 – 154, Burg, Sibiu, 2002.

[32] L. Lupaş, A. Lupaş, Polynomials of binomial type and approximation operators, Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica **32** (1987), No. 4, pp. 61 – 69.

[33] L. Lupaş, The behaviour of Stancu operators on the cone of convex functions, Mathematical analysis and approximation theory, pp. 169 – 172, Burg, Sibiu, 2002.

[34] D. Miclăuş, The revision of some results for Bernstein-Stancu type operators, Carpathian J. Math. **28** (2012), No. 2, pp. 289 – 300.

[35] C. V. Muraru, Note on $q$-Bernstein-Schurer operators, Studia UBB, Mathematica LVI 2 (2011), pp. 1 – 11.

[36] M. Mursaleen, K. J. Ansari, A. Khan, Asif, Some approximation results by $(p, q)$-analogue of Bernstein-Stancu operators, Appl. Math. Comput. **264** (2015), pp. 392 – 402.

[37] G. V. Orman, Măsură şi procese aleatoare, Editura Universităţii "Transilvania", Braşov, 2000.

[38] M. N. Pascu, Calcul stochastic, mişcare Browniană şi aplicaţii, Transilvania University Press, Braşov, 2010.

[39] M. N. Pascu, N. R. Pascu, **F. Tripşa**, A new Bernstein-Stancu type operator with negative parameter, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, **20** (2019), No. 1, pp. 19 – 28.

[40] M. N. Pascu, N. R. Pascu, **F. Tripşa**, An error estimate for a Bernstein-Stancu operator with negative parameter, Results in Mathematics, **74** (2019), No. 1, Art. 39, 11 pp.

[41] R. Păltănea, Approximation theory using positive linear operators, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[42] G. M. Phillips, On generalized Bernstein polynomials, Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birthday Volume, World Scientific, Singapore, pp. 263 – 269, 1996.

[43] G. M. Phillips, Bernstein polynomials based on the $q$-integers,The heritage of P.L.Chebyshev, Ann. Numer. Math. **4** (1997), pp. 511 – 518.

[44] G. M. Phillips, A survey of results on the $q$-Bernstein polynomials, IMA J. Numer. Anal. **30** (2010), No. 1, pp. 277 – 288.

[45] T. Popoviciu, Sur l'approximation des functions convexes d'ordre supérieur, Mathematica (Cluj) **10** (1935), pp. 49 – 54.

[46] G. Pólya, Sur quelques points de la théorie des probabilités, Ann. Inst. Poincaré **1** (1931), 117 – 161.

[47] W. Rudin, Principles of mathematical analysis (third edition), International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

[48] F. Schurer, Linear Positive Operators in Approximation Theory, Math. Inst., Techn. Univ. Delf Report, 1962.

[49] M. Shaked, J. G. Shanthikumar, Stochastic orders, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2007.

[50] P. C. Sikkema, Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen, Numer. Math. **3** (1961), pp. 107 – 116.

[51] D. D. Stancu, Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **13** (1968), pp. 1173 – 1194.

[52] D. D. Stancu, On a new positive linear polynomial operator, Proc. Japan Acad. **44** (1968), pp. 221 – 224.

[53] D. D. Stancu, On a generalization of the Bernstein polynomials, Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Phys. **14** (1969), No. 2, pp. 31 – 45.

[54] D. D. Stancu, Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators, Numerische Methoden der Approximationstheorie, Proc. Conf. Oberwolfach 1971, ISNM 16, pp. 187 – 203, Birkhäuser, Verlag, Basel, 1972.

[55] E. I. Stoica-Laze, On the Stancu type linear positive operators of approximation constructed by using the beta and the gamma functions, Stud. Univ. BabeÅŸ-Bolyai Math. **54** (2009), No. 2, pp. 117 – 126.

[56] S. A. Telyakovskii, On the rate of approximation of functions by Bernstein polynomials, Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), No. 1, pp. 177 – 184.

