Universitatea
Transilvania
din Brașov

ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică şi Informatică

SZÁSZ (căs. FRIEDL) Annamária

Structuri geometrice pe spaţiul total al unui spaţiu Finsler complex

Geometric structures on the total space of a complex Finsler manifold

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător ştiinţific
Prof. univ. dr. Gheorghe MUNTEANU

BRAŞOV, 2018

Investește în oameni!
FONDUL SOCIAL EUROPEAN
Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013
Axa prioritară 1 „Educație și formare profesională în sprijinul creșterii economice și dezvoltării societății bazate pe cunoaștere”
Domeniul major de intervenție 1.5. „Programe doctorale și post-doctorale în sprijinul cercetării”
Titlul proiectului: Burse doctorale si postdoctorale pentru cercetare de excelență
Numărul de identificare al contractului: POSDRU/159/1.5/S/134378
Beneficiar: Universitatea *Transilvania* din Brașov
Partener:

D-lui (D-nei) ....

COMPONENŢA
Comisiei de doctorat
Numită prin ordinul Rectorului Universităţii *Transilvania* din Braşov
Nr. ..... din .....

PREŞEDINTE:	⩾ Conf.univ.dr. Eugen PĂLTĂNEA DECAN - Universitatea *Transilvania* Braşov
CONDUCĂTOR ŞTIINŢIFIC:	⩾ Prof.univ.dr. Gheorghe MUNTEANU Universitatea *Transilvania* Braşov
REFERENŢI:	⩾ Prof.univ.dr. Ion MIHAI Universitatea Bucureşti; ⩾ Prof.univ.dr. Vladimir BĂLAN Universiatea *Politehnica* Bucureşti; ⩾ Conf.univ.dr. Nicoleta-Codruţa ALDEA Universitatea *Transilvania* Braşov.

Data, ora şi locul susţinerii publice a tezei de doctorat: ...., ora ....., sala ....

Eventualele aprecieri sau observţii asupra conţinutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa szasz.annamaria@unitbv.ro

Totodată, vă invităm să luaţi parte la şedinţa publică de susţinere a tezei de doctorat.

Vă mulţumim.

Cuprins

Table of contents

Introducere

Prin aceasă teză de doctorat, intitulată ”STRUCTURI GEOMETRICE PE SPAŢIUL TOTAL AL UNUI SPAŢIU FINSLER COMPLEX, dorim să aducem o contribuţie la studiul spaţiilor Finsler complexe înzestrate cu diferite metrici generalizate. Chiar dacă folosim unele idei din cadrul general cunoscut al studiilor diferitelor metrici Finsler reale [An-Sh2], [Be1], [Ai3], problemele sunt abordate în spiritul Şcolii româneşti de geometrie Lagrange şi Hamilton iniţiată de domnul Acad. Radu Miron şi colaboratori ai domniei sale, studiul este făcut în stilul Şcolii româneşti de geometrie Finsler complexă fundamentată de domnul Prof. dr. Gheorghe Munteanu.

Lucrarea de faţă este structurată pe patru capitole. în primul capitol sunt introduse noţiunile necesare pentru studiul acestui subiect. Celelalte trei capitole conţin rezultatele autoarei despre diferite metrici Finsler complexe generalizate, care fac subiectul a 8 articole publicare sau trimise spre publicate în reviste din ţară şi străinătate.

* * *

În primul rând, aş dori să-mi exprim recunoştinţa conducătorului de doctorat, Dl. Prof. Dr. Gheorghe Munteanu, atât pentru şansa de a realiza doctoratul în domeniul geometriei Finsler complexe, cât şi pentru ajutorul, răbdarea şi încrederea acordată pe tot parcursul programului doctoral. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea D-lui Prof. Dr. Gheorghe Munteanu.

Doresc să mulţumesc în mod deosebit doamnei Conf. Dr. Nicoleta Aldea pentru amabilitatea pe care a avut-o analizând lucrările mele premergătoare tezei, pentru comentariile şi sugestiile utile oferite, şi de asemenea pentru sprijinul permanent pe care mi l-a acordat.

Aş dori să mulţumesc membrilor Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii *Transilvania* din Braşov, pentru contribuţia lor în dezvoltarea mea ştiinţifică şi oferirea unui mediu plăcut de cercetare.

Doresc să mulţumesc familiei mele pentru înţelegerea, răbdarea şi sprijinul pe care mi le-au dat. Fără suportul lor, nu aş fi putut să termin teza şi nu aş fi găsit curajul de a depăşii dificultăţile.

Doctorand, Szász (căs. Friedl) Annamária

Capitolul 1

Noțiuni introductive

Obiectivul acestui capitol este prezentarea teoriei geometrice a spaţiilor Finsler, Lagrange şi Cartan complexe. Aceste spaţii reprezintă baza pentru multiple aplicaţii în special în fizică teoretică. Vom urmări monografiile [Mu1, A-P, B-C-S] în cadrul acestui capitol.

Geometria spaţiului Finsler complex începe cu studiul fibratului tangent olomorf $T'M$, şi continuă cu noţiunea de spaţiu Finsler complex. După ce s-au introdus aceste noţiuni este prezentată proiectiv echivalenţa a două metrici Finsler complexe, [A-P, Al-Mu2]. Următorul subcapitol este dedicat studiului spaţiilor Lagrange complexe, obţinute din spaţii Finsler prin suprimarea condiţiei de omogenitate. Studiul geometriei spaţiilor Cartan urmează acelaşi model, adică porneşte cu noţiunile referitoare la fibratul cotangent T'^*M după care este urmat de descrierea unui spaţiu Cartan complex. Legătura dintre spaţiile prezentate este dată de transformarea Legendre complexă,[Mu1] pag. 161.

1.1 Spațiile Finsler complexe

1.1.1 Fibratul olomorf $T'M$

Fie M o varietate complexă, dim$_C$ $M = n$, şi $(U, (z^k))$ o hartă locală cu coordonatele complexe (z^k). Considerăm $T_C M = T_R M \otimes \mathbb{C}$ complexificatul fibratului tangent real. Reperele locale pentru $T_{z,C}M$, respectiv $T^*_{z,C}M$ sunt $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right\}$, $\left\{dz^k, d\bar{z}^k\right\}$, unde $z = \left(z^k\right) \in U$.

Complexificatul fibratului tangent real poate fi scris ca suma directă între fibratul tangent olomorf $T'M$ şi a fibratului tangent antiolomorf $T''M$, adică $T_CM = T'M \oplus T''M$, ale căror fibre locale corespund valorilor proprii $+i$ şi $-i$ ale structurii complexe J pe T_CM dată local de următoarele expresii $J\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) = i\frac{\partial}{\partial z^k}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$.

Reperul local natural pentru T'_zM este $\{\frac{\partial}{\partial z^k}\}$, iar reperul local corespunzător în $T''_zM = \overline{T'M}$ este $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\}$, [A-P, Mu1].

Fibratul tangent olomorf, $T'M$, are structură de varietate complexă de dimensiune complexă $2n$. Dacă $\eta = \eta^k\frac{\partial}{\partial z^k} \in T'_zM$ este o secţiune, atunci $u = (z^k, \eta^k)$ defineşte un sistem de coordonate locale pe o hartă locală a varietăţii $T'M$.

Geometria varietăţii complexe $T'M$ se studiază pe complexificatul fibratului tangent, care se descompune ca suma de $(1,0)-$ şi de $(0,1)-$vectori, adică în

$$T_C(T'M) = T'(T'M) \oplus T''(T'M). \tag{1.1.1}$$

Din regulile de schimbare a coordonatelor se obţine un reper local natural pentru $T'_u(T'M)$, care este $\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\}$, şi se schimbă în felul următor

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{\partial z'^h}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial z'^h} + \frac{\partial^2 z'^h}{\partial z^j \partial z^k}\eta^j\frac{\partial}{\partial \eta'^h}; \quad \frac{\partial}{\partial \eta^k} = \frac{\partial z'^h}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial \eta'^h}\ . \tag{1.1.2}$$

Deoarece $T'M$ este o varietate complexă, rezultă că $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}\}$ este un reper local pentru $T''_u(T'M) = \overline{T'_u(T'M)}$ iar regula sa de schimbare se deduce din (1.1.2) prin conjugare.

Cu regulile de schimbare a coordonatelor locale (1.1.2) studiul geometriei varietăţii $T'M$ este foarte laborios. Ca să se simplifice această problemă s-a introdus tehnica conexiunii neliniare complexe, cu ajutorul căreia se 'liniarizează' geometria lui $T'M$, prin alegerea unui reper convenabil în locul celui natural, [Mu1], p. 33.