[57] V. O. Tonkov, Addition to the Popoviciu theorem, Translation of Mat. Zametki **94** (2013), No. 3, pp. 416 – 425. Math. Notes **94** (2013), No. 3 – 4, pp. 392 – 399.

[58] **F. Tripşa**, N. R. Pascu, Stochastic ordering of Pólya random variables and monotonicity of the Bernstein-Stancu operator for a negative parameter, J. Ineq. Appl. 2019, Paper No. 47, 10 pp.

[59] **F. V. Tripşa**, About the best approximationof continuous functions by polynomials, Review of the Air Force Academy, **XV** (2017, No. 1 (33), pp. 35 – 44.

[60] **F. V. Tripşa**, The approximation of a continuous function using Bernstein polynomials, Scientific Research and Education in the Air Force - AFASES Int. Conf., "Henri Coandă" Air Force Academy, Braşov, 22 – 23 May 2018, pp. 299 – 306.

[61] **F. V. Tripşa**, Bernstein polynomials in the approximation and convergence of derivable functions, Scientific Research and Education in the Air Force - AFASES Int. Conf., "Henri Coandă" Air Force Academy, Braşov, 22 – 23 May 2018, pp. 307 – 310.

[62] E. Voronovskaja, Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de S. N. Bernstein, Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. A, (1932), pp. 79 – 85.

[63] K. Weierstrass, Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885 (II), pp. 789 – 805.

**Rezumat**

Operatorul (polinomul de aproximare) Bernstein, introdus în 1912 de către Serge Bernstein, pe lângă faptul că a furnizat o demonstraţie constructivă a teoremei lui Weierstrass privind aproximarea uniformă a funcţiilor, a impulsionat cercetarea ştiinţifică nu numai în matematică (Analiză, Teoria aproximării, Teoria operatorilor), ci şi în domeniul informaticii (al graficii pe calculator spre exemplu, folosind curbele Bézier, definite în termeni de polinoamele lui Bernstein), şi al aplicaţiilor practice ale acesteia (spre exemplu la reprezentarea matematică a formei unei maşini).

În prezenta lucrare de doctorat introducem un nou operator de aproximare de tip Bernstein, folosind distribuţia urnei lui Pólya cu parametru de înlocuire negativ, şi arătăm că acest nou operator are proprietăţi similare operatorului Bernstein (este liniar, pozitiv, uniform convergent, monoton, etc), şi îmbunătăţeşte estimările de aproximare cunoscute ale operatorului Bernstein (în termeni de modulul de continuitate al funcţiei, al derivatei, al erorii asimptotice de aproximare), aceste rezultate teoretice fiind susţinute şi de rezultatele numerice comparative prezentate în lucrare.

Rezultate originale prezentate în Capitolul 3 al lucrării au fost publicate de autor în colaborare cu M. N. Pascu şi N. R. Pascu în trei lucrări ISI apărute anul acesta ([37], [38], [56]).

**Summary**

Bernstein (polynomial) operator, introduced by Serge Bernstein in 1912, aside from the fact that it provided a constructive proof of Weierstrass's theorem on uniform approximation of functions, also stimulated the scientific research not only in mathematics (Analysis, Approximation theory, Operator theory), but also in the computer science (computer graphics, for example, by making use of the Bézier curves, defined in terms of Bernstein polynomials), and in the practical applications of it (for example in the mathematical representation of the car body).

In the present doctoral thesis we introduce a new Bernstein-type approximation operator, by using Pólya's urn distribution with negative replacement parameter, and we show that this new operator has properties similar to those of the Bernstein operator (it is linear, positive, uniformly convergent, monotone, etc), and it also improves the known approximation estimates of the Bernstein operator (in terms of the modulus of continuity of the function, of the derivative of the function, asymptotic error estimate), these theoretical results being also supported by the numerical results presented in the thesis.

The original results presented in Capitolul 3 of the thesis were published by the author in collaboration with M. N. Pascu and N. R. Pascu in three ISI articles which appeared this year ([37], [38], [56]).