În primul rând se defineşte fibratul tangent vertical:

$$V_C(T'M) = \ker \pi_* \subset T_C(T'M),$$

unde $\pi : T'M \to M$ este aplicaţia tangentă, iar π_* aplicaţia tangentă extinsă pe $T_C(T'M)$. Utilizând descompunerea din (1.1.1) şi faptul că π_* comută cu structura lui $T'M$, se obţine $V_C(T'M) = V(T'M) \oplus \overline{V(T'M)}$. Aplicaţia $u \to V_u(T'M)$ determină o distribuţie, numită *distribuţia verticală.* Un reper local pentru $V_u(T'M)$, respectiv pentru $\overline{V_u(T'M)}$ este $\{\frac{\partial}{\partial \eta^k}\}$, respectiv $\{\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}\}$. Liftul vertical l^v, definit local prin $l^v\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta^k}$, determină un izomorfism între $T'M$ şi $V(T'M)$, [Mi-An, Mu1]. Prin operatorul de conjugare, $V_C(T'M)$ şi $V(T_CM)$ sunt izomorfe.

O conexiune neliniară complexă, conform [Mu1, Mi-An], pe scurt $(c.n.c.)$, este un subfibrat $H(T'M)$ a lui $T'(T'M)$, complementar lui $V(T'M)$.

Cum orice vector orizontal se descompune după reperul $\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}\}$, liftul orizontal al lui $\frac{\partial}{\partial z^k} \in T'_z M$, notat cu $\frac{\delta}{\delta z^k} := l^h\left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$, pentru că $\pi_*(\frac{\delta}{\delta z^k}) = \frac{\partial}{\partial z^k}$, se scrie ca

$$\frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^j \frac{\partial}{\partial \eta^j} \ , \tag{1.1.3}$$

iar funcţiile $N_k^j(z,\eta)$ pe $T'M$ sunt coeficienţii $(c.n.c.)$ N.

Deoarece $\{\frac{\delta}{\delta z^k}\}$ formează un reper local pe $H(T'M)$, care se schimbă simplu cu matricea $\left(\frac{\partial z'^h}{\partial z^k}\right)$, coeficienţii $(c.n.c.)$ N se transformă, la o schimbare de hartă locală, după regulile

$$N'^i_j \frac{\partial z'^j}{\partial z^k} = \frac{\partial z'^i}{\partial z^j} N_k^j - \frac{\partial^2 z'^i}{\partial z^j \partial z^k}\eta^j. \tag{1.1.4}$$

În acest fel se obţine *reperul adaptat* $\{\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\delta}{\delta \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}\}$ a lui $T'(T'M)$, care se schimbă cu matricea $\left(\frac{\partial z'^h}{\partial z^k}\right)$. De-a lungul acestei teze, vom folosi următoarele abrevieri $\partial_k := \frac{\partial}{\partial z^k}$, $\delta_k := \frac{\delta}{\delta z^k}$, $\partial_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, $\dot{\partial}_k := \frac{\partial}{\partial \eta^k}$, $\delta_{\bar{k}} := \frac{\delta}{\delta \bar{z}^k}$, $\dot{\partial}_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k}$, [Mu1], p.35.

Cu aceste notaţii, structura complexă naturală pe $T_C(T'M)$ este

$$J(\partial_k) = i\partial_k \ ; \ J(\dot{\partial}_k) = i\dot{\partial}_k \ ; \ J(\partial_{\bar{k}}) = -i\partial_{\bar{k}} \ ; \ J(\dot{\partial}_{\bar{k}}) = -i\dot{\partial}_{\bar{k}}, \tag{1.1.5}$$

relaţii care, în baza lui (1.1.3), conduc la

$$J(\delta_k) = i\delta_k \ ; \ J(\delta_{\bar{k}}) = -i\delta_{\bar{k}} \ ; \ J(\dot{\partial}_k) = i\dot{\partial}_k \ ; \ J(\dot{\partial}_{\bar{k}}) = -i\dot{\partial}_{\bar{k}} \ . \tag{1.1.6}$$

Astfel, $H(T'M)$ şi $\overline{H(T'M)}$ sunt J invariante.

Baza duală a lui $\{\delta_k, \dot{\partial}_k, \delta_{\bar{k}}, \dot{\partial}_{\bar{k}}\}$ se notează cu $\{dz^k, \delta\eta^k, d\bar{z}^k, \delta\bar{\eta}^k\}$, unde $\delta\eta^k = d\eta^k + N_j^k dz^j$, şi $\delta\bar{\eta}^k = d\bar{\eta}^k + N_{\bar{j}}^{\bar{k}} d\bar{z}^j$.

Definiţia unei *conexiunii liniare* pe varietatea complexă $T'M$, extinsă la fibratul său tangent complexificat este

$$D : \Gamma(T_C(T'M)) \to \Gamma(T_C(T'M) \otimes T_C(T'^*M))$$

astfel încât $D(fu) = udf + fDu$, pentru orice $u \in \Gamma(T_C(T'M))$ şi $f \in \mathcal{A}^0(T'M)$. D este o conexiune liniară complexă distinsă, pe scurt $d-(c.l.c.)$, dacă pastrează distribuţiile pe $T_C(T'M)$

D este o conexiune liniară complexă normală, pe scurt o $N-(c.l.c.)$, dacă în reperul adaptat este bine determinată de un set de patru coeficienţi şi notată prin $D\Gamma(N) := (L^i_{jk}, L^{\bar{i}}_{\bar{j}k}, C^i_{jk}, C^{\bar{i}}_{\bar{j}k})$ cu următoarea forma de conexiune:

$$\omega^i_j = L^i_{jk}dz^k + C^i_{jk}\delta\eta^k + L^i_{j\bar{k}}d\bar{z}^k + C^i_{j\bar{k}}\delta\bar{\eta}^k \ , \tag{1.1.7}$$

şi prin conjugare se obţine $\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \overline{\omega^i_j}$.

Câmpurile de torsiune respectiv de curbură ale $N-(c.l.c.)$ D pentru $\forall X, Y, Z \in T_C(T'M)$ sunt

$$\mathbb{T}(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]\,, \quad \mathbb{R}(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,$$

Componentele croşetului Lie în reperul local adaptat $\{\delta_k, \dot{\partial}_k, \delta_{\overline{k}}, \dot{\partial}_{\overline{k}}\}$ corespunzător unei $(c.n.c.)$ N sunt

$$\begin{aligned} [\delta_j, \delta_k] &= (\delta_k N^i_j - \delta_j N^i_k)\dot{\partial}_i =: R^i_{jk}\dot{\partial}_i; \\ [\delta_j, \delta_{\bar{k}}] &= (\delta_{\bar{k}} N^i_j)\dot{\partial}_i - (\delta_j N^{\bar{i}}_{\bar{k}})\dot{\partial}_{\bar{i}}; \\ \left[\delta_j, \dot{\partial}_k\right] &= (\dot{\partial}_k N^i_j)\dot{\partial}_i \ ; \ \left[\delta_j, \dot{\partial}_{\bar{k}}\right] = (\dot{\partial}_{\bar{k}} N^i_j)\dot{\partial}_i; \\ \left[\dot{\partial}_j, \dot{\partial}_k\right] &= 0 \ ; \ \left[\dot{\partial}_j, \dot{\partial}_{\bar{k}}\right] = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

cu ajutorul cărora putem determina expresiilor locale pentru torsiunea şi curbura unei $N-(c.l.c.)$ D, [Mu1] p. 43.

Definiţia 1.1.1. *[Mu1] Fie $g_{i\bar{j}}(z,\eta)$ un $d-$ tensor complex pe $T'M$ hermitian şi nedegenerat. Se numeşte $N-$liftul sau liftul de tip Sasaki al lui $g_{i\bar{j}}$, structura metrică G pe $T'M$ dată prin*

$$G = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}\delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j. \tag{1.1.9}$$

În acest fel s-a obţinut noţiunea de *conexiunea metrică,* adică pentru o $N-(c.l.c.)$ D care verifică $DG = 0$. Liftul Sasaki din 1.1.9 împreună cu varietatea M formează o structură metrică hermitiană pe $T'M$ în raport cu structura naturală J, adică $G(JX, JY) = G(X,Y)$, (cf. [Mu1], pag. 50).

1.1.2 Metrici Finsler complexe

Fie M o varietate complexă, $\dim_C M = n$, şi (z^k) coordonate locale complexe întro hartă locală complexă (U, φ). Fie varietatea complexă $T'M$, $\dim_C T'M = 2n$, ale cărei coordonate induse într-o hartă locală în $u \in T'M$ sunt $u = (z^k, \eta^k)$. Schimbările coordonatelor locale în u sunt date de (1.1.2).

Varietatea bază al unui spaţiu Finsler complex este $T'M$ şi principalele obiecte ale acestei geometrii acţionează pe fibratul tangent complexificat $T_C(T'M)$.

Definiţia 1.1.2. *O* metrică Finsler complexă *pe* M *este o funcţie continuă* $F : T'M \to \mathbb{R}^+$ *care satisface următoarele condiţii:*

$i)$ $L := F^2$ *este diferenţiabilă pe* $\widetilde{T'M}$;

$ii)$ $F(z, \eta) \geq 0$*, egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $\eta = 0$;

$iii)$ $F(z, \lambda\eta) = |\lambda|\, F(z, \eta)$ *pentru* $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$;

$iv)$ *matricea hermitiană*

$$g_{i\bar{j}}(z, \eta) = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}} \tag{1.1.10}$$

este pozitiv definită. Perechea (M, F) *se numeşte* spaţiu Finsler complex.

Condiţia $iii)$ spune că funcţia L este pozitiv omogenă în raport cu norma complexă, adică $L(z, \lambda\eta) = \lambda\bar{\lambda}L(z, \eta)$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, şi din Teorema lui Euler

i) $\frac{\partial L}{\partial \eta^k}\eta^k = L;\ \frac{\partial L}{\partial \bar{\eta}^k}\bar{\eta}^k = L$

ii) $g_{i\bar{j}}\eta^i = \frac{\partial L}{\partial \bar{\eta}^j};\ g_{i\bar{j}}\bar{\eta}^j = \frac{\partial L}{\partial \eta^i};\ L = g_{i\bar{j}}\eta^i\bar{\eta}^j$

iii) $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}\eta^k = 0;\ \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}\eta^i = 0;\ \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^k}\bar{\eta}^k = 0;$

iv) $g_{ij}\eta^i = 0;\ \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}\bar{\eta}^j = g_{ik},$ unde $g_{ij} = \partial^2 L/\partial \eta^i \partial \eta^j$.

În plus, deoarece $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$ rezultă $\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial \eta^i}$.

Fie $C_{i\bar{j}k} := \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \eta^k}$, $C_{i\bar{j}\bar{k}} := \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{\eta}^k}$ *tensorii Cartan* complecşi, [Yan]. Condiţia de omogenitate a metricii Finsler complexe F conduce la:

Propoziţia 1.1.1. $i)$ $C_{i\bar{j}k} = C_{k\bar{j}i};\quad C_{i\bar{j}\bar{k}} = C_{i\bar{k}\bar{j}};$

$ii)$ $C_{i\bar{j}k} = \overline{C_{j\bar{i}\bar{k}}};$

$iii)$ $C_{i\bar{j}k}\eta^k = C_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{\eta}^j = C_{i\bar{j}k}\eta^i = C_{i\bar{j}\bar{k}}\bar{\eta}^k = 0.$

O problemă fundamentală a geometriei Finsler complexe este cea a determinării unei conexiuni neliniare complexe dependente numai de o metrică Finsler complexă F. O soluţie este dată prin tehnica conexiunii verticale "bune", [A-P, Mu1]. Se obţine în mod unic: o $(c.n.c)$ numită $(c.n.c.)$ ***Chern-Finsler***

$$\overset{CF}{N_j^i} = g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{l\bar{m}}}{\partial z^j}\eta^l \;= g^{\bar{m}i}\frac{\partial^2 L}{\partial z^j \partial \bar{\eta}^m}$$

pentru care $[\delta_k, \delta_j] = 0$ şi $\delta_k F = 0$. Conexiunea liniară Chern-Finsler complexă este de tip $(1,0)$ cu coeficienţii $\overset{CF}{D\Gamma} = (\overset{CF}{N_j^i},\ \overset{CF}{L_{jk}^i},\ \overset{CF}{C_{jk}^i}\ )$ cu

$$\overset{CF}{L_{jk}^i} = g^{\bar{m}i}\frac{\delta g_{j\bar{m}}}{\partial z^k}\quad \overset{CF}{C_{jk}^i} = g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial \eta^k},\quad \overset{CF}{L_{\bar{j}k}^{\bar{i}}} = \overset{CF}{C_{\bar{j}k}^{\bar{i}}} = 0 \tag{1.1.11}$$

Coeficienţii de torsiune şi curbură nenuli ai conexiunii Chern-Finsler complexe sunt

$$T_{jk}^i = \overset{CF}{L_{jk}^i} - \overset{CF}{L_{kj}^i}\ ;\quad Q_{jk}^i = \overset{CF}{C_{jk}^i}\ ;\quad \Theta_{j\bar{k}}^i = \delta_{\bar{k}}\overset{CF}{N_j^i}\ ;\quad \rho_{j\bar{k}}^i = \dot{\partial}_{\bar{k}}\overset{CF}{N_j^i}. \tag{1.1.12}$$

$$\begin{aligned} R_{j\bar{k}h}^i &= -\delta_{\bar{k}}\overset{CF}{L_{jh}^i} - \delta_{\bar{k}}(\overset{CF}{N_h^l})\overset{CF}{C_{jl}^i}\ ;\quad P_{j\bar{k}h}^i = -\delta_{\bar{k}}\overset{CF}{C_{jh}^i}; \\ Q_{\bar{j}\bar{k}h}^{\bar{i}} &= \dot{\partial}_h\overset{CF}{L_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}}} + \dot{\partial}_h(\overset{CF}{N_{\bar{k}}^{\bar{l}}})\overset{CF}{C_{\bar{j}\bar{l}}^{\bar{i}}}\ ;\quad S_{j\bar{k}h}^i = -\dot{\partial}_{\bar{k}}\overset{CF}{C_{jh}^i}\ . \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Un spaţiul Finsler complex (M,F) este:

i) *Kähler* dacă şi numai dacă $T_{jk}^i\eta^j = 0$ şi

ii) *slab Kähler* dacă şi numai dacă $g_{i\bar{l}}T_{jk}^i\eta^j\bar{\eta}^l = 0.$

În cazul particular, când metrica Finsler complexă este pur hermitiană, adică $g_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}(z),$ toate nuanţele de Kähler coincid.

Conform [A-P, Al1, Mu1], curbura olomorfă a spaţiului Finsler complex (M,F) în direcţia lui η este $\mathcal{K}_F(z,\eta) = \frac{2}{L^2}\mathbf{G}(\mathbf{R}(\chi,\overline{\chi})\chi,\overline{\chi}),$ unde $\chi := \eta^k\delta_k$ este liftul orizontal. Expresia locală a curburii este dată în următoarea formulă (vezi [Al1])

$$\mathcal{K}_F(z,\eta) = \frac{2}{L^2}R_{j\bar{k}}\bar{\eta}^j\eta^k,\ \text{unde } R_{\bar{j}k} = -g_{m\bar{j}}(\delta_{\bar{h}}N_k^m)\bar{\eta}^h. \tag{1.1.14}$$

În [Al-Mu3] s-a introdus noţiunea spaţiu Berwald generalizat, în felul următor:

Definiţia 1.1.3 ([Al-Mu3]). *Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex $n-$dimensional. (M, F) se numeşte Berwald generaliat dacă coeficienţii conexiunii Berwald $\overset{B}{L}{}^i_{jk}$ depind numai de poziţia z.*

Pe de altă parte, Aikou în [Ai2] defineşte următoarea noţiune:

Definiţia 1.1.4. *Un spaţiu Finsler complex care este Kähler şi $L^i_{jk} = L^i_{jk}(z)$ se numeşte spaţiu Berwald complex.*

1.1.3 Metrici Finsler complexe proiectiv echivalente

Fie $(M, L = F^2)$ un spaţiu Finsler complex. În [A-P] ecuaţia unei geodezice complexe este dată prin $D_{T^h+\overline{T^h}}T^h = \theta^*(T^h, \overline{T^h})$, unde $\theta^* = g^{\bar{m}k}g_{i\bar{p}}(L^{\bar{p}}_{\bar{j}\bar{m}} - L^{\bar{p}}_{\bar{m}\bar{j}})dz^i \wedge d\bar{z}^j \otimes \delta_k$. Local, ecuaţia unei geodeice complexe $z = z(t)$ pe (M, F), unde t este un parametru real, poate fi scrisă ca

$$\frac{d^2z^i}{dt^2} + 2G^k\left(z(t), \frac{dz}{dt}\right) = \theta^{*i}\left(z(t), \frac{dz}{dt}\right);\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.1.15}$$

unde prin $z^i(t),\ i = 1, \ldots, n,$ sunt notate coordonatele de-a lungul curbei $z = z(t)$.

Fie $\tilde{L}$ o altă metrică Finsler complexă pe varietatea bază M.