# CURRICULUM VITAE

1. **DATE PERSONALE**
   Numele: TRIPȘA
   Prenumele: Florența-Violeta
   Data nașterii:
   Locul nașterii:
   Starea civilă:
   Adresa:
   Email:
2. **Studii**

**2013 – prezent**, Doctorandă cu frecvență, Domeniul Matematică, Școala Doctorală Interdisciplinară a Universității ”Transilvania” din Brașov, Facultatea de Matematică și Informatică

**2003 – 2009**, Doctorandă cu frecvență, Domeniul Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică din cadrul Universității ”Transilvania” din Brașov (fără finalizarea tezei de doctorat),

**2001 – 2003**, Diplomă de master, Probabilități și Statistică Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică din cadrul Universității ”Transilvania” din Brașov

**1992 – 1997,** Diplomă de licență, Matematică-Fizică, Facultatea de Științe din cadrul Universității ”Transilvania” din Brașov

**1987 – 1991**, Diplomă de bacalaureat, Liceul Industrial ”Progresul” Brăila

3. **Activitatea profesională**

**2013-prezent**, Profesor titular, Predare ore matematică, Șef de comisie metodică, Colegiul Național ”Unirea” Brașov, Învățământ preuniversitar
**2009-2013**, Profesor suplinitor, Predare ore matematică, Colegiul Național ”Dr. Ioan Meșotă” și Colegiul Național ”Unirea” Brașov, Învățământ preuniversitar
**2009-2011**, Cadru didactic asociat Universitatea ”Transilvania” din Brașov, Predare seminarii de Analiză Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, Învățământ universitar
**2003-2009**, Doctorand cu frecvență la Universitatea ”Transilvania” din Brașov, Predare seminarii de Analiză Matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, Învățământ universitar
**1998-2003**, Profesor suplinitor, Predare ore matematică, Liceul industrial ”Simion Mehedinți” Codlea, jud. Brașov, Învățământ preuniversitar
**1997-1998**, Profesor suplinitor, Predare ore matematică, Școală generală numărul 2 Codlea, jud. Brașov, Învățământ preuniversitar

4. **Limbi străine cunoscute:** limba engleză

# CURRICULUM VITAE

## 1. PERSONAL INFORMATION

Surname: TRIPȘA
Name: Florența-Violeta
Date of birth:
Place of birth:
Marital status:
Address:
Email: f

## 2. Studies

**2013 – present**, PhD attendant student, in the field of Mathematics, Interdisciplinary Doctoral School of the University of "Transilvania" Brașov, Faculty of Mathematics and Computer Science

**2003 – 2009**, PhD attendant student, in the field of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science at the University of "Transilvania" Brașov (without ending the doctoral dissertation)

**2001 – 2003**, Master Degree, Probabilities and Mathematical Statistics, Faculty of Mathematics and Computer Science at the University of "Transilvania" Brașov

**1992 – 1997,** Bachelor Degree, Mathematics-Physics, Faculty of Science at the University of "Transilvania" Brașov

**1987 – 1991**, Baccalaureate Diploma, Industrial High School "Progresul" Brăila

## 3. Professional Activity

**2013-present**, Titular Teacher, Teaching mathematics, In charge of the methodical commission, "Unirea" National College Brașov, Secondary Education
**2009-2013**, Substitute Teacher, Teaching mathematics, "Dr. Ioan Meșotă" National College "Unirea" National College Brașov, Secondary Education
**2009-2011**, Associate Teacher at the University of "Transilvania" Brașov, Teaching seminars of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, Higher Education
**2003-2009**, PhD attendant student at the University of "Transilvania" Brașov, Teaching seminars of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, Higher Education
**1998-2003**, Substitute Teacher, Teaching mathematics, Industrial High School "Simion Mehedinți" Codlea, Brașov County, Secondary Education
**1997-1998**, Substitute Teacher, Teaching mathematics, Secondary School no. 2 Codlea, Brașov County, Secondary Education

## 4. Foreign languages known: English