Definiţia 1.1.5 ([Al-Mu2]). *Metricile Finsler complexe L şi $\tilde{L}$ pe varietatea M sunt* proiectiv echivalente *dacă au aceleaşi geodezice complexe ca mulţimi de puncte.*

Teorema 1.1.1 ([Al-Mu2]). *Fie L şi $\tilde{L}$ două metrici Finsler pe varietatea M. L şi $\tilde{L}$ sunt proiectiv echivalente dacă şi numai dacă există o funcţie netedă P pe $T'M$ cu valori complexe, astfel încât*

$$\tilde{G}^i = G^i + Q^i + P\eta^i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.1.16}$$

Are loc următorul rezultat, care este o versiune complexă a teoremei lui Rapcsák.

Teorema 1.1.2 ([Al-Mu2]). *Fie L şi $\tilde{L}$ două metrici Finsler pe varietatea M. L şi $\tilde{L}$ sunt proiectiv echivalente dacă şi numai dacă*

$$\dot{\partial}_{\bar{r}}(\delta_k\tilde{L})\eta^k + 2(\dot{\partial}_{\bar{r}}G^l)(\dot{\partial}_l\tilde{L}) = \frac{1}{\tilde{L}}(\delta_k\tilde{L})\eta^k(\dot{\partial}_{\bar{r}}\tilde{L}); \tag{1.1.17}$$

$$Q^r = -\frac{1}{2\tilde{L}}\theta^{*l}(\dot{\partial}_l\tilde{L})\eta^r; \tag{1.1.18}$$

$$P = \frac{1}{2\tilde{L}}[(\delta_k\tilde{L})\eta^k + \theta^{*i}(\dot{\partial}_i\tilde{L})]. \tag{1.1.19}$$

$(r = 1, \ldots, n)$. *Mai mult, schimbarea proiectivă este $\tilde{G}^i = G^i + \frac{1}{2\tilde{L}}(\delta_k\tilde{L})\eta^k\eta^i$.*

1.2 Spații Lagrange complexe

Fie M o varietate complexă cu $\dim_C M = n,$ cu (z^k) sunt notate coordonate locale complexe într-o hartă locală şi $T'M$ este fibratul tangent olomorf care posedă o structură naturală de varietate complexă.

Definiţia 1.2.1. *[Mu1] Un spaţiu Lagrange complex este perechea (M, L), unde L este o funcţie diferenţiabilă $L : T'M \to \mathbb{R}$, care satisface următoarea condiţie de regularitate: $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$ este nedegenerat (* $\det(g_{i\bar{j}}) \neq 0$*) şi determină o metrică hermitiană de signatură constantă.*

Teorema 1.2.1. *[Mu1] O conexiune neliniară complexă depinzând numai de Lagrangianul complex L, este dată de*

$$\overset{c}{N}{}^k_j = \frac{\partial G^k}{\partial \eta^j} \text{ unde } G^k = \frac{1}{2} g^{\bar{i}k} \frac{\partial^2 L}{\partial z^j \partial \bar{\eta}^i} \eta^j. \tag{1.2.1}$$

Există şi o altă conexiune neliniară complexă care depine numai de funcţia Lagrange complexă L, care în geometria Lagrange reală există numai în câteva situaţii particulare, este $(c.n.c.)$ *Chern-Lagrange*:

Teorema 1.2.2. *[Mu1] O $(c.n.c.)$ pe spaţiul Lagrange complex (M, L) este*

$$\overset{CL}{N}{}^k_j = g^{\bar{i}k} \frac{\partial^2 L}{\partial z^j \partial \bar{\eta}^i}. \tag{1.2.2}$$

În geometria Lagrange complexă sunt cunoscute următoarele $N - (c.l.c.)$ metrice în raport cu G, [Mu1] p. 97:

- *conexiunea canonică* $\overset{cL}{D\Gamma} = (\overset{CL}{N}{}^i_j, \overset{c}{L}{}^i_{jk}, \overset{c}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k}, \overset{c}{C}{}^i_{jk}, 0)$, unde

$$\begin{aligned} \overset{c}{L}{}^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{\overline{m}i} \left(\frac{\delta g_{j\overline{m}}}{\delta z^k} + \frac{\delta g_{k\overline{m}}}{\delta z^j}\right) \ ; \ \overset{c}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = \frac{1}{2} g^{\bar{i}m} \left(\frac{\delta g_{m\bar{j}}}{\delta z^k} - \frac{\delta g_{k\bar{j}}}{\delta z^m}\right); \\ \overset{c}{C}{}^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{\overline{m}i} \left(\frac{\partial g_{j\overline{m}}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{k\overline{m}}}{\partial \eta^j}\right) = g^{\overline{m}i} \frac{\partial g_{j\overline{m}}}{\partial \eta^k} \ ; \ \overset{c}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

$\overset{cL}{D\Gamma}$ nu este de tip (1,0), dar are torsiunile $hT(h, h)$ şi $vT(v, v)$ nule, [Mu1].

- *conexiunea Chern-Lagrange* $\overset{CL}{D\Gamma} = (\overset{CL}{N^i_j}, \overset{CL}{L^i_{jk}}, 0, \overset{CL}{C^i_{jk}}, 0)$, unde

$$\overset{CL}{L^i_{jk}} = g^{\overline{m}i}\frac{\delta g_{j\overline{m}}}{\delta z^k}\ ;\ \overset{CL}{L^{\bar{i}}_{\bar{j}k}} = 0\ ;\ \overset{CL}{C^i_{jk}} = g^{\overline{m}i}\frac{\partial g_{j\overline{m}}}{\partial \eta^k}\ ;\ \overset{CL}{C^{\bar{i}}_{\bar{j}k}} = 0. \qquad (1.2.4)$$

Coeficienţii conexiunii $\overset{CL}{D\Gamma}$ arată ca cei ai conexiunii Chern-Finsler, deşi nu a fost impusă condiţia de omogenitate. Mai mult, $\overset{CL}{L^i_{jk}} = \frac{\partial \overset{CL}{N^i_k}}{\partial \eta^j}$. astfel că, $\overset{CL}{D\Gamma}$ are aceeaşi torsiuni şi curburi nenule ca şi conexiunea Chern- Finsler.

În cele ce urmează prezentăm spaţiile Lagrange generalizate care includ spaţiile Finsler şi Lagrange complexe. Şi aici descriem o $(c.n.c.)$ care depinde numai de tensorul metric al spaţiului.

Definiţia 1.2.2 ([Mu1]). *O metrica Lagrange generalizată pe M este un $d-$tensor complex $\tilde{g}_{i\bar{j}}(z,\eta)$ de tip $\binom{0\ \bar{0}}{1\ \bar{1}}$, nedegenerat şi Hermitian $\tilde{g}_{i\bar{j}} = \overline{\tilde{g}_{j\bar{i}}}$. Perechea $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ se numeşte spaţiul Lagrange generalizat, pe scurt spaţiul $(g.c.L.)$.*

Într-adevăr, exemplele cele mai accesibile de metrici Lagrange generalizate complexe sunt metricile Finsler şi Lagrange complexe pe $T'M$. În continuare prezentăm câteva subclase proprii ale unui spaţiu $(g.c.L)$:

- *local Minkowski generalizat complex* dacă în fiecare $u = (z,\eta) \in T'M$ există hărţi locale, astfel încât $g_{i\bar{j}}$ depinde numai de variabila η.
- *metrică slab regulată* dacă $(M, \mathcal{E} = g_{i\bar{j}}\eta^i\bar{\eta}^j)$ este un spaţiu Lagrange complex, cu $(c.n.c.)$ Chern-Lagrange

$$\overset{CL}{N^k_j} = \left(\frac{\partial^2 g_{l\bar{m}}}{\partial z^j \partial \bar{\eta}^i}\eta^l\bar{\eta}^m + \frac{\partial g_{l\bar{i}}}{\partial z^j}\eta^l\right). \qquad (1.2.5)$$

- *metrică regulată* dacă $(M, \mathcal{F} = \sqrt{g_{i\bar{j}}\eta^i\bar{\eta}^j})$ este un spaţiu Finsler complex.

1.3 Spaţii Cartan complexe

Fie M o varietate $n-$dimensională şi $z = (z^k)_{k=\overline{1,n}}$ coordonatele complexe într-o hartă locală.Dualul lui $T'M$ este notat cu T'^*M. Pe varietatea T'^*M, un punct u^* este caracterizat prin coordonatele $u^* = (z^k, \zeta_k)_{k=\overline{1,n}}$, cu schimbările de forma $z'^k = z'^k(z)$ şi $\zeta'_k = \frac{\partial^* z^j}{\partial z'^k}\zeta^j,\ rank(\frac{\partial^* z^j}{\partial z'^k}) = n.$

Un *spaţiu Cartan complex* este o pereche $(M,\mathcal{C})$, unde $\mathcal{C}\,:\,T'^{*}M\,\to\,\mathbb{R}^{+}$ este o funcţie continuă, ce satisface următoarele condiţii:

a) $H:=\mathcal{C}^2$ este netedă pe $\widetilde{T'^{*}M}:=T'^{*}M\setminus\{0\}$;

b) $\mathcal{C}(z,\zeta)\geq 0,$ este egalitate dacă şi numai dacă $\zeta=0$;

c) $\mathcal{C}(z,\lambda\zeta)=|\lambda|\mathcal{C}(z,\zeta)$ pentru $\forall\lambda\in\mathbb{C}$;

d) matricea Hermitiană $(h^{\bar{j}i}(z,\zeta))$ este pozitiv definită, unde $h^{\bar{j}i}:=\frac{\partial^2 H}{\partial\zeta_i\partial\bar{\zeta}_j}$ este tensorul fundamental, sau echivalent, indicatoarea sferică este tare pseudo-convexă.

Un exemplu uzual al unui spaţiu Cartan complex este spaţiul Cartan *pur hermitian,* în acest caz $h^{\bar{j}i}=h^{\bar{j}i}(z)$.

În linii mari, studiem secţiunile fibratului tangent complexificat, $T(T'^{*}M)$, care se descompune în suma directă $T_C(T'^{*}M)=T'(T'^{*}M)\oplus T''(T'^{*}M)$. Pentru mai multe detalii se poate consulta [Mu1].

Fie $VT'^{*}M\subset T'(T'^{*}M)$ fibratul vertical, care are distribuţia verticală $V_{u^*}(T'^{*}M)$, local generată de $\{\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\}$. O conexiune neliniară complexă, pe scurt $(c.n.c.)$, pe $T'^{*}M$ este un subfibrat suplimentar în $T'(T'^{*}M)$ a lui $V(T'^{*}M)$, adică $T'(T'^{*}M)=H(T'^{*}M)\oplus V(T'^{*}M)$. Distribuţia orizontală $H_{u^*}(T'^{*}M)$ este local generată de $\{\frac{\delta^*}{\delta z^j}\}$, unde $\frac{\delta^*}{\delta z^j}=\frac{\partial^*}{\partial z^j}+N_{kj}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}$, şi funcţiile N_{kj} sunt coeficienţii $(c.n.c.)$ pe $T'^{*}M$. Perechea $\{\delta_k^*:=\frac{\delta^*}{\delta z^k},\dot{\partial}^k:=\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\}$ va fi numită reperul adaptat a $(c.n.c.)$, ce se schimbă după regulile $\delta_k^*=\frac{\partial^* z'^j}{\partial z^k}\delta'^*_j$ şi $\dot{\partial}^k=\frac{\partial^* z'^k}{\partial z^j}\dot{\partial}'^j$. Prin conjugare, se obţine reperul adaptat $\{\delta^*_{\bar{k}},\dot{\partial}^{\bar{k}}\}$ pe $T''(T'^{*}M)$. Reperele adaptate duale sunt $\{d^*z^k,\delta\zeta_k=d\zeta_k-N_{kj}dz^j\}$ şi $\{d^*z^{\bar{k}},\delta\zeta_{\bar{k}}\}$.

O conexiune hermitiană D de tip $(1,0)$ este conexiunea Chern-Cartan ([Mu1]), care este dată local prin următorii coeficienţi:

$$N_{jk}=-h_{j\bar{m}}\frac{\partial^* h^{\bar{m}l}}{\partial z^k}\zeta_l,\ H^i_{jk}:=h^{\bar{m}i}(\delta^*_k h_{j\bar{m}})=\dot{\partial}N_{jk},\ V^{ik}_j:=-h_{j\bar{m}}(\dot{\partial}^k h^{\bar{m}i}),\tag{1.3.1}$$

şi $H^{\bar{i}}_{\bar{j}k}=V^{\bar{i}k}_{\bar{j}}=0,$ unde cu δ_k^* am notat reperul adaptat al $(c.n.c.)$ Chern-Cartan, această notaţie va fi utilizată şi în continuare. Adiţional avem că $h_{j\bar{m}}h^{\bar{m}k}=\delta^k_j$, şi $D_{\delta_k^*}\delta_j^*=H^i_{jk}\delta_i^*,\ D_{\delta_k^*}\dot{\partial}_j=-H^i_{jk}\dot{\partial}^j,\ D_{\dot{\partial}^k}\delta_j^*=V^{ik}_j\delta_i^*,\ D_{\dot{\partial}^k}\dot{\partial}^i=-V^{ik}_j\delta_j^*$, etc. Mai mult, avem că

$$H^i_{jk}=\dot{\partial}N_{jk};\quad H^i_{jk}\zeta_i=N_{jk}.$$

Notaţiile $"_|"$, $"|"$, $"_{\bar{|}}"$, $"\bar{|}"$ reprezintă $h-,\ v-,\ \bar{h}-,\ \bar{v}-$derivatele covariante în raport cu conexiunea Chern-Cartan.

Pe un spaţiu Cartan complex, tensorii lui Cartan complecşi au următoarele expresii $V^{\bar{m}ik} = \dot{\partial}^k h^{\bar{m}i}$ şi $V^{\bar{m}i\bar{k}} = \dot{\partial}^{\bar{k}} h^{\bar{m}i}$, cu următoarele proprietăţi $V^{\bar{m}ik}\zeta_i = 0,$ respectiv $V^{\bar{m}i\bar{k}}\zeta_{\bar{k}} = 0.$

Utilizând rezultatele din [Al-Mu5] şi [C-S], putem să prezentăm următoarele clase speciale de spaţii Cartan. Un spaţiu Cartan complex $(M, \mathcal{C})$ se numeşte *Kähler-Cartan* dacă $T^{*i}_{jk}\zeta_i = 0,$ şi *slab Kähler-Cartan* dacă $h^{\bar{p}j}T^{*i}_{jk}\zeta_i\zeta_{\bar{p}} = 0,$ unde $T^{*i}_{jk} := H^i_{jk} - h^i_{kj}$ este $h-$torsiunea. În cazul particular, când tensorul metric fundamental depinde numai de poziţia z, cele trei clase de Kähler-Cartan coincid.

Definiţia 1.3.1. *Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan complex n-dimensional. $(M, \mathcal{C})$ se numeşte* Berwald-Cartan *dacă coeficienţii H^i_{jk} depind numai de poziţia z.*

Teorema 1.3.1 ([Al-Mu5]). *Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan complex n-dimensional. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $(M, \mathcal{C})$ *este Berwald-Cartan;*

ii) N_{ij} *este olomorf în* ζ;

iii) $V^{\bar{m}ik}_{|j} = 0;$

iv) $V^{\bar{m}ik}_{|\bar{j}} = 0.$

Definiţia 1.3.2. *Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan complex n-dimensional. Spaţiul $(M, \mathcal{C})$ se numeşte* tare Berwald-Cartan*, dacă este Kähler-Cartan şi $\overset{c}{H}{}^i_{jk}(z)$, unde $\overset{c}{H}{}^i_{jk} = \frac{1}{2}(H^i_{jk} + H^i_{kj})$.*

Teorema 1.3.2 ([Al-Mu5]). *Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan complex n-dimensional. $(M, \mathcal{C})$ este tare Berwald-Cartan, dacă şi numai dacă este un spaţiu Berwald-Cartan cu proprietatea de slab Kähler-Cartan.*

În cele ce urmează, reamintim definiţiile câtorva clase generalizate de spaţii Cartan.

Definiţia 1.3.3. *O* metrică Hamilton generalizată *este un $d-$tensor $\tilde{h}^{\bar{j}k}(z, \zeta)$ de tip $\left(\begin{smallmatrix}\bar{0} & 0\\ \bar{1} & 1\end{smallmatrix}\right)$, nedegenerat şi hermitian. Perechea $(M, \tilde{h}^{\bar{j}k})$ se numeşte* spaţiu Hamilton complex generalizat.

În particular, când $\tilde{h}^{\bar{j}k}$ provine dintr-o funcţie hamiltoniană complexă $\widetilde{H} : T'^{*}M \to \mathbb{R}$, adică $\tilde{h}^{\bar{j}i} := \frac{\partial^2 \widetilde{H}}{\partial\zeta_i \partial\bar{\zeta}_j}$, perechea $(M, \tilde{h}^{\bar{j}k})$ se numeşte *spaţiu Hamilton complex.* Un studiu al acestui spaţiu este realizat în [Mu1].

Un spaţiu Hamilton complex, pentru care hamiltonianul $\widetilde{H}(z, \zeta)$ este omogen în raport cu ζ, adică $\widetilde{H}(z, \lambda\zeta) = |\lambda|^2 \widetilde{H}(z, \zeta),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$, este un spaţiu Cartan complex. Pentru informaţii suplimentare se poate consulta [Mu1].

Capitolul 2

Structuri hipercomplexe pe spațiul total al unui spațiu Finsler complex

2.1 Structuri hipercomplexe pe spațiul total

Definiţia 2.1.1 ([Mu4]). *Structurile geometrice hipercomplexe* $\{I, F_1, F_2, F_3 = F_1F_2\}$ *cu* $F_i^2 = \varepsilon_i I, \varepsilon_i \in \{-1, 1, 0\},\ i = 1, 2, 3,$ *ce satisface*

i) $F_1F_2 + F_2F_1 = \alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R},$

ii) $F_2F_1 = \delta F_1F_2,\ \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \delta \neq 1$ *pentru* $F_1^2 = F_2^2 = 0,$

se numesc structuri bibătratice.

Clasificarea algebrelor bipătratice până la un izomorfism, şi în consecinţă a structurilor geometrice corespunzătoare, are loc în următoarele condiţii:

Teorema 2.1.1 ([Mu4]). *Singurele algebre bipătratice neizomorfe sunt:*

i) quaternionii, antiquaternionii, semiquaternionii, semiantiquaternionii, bitangentă necomutativă;

ii) $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C},\ D \otimes D,\ D_0 \otimes D_0,$ *Algebra Sobrero, bitangentă.*

Considerând structurile geometrice corespunzătoare se poate enunţa:

Teorema 2.1.2 ([Mu4]). *Prezintă importanţă doar studiul următoarelor structuri geometrice bipătratice:*

i) $F_1F_2 + F_2F_1 = 0$ *cu:*

$$\begin{aligned}
&a)\ F_1^2 = F_2^2 = -I \text{ quaternionică};\\
&b)\ F_1^2 = -F_2^2 = -I \text{ antiquaternionică};\\
&c)\ F_1^2 = -I,\ F_2^2 = 0 \text{ semiquaternionică};\\
&d)\ F_1^2 = F_2^2 = 0 \text{ bitangentă necomutativă};
\end{aligned}$$

ii) $F_1F_2 = F_2F_1$ *cu:*

$$\begin{aligned}
&a)\ F_1^2 = F_2^2 = -I \text{ bicomplexă comutativă};\\
&b)\ F_1^2 = F_2^2 = I \text{ bidublă comutativă};\\
&c)\ F_1^2 = I,\ F_2^2 = 0 \text{ biduală comutativă};\\
&d)\ F_1^2 = -I,\ F_2^2 = 0\ (f^4 + 2f^2 + 1 = 0) \text{ structură};\\
&e)\ F_1^2 = F_2^2 = 0,\ F_1F_2 = \delta F_2F_1,\ \delta \neq 0 \text{ bitangentă}.
\end{aligned}$$

Propoziţia 2.1.1 ([Mu4]). *Dacă F_1 şi F_2 definesc o structură bipătratică necomutativă, atunci câmpul $aF_1+bF_2,\ (a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0)$ defineşte una din structurile hipercomplexe de ordin doi şi reciproc.*

2.2 Metrici hipercomplexe generalizate

2.2.1 Lifturi Sasaki generalizate

Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex de dimensiune complexă n, unde vom considera pe $(c.n.c.)$ Chern-Finsler $N_j^i = g^{\bar{m}i}\frac{\partial g_{l\bar{m}}}{\partial z^j}$,, şi structura metrică hermitiană G_S pe $T_C(T'M)$ dată de liftul Sasaki $(1.1.9)$ a lui $g_{i\bar{j}}$, $G_S = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}\delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j$.

Considerăm o structura metrică Sasaki generalizată G pe $T'M$:

$$G(z,\eta) = g_{i\bar{j}}(z,\eta)dz^i \otimes d\bar{z}^j + a(L)g_{i\bar{j}}(z,\eta)\delta\eta^i \otimes \delta\bar{\eta}^j,$$

unde a : Im$(L) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Fie J_1 structura complexă naturală pe fibratul olomorf şi J_2 o altă structură aproape complexă pe $T'M$ definită în felul următor:

$$J_1(\delta_k) = i\delta_k; \quad J_1(\delta_{\bar{k}}) = -i\delta_{\bar{k}}; \quad J_1(\dot{\partial}_k) = i\dot{\partial}_k; \quad J_1(\dot{\partial}_{\bar{k}}) = -i\dot{\partial}_{\bar{k}}; \tag{2.2.1}$$
$$J_2(\delta_k) = \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{\partial}_k; \quad J_2(\delta_{\bar{k}}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{\partial}_{\bar{k}}; \quad J_2(\dot{\partial}_k) = -\sqrt{a}\delta_k; \quad J_2(\dot{\partial}_{\bar{k}}) = -\sqrt{a}\delta_{\bar{k}}.$$

Vom nota cu $J_3 := J_1 \circ J_2$ structura obţinută prin compunerea celor două structuri definite mai înainte. Au loc următoarele relaţii:

$$J_1^2 = \ J_2^2 \ = -I, \quad J_3^2 = I; \tag{2.2.2}$$
$$J_1 J_2 = J_2 J_1 = J_3; \ \ J_1 J_3 = J_3 J_1 = -J_2; \ \ J_2 J_3 = J_3 J_2 = -J_1.$$

Utilizând relaţiile (2.2.1), (2.2.2) şi noţiunile din Subcapitolul 2.1, respectiv din [Mu3, Mu4], obţinem următoarea teoremă:

Teorema 2.2.1. $(T'M, J_1, J_2, J_3)$ *este o structură bicomplexă comutativă.*

Structura bicomplexă definită de (J_1, J_2, J_3) este integrabilă dacă $N_1 = 0, \ N_2 = 0.$ Cum J_1 este structura naturală complexă, rezultă că este integrabilă, adică: $N_1 = 0.$

Teorema 2.2.2. *Varietatea* $(T'M, G, J_2)$ *este complexă dacă şi numai dacă* (M, F) *este Kähler, torsiunile* $\Theta^l_{j\bar{k}}$ *şi* $\rho^l_{j\bar{k}}$ *se anulează, şi*

$$a'\left(\frac{\partial L}{\partial \eta^j}\delta^l_k - \frac{\partial L}{\partial \eta^k}\delta^l_j\right) = 0. \tag{2.2.3}$$

Corolarul 2.2.1. $(T'M, G, J_2)$ *este o varietate complexă dacă şi numai dacă* (M, F) *este un spaţiu Berwald complex generalizat,* $\Theta^i_{j\bar{k}} = 0$ *şi* $a'\left(\eta_j\delta^l_k - \eta_k\delta^l_j\right) = 0.$

Teorema 2.2.3. *Structura bicomplexă comutativă* (J_1, J_2, J_3) *este integrabilă dacă şi numai dacă* (M, F) *este un spaţiu Berwald complex generalizat,* $\Theta^i_{j\bar{k}} = 0$ *şi* $a'\left(\eta_j\delta^l_k - \eta_k\delta^l_j\right) = 0.$

Tripletul (J_1, J_2, J_3) definită în (2.2.2) este o structură hipercomplexă. Mai mult de atât, $(T'M, G, J_1, J_2)$ are o structură aproape hiper-Kähler, conform [O], dacă următoarele condiţii se îndeplinesc:

a) $(T'M, G, J_1, J_2)$ este o varietate aproape hiper-hermitiană;

b) $4-$forma fundamentală Ω este închisă.

Am obţunt următoarele rezultate intermediare:

Propoziţia 2.2.1. *Varietăţile* $(T'M, G, J_1),\ (T'M, G, J_2)$ *şi* $(T'M, G, J_3)$ *sunt aproape hermitiene, altfel spus* $G(J_mX, J_mY) = G(X, Y),\ \forall X, Y,\ m = 1, 2, 3.$

Construim $4-$ forma fundamentală Ω:

$$\Omega = \phi_1 \wedge \phi_1 + \phi_2 \wedge \phi_2 + \phi_3 \wedge \phi_3,$$

unde $\phi_k(X, Y) = G(X, J_kY)$ cu $k = 1, 2, 3.$

Expresiile lui ϕ_1 şi ϕ_2 în reperul local adaptat sunt:

$$\phi_1(z, \eta) = -ig_{j\bar{k}}dz^i \wedge d\bar{z}^j - ia(L)g_{j\bar{k}}\delta\eta^j \wedge \delta\bar{\eta}^k. \tag{2.2.4}$$

$$\phi_2(z, \eta) = -\sqrt{a(L)}g_{j\bar{k}}dz^j \wedge \delta\bar{\eta}^k + \sqrt{a(L)}g_{j\bar{k}}\delta\eta^j \wedge d\bar{z}^k. \tag{2.2.5}$$

Teorema 2.2.4. *Varietatea* $(T'M, G, J_1)$ *este Kähler dacă şi numai dacă:*

$$\begin{aligned} \delta_i g_{j\bar{k}} &= \delta_j g_{i\bar{k}}, \\ a'(L) = 0 &\Leftrightarrow a(L) = c \in \mathbb{R}, \\ g^{\bar{l}i}\dot{\partial}_i g_{j\bar{k}} &= a\delta_j\overline{(N^l_k)}, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

şi conjugatele.

Teorema 2.2.5. *Varietatea aproape complexă* $(T'M, G, J_2)$ *este aproape Kähler dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

$a = 0$ *şi* $\dot{\partial}_i g_{j\bar{k}} = 0;$

sau

$\delta_i g_{j\bar{k}} = \delta_j g_{i\bar{k}},\ \Theta^{\bar{k}}_{\bar{l}h} = 0,\ L^l_{ki}g_{l\bar{j}} = -\dot{\partial}_k\left(N^{\bar{l}}_{\bar{j}}\right)g_{i\bar{l}},\ \dfrac{a'}{2a}(\dot{\partial}_i L)g_{j\bar{k}} = -\dot{\partial}_i g_{j\bar{k}}\ ,$

şi conjugatele lor.

Teorema 2.2.6. *Varietatea* $(T'M, G, J_2)$ *este Kähler dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

$a = 0$ *şi* G *este pur hermitiană*;

sau

$L^l_{ki}g_{l\bar{j}} = 0,\ \dfrac{a'}{2a}(\dot{\partial}_i L)g_{j\bar{k}} = -\dot{\partial}_i g_{j\bar{k}},$

şi conjugatele lor.

Corolarul 2.2.2. *Structura* $(T'M, G, J_1, J_2, J_3)$ *este hiper-Kähler dacă şi numai dacă* (M, F) *este o varietate Berwald complexă,* $\Theta^i_{j\bar{k}} = 0$, $a' = 0$, G *este pur hermitiană, şi una din următoarele condiţii este satisfăcută:*

i) $a = 0$,

ii) $L^l_{ki} g_{l\bar{j}} = 0$.

În continuare vrem să evidenţiem conexiuni liniare compatibile cu o structură bicomplexă comutativă.

Definiţia 2.2.1. *O conexiune liniară* D *pe* $T'M$ *se numeşte* metrică bicomplexă comutativă *în raport cu metrica* G *şi cu structura bicomplexă comutativă* (J_1, J_2, J_3) *dacă:*

$$DJ_i = 0,\ i = 1, 2, 3; \quad \text{şi } DG = 0.$$

Familia generală a conexiunilor liniare D compatibilă cu o metrică G, conform [Mu3], este $D_X Y = \check{D}_X Y + \frac{1}{2} g^{-1} (\check{D}_X g)_Y$, unde $\check{D}$ este o conexiune liniară arbitrară.

Considerăm următoarele transformări de conexiune:

$$\begin{aligned}
\check{D}_X Y \overset{\mathcal{T}_1}{\to} D^1_X Y &= \check{D}_X Y + \frac{1}{2} J_1 \check{D}_X (J_1 Y), \\
\check{D}_X Y \overset{\mathcal{T}_2}{\to} D^2_X Y &= \check{D}_X Y + \frac{1}{2} J_2 \check{D}_X (J_2 Y), \\
\check{D}_X Y \overset{\mathcal{T}_3}{\to} D^3_X Y &= \check{D}_X Y - \frac{1}{2} J_3 \check{D}_X (J_3 Y), \\
\check{D}_X Y \overset{\mathcal{T}_4}{\to} D^4_X Y &= \check{D}_X Y + \frac{1}{2} (\check{D}_X g)_Y,
\end{aligned}$$

unde $(\check{D}_X g)_Y$ este o $1-$formă definită în felul următor: $(\check{D}_X g)_Y Z = (\check{D}_X g)(Y, Z)$. În mod clar $D^i_X J_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ X \in T_C(T'M)$.

Teorema 2.2.7. *Conexiunea liniară*

$$D_X Y = (\tilde{D} D^4)_X Y, \quad \mathcal{X}, Y \in T_C(T'M)$$

sau echivalent

$$\begin{aligned}
D_X Y = &\ \frac{1}{4} \left\{ \check{D}_X Y - J_1(\check{D}_X J_1 Y) - J_2(\check{D}_X J_2 Y) + J_3(\check{D}_X J_3 Y) \right\} + \\
&+ \frac{1}{8} \left\{ G^{-1} (\check{D}_X G)_Y - G^{-1} J_1 (\check{D}_X G)_{J_1 Y} - G^{-1} J_2 (\check{D}_X G)_{J_2 Y} + \right. \\
&\left. + G^{-1} J_3 (\check{D}_X G)_{J_3 Y} \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

este o conexiune metrică comutativ bicomplexă, unde $\check{D}$ *este o conexiune arbitrară pe* $T'M$.

Teorema 2.2.8. *Dacă ∇ este conexiunea Levi-Civita definită de metrica G, atunci conexiunea*

$$\hat{D}_X Y = \frac{1}{4}\left\{\nabla_X Y - J_1(\nabla_X J_1 Y) - J_2(\nabla_X J_2 Y) + J_3(\nabla_X J_3 Y)\right\} \tag{2.2.8}$$

are următoarele proprietăţi:

a) $\hat{D}_X G = 0$, $\hat{D}_X J_i = 0, i = 1,2,3, X \in T_C(T'M)$;

b) $\hat{D}$ *este unic determinată de structura bicomplexă comutativă.*

Expresiile locale a conexiunii $\hat{D}$ sunt:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{\delta_k}\delta_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}g^{\bar{m}i}(\frac{\delta g_{j\bar{m}}}{\delta z^k} + \frac{\delta g_{k\bar{m}}}{\delta z^j}) + g^{\bar{l}i}\delta_k g_{j\bar{l}}\right)\delta_i + \frac{1}{4a}g^{\bar{l}i}(\delta_{\bar{j}}g_{k\bar{l}} - \delta_{\bar{l}}g_{k\bar{j}})\dot{\partial}_i \\
\hat{D}_{\delta_k}\dot{\partial}_j &= \frac{1}{4}g^{\bar{l}i}(g_{j\bar{h}}\delta_k\overline{N_l^h} + \dot{\partial}_j g_{k\bar{l}})\delta_i + \frac{1}{2}\left(g^{\bar{l}i}\delta_k g_{j\bar{l}} + \frac{1}{2}g^{\bar{m}i}(\frac{\delta g_{j\bar{m}}}{\delta z^k} + \frac{\delta g_{k\bar{m}}}{\delta z^j})\right)\dot{\partial}_i \\
\hat{D}_{\delta_k}\delta_{\bar{j}} &= \frac{1}{4}g^{\bar{l}i}(\delta_{\bar{j}}g_{k\bar{l}} - \delta_{\bar{l}}g_{k\bar{j}})\delta_i + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}g^{\bar{l}i}(g_{h\bar{j}}\delta_{\bar{l}}N_k^h - \dot{\partial}_{\bar{j}}g_{k\bar{l}}) + g^{\bar{l}i}(g_{h\bar{l}}\delta_{\bar{j}}N_k^h - \dot{\partial}_{\bar{l}}g_{k\bar{j}})\right)\dot{\partial}_i + \\
&+\frac{1}{4}g^{\bar{i}l}(\delta_k g_{l\bar{j}} - \delta_l g_{k\bar{j}})\delta_{\bar{i}} - \frac{1}{4}g^{\bar{i}l}(g_{l\bar{h}}\delta_k\overline{N_j^h} - \dot{\partial}_l g_{k\bar{j}})\dot{\partial}_{\bar{i}} \\
\hat{D}_{\delta_k}\dot{\partial}_{\bar{j}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}g^{\bar{i}l}(g_{l\bar{h}}\delta_k\overline{N}_j^h + \dot{\partial}_j g_{k\bar{j}}) - \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}(g_{h\bar{j}}\delta_{\bar{l}}N_l^h - \dot{\partial}_{\bar{j}}g_{k\bar{l}})\right)\delta_i + \\
&+\frac{1}{4}g^{\bar{l}i}(\delta_{\bar{k}}g_{j\bar{l}} - \delta_{\bar{l}}g_{j\bar{k}})\dot{\partial}_{\bar{i}} \\
\hat{D}_{\dot{\partial}_k}\delta_j &= \frac{1}{4}\left(g^{\bar{l}i}(g_{k\bar{h}}\delta_j\overline{N_l^h} + \dot{\partial}_j g_{j\bar{l}}) + g^{\bar{m}i}(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial\eta^k} + \frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial\eta^j}) - \frac{a'}{a}\frac{\partial L}{\partial\eta^k}\delta_j^i\right)\delta_i - \\
&-\frac{1}{2}g^{\bar{l}i}\dot{\partial}_k g_{j\bar{h}}\overline{N_l^h}\dot{\partial}_i \\
\hat{D}_{\dot{\partial}_k}\dot{\partial}_j &= \frac{1}{2}\left(g^{\bar{l}i}\dot{\partial}_k g_{j\bar{h}}\overline{N_l^h} + \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}(g_{k\bar{h}}\delta_j\overline{N_l^h} + \dot{\partial}_k g_{j\bar{l}})\right)\delta_i + \frac{1}{4}\left(g^{\bar{m}i}(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial\eta^k} + \frac{\partial g_{k\bar{m}}}{\partial\eta^j}) + \right. \\
&\left. +\frac{a'}{a}\frac{\partial L}{\partial\eta^k}\delta_j^i\right)\dot{\partial}_i \\
\hat{D}_{\dot{\partial}_k}\delta_{\bar{j}} &= -\frac{1}{4}g^{\bar{i}l}(g_{j\bar{h}}\delta_l\overline{N_k^h} - \dot{\partial}_j g_{l\bar{k}})\delta_{\bar{i}} - \frac{1}{2}\dot{\partial}_k\overline{N_j^i}\dot{\partial}_{\bar{i}} \\
\hat{D}_{\dot{\partial}_k}\dot{\partial}_{\bar{j}} &= \frac{a}{2}\dot{\partial}_k\overline{N_j^i}\delta_{\bar{i}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}g^{\bar{i}l}(g_{k\bar{h}}\delta_l\overline{N_k^h} - \partial_k g_{l\bar{j}}) + \frac{a'}{2a}\frac{\partial L}{\partial\eta^k}\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}}\right)\dot{\partial}_{\bar{i}}.
\end{aligned}$$

2.2.2 *Conexiunea Levi-Civita și metrica pur hermitiană*

În lucrările [Al-Mu1, Al-Mu2] sunt studiate ecuaţiile Einstein pentru câmpul slab gravitaţional şi pentru versiunea complexă a metricii Schwarzschield. Acest studiu se bazează pe scrierea ecuaţiilor Einstein complexe pentru aceste metrici în raport cu conexiunea Chern-Finsler, care este o conexiune metrică cu torsiune nenulă. Această teorie se poate aplica dacă sunt impuse câteva restricţii, numite legi de conservare, deoarece conexiunea utilizată are torsiunea nenulă.

O teorie alternativă la aceasta este prezentată în cele ce urmează. Extindem structura metrică a câmpului slab gravitaţional la una de pe fibratul olomorf tangent $T'M$ al unei varietăţi complexe $M.$ Apoi considerăm conexiunea Levi-Civita, (care este metrică şi fără torsiune), asociată acestei metrici liftate. Din acest motiv ecuaţiile Einstein în raport cu conexiunea Levi-Civita păstrează forma lor clasică. În cazul particular al spaţiului vid, ecuaţiile Einstein complexe se reduc la anularea tensorului Ricci complex. De fapt, ideea pare simplă, dar prima problemă este găsirea liftului potrivit. Apoi problematica este scrierea curburii şi a tensorilor Ricci pe $T'M.$ Pentru aceasta ne întoarcem la reperul adaptat al conexiunii Chern-Finsler, şi exprimăm totul în aceste repere adaptate complexe. O idee similară a fost aplicată de M. Anastasiei şi H. Shimada, [An-Sh2]. În final, propunem rezolvarea acestor ecuaţii Einstein complexe, pentru cazul particular al metricii slab gravitaţionale.

Considerăm un spaţiu Finsler complex (M, F), unde M este o varietate complexă de dimensiune $n.$ Pe $T_C(T'M)$ coordonatele în hărţile locale vor fi notate cu $u = (z^k, \eta^a)$, $k, a = 1, \dots n.$ De-a lungul acestui capitol, indicii $i, j, k, \dots$ şi $a, b, c, \dots$ merg de la $\{1, \dots, n\}$, de unde cei din al doilea grup noteză obiecte geometrice în fibrele verticale locale a fibratului tangent olomorf.

Fie N o $(c.n.c)$ pe $T'M.$ Se numeşte $h-$***metrică*** pe $T'M$ un $d-$tensor $h\mathcal{G} = g_{j\bar{k}}(z, \eta)$ $dz^j \otimes d\bar{z}^k$, cu $g_{j\bar{k}}(z, \eta) = \overline{g_{k\bar{j}}(z, \eta)}$, det $\|g_{j\bar{k}}(z, \eta)\| \neq 0.$ O $v-$***metrică*** pe $T'M$ este un $d-$tensor $v\mathcal{G} = h_{a\bar{b}}(z, \eta)\delta\eta^a \otimes \delta\bar{\eta}^b$, cu $h_{a\bar{b}}(z, \eta) = \overline{h_{b\bar{a}}(z, \eta)}$, det $\|h_{a\bar{a}}(z, \eta)\| \neq 0.$ De aici găsim noţiunea de $(h, v)-$***metrică*** pe $T'M,$ care este un câmp tensorial $\mathcal{G} = h\mathcal{G} + v\mathcal{G}.$ Deci, această metrică poate fi scrisă în felul următor:

$$\mathcal{G}(z, \eta) = g_{j\bar{k}}(z, \eta)dz^j \otimes d\bar{z}^k + h_{a\bar{b}}(z, \eta)\delta\eta^a \otimes \delta\bar{\eta}^b. \tag{2.2.9}$$

Notăm liftul Sasaki din (1.1.9) cu

$$G_S = g_{j\bar{k}}dz^j \otimes d\bar{z}^k + \delta^j_a \overline{\delta^k_b} g_{j\bar{k}}(z, \eta)\delta\eta^a \otimes \delta\bar{\eta}^b. \tag{2.2.10}$$

Introducem o generalizare a liftului (2.2.10), care pe rândul lui va fi o $(h, v)-$metrică pe $T_C(T'M)$:

$$G(z,\eta) = g_{j\bar{k}}(z,\eta)dz^j \otimes d\bar{z}^k + h_{a\bar{b}}(z,\eta)\delta\eta^a \otimes \delta\bar{\eta}^b, \qquad (2.2.11)$$

unde $g_{j\bar{k}}$ este tensorul fundamental a spaţiul Finsler complex (M,F), şi $h_{a\bar{b}}$ un $d-$tensor arbitrar de tip $(0,2)$.

Rezultate din acest capitol aparţin autorului, şi sunt prezentate în lucrarea [Sz4].

Pornind de la definiţia standardă a unei conexiuni liniare complexe pe varietatea $T'M$, o $(c.l.c)$ ∇ poate fi descompusă în suma $\nabla = \nabla' + \nabla''$, unde $\nabla' : \Gamma(T_C(T'M)) \to \Gamma(T_C(T'M) \otimes T'(T'^*M))$ şi $\nabla'' : \Gamma(T_C(T'M)) \to \Gamma(T_C(T'M) \otimes T''(T'^*M))$, care pot fi descompuse în

$$\nabla' = \nabla'^h + \nabla'^v \text{ şi } \nabla'' = \nabla''^h + \nabla''^v.$$

Dorim să determinăm o conexiune simetrică ∇ cu $\nabla G = 0$.

Teorema 2.2.9. *Varietatea hermitiană $(T'M,G)$ admite o unică $(c.l.c)$, care este simetrică şi metrică în raport cu G, dată de (2.2.9). Aceasta se numeşte conexiunea Levi-Civita de pe $T'M$, având coeficienţi locali nenuli exprimaţi în reperul adaptat $\{\delta_k, \dot{\partial}_a, \delta_{\bar{k}}, \dot{\partial}_{\bar{a}}\}$ prin:*

$$\begin{aligned}
\overset{1}{L}{}^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}(\delta_k g_{j\bar{l}} + \delta_j g_{k\bar{l}}); & \overset{2}{D}{}^c_{\bar{j}k} &= -\overset{4}{D}{}^c_{k\bar{j}} = \frac{1}{2}[\delta_{\bar{j}}N^c_k - h^{\bar{d}c}(\dot{\partial}_{\bar{d}}g_{k\bar{j}})];\\
\overset{2}{L}{}^c_{ak} &= \frac{1}{2}[h^{\bar{d}c}(\delta_k h_{a\bar{d}}) + \dot{\partial}_a N^c_k]; & \overset{2}{E}{}^c_{\bar{a}k} &= \frac{1}{2}h^{\bar{d}c}[(\dot{\partial}_{\bar{a}}N^e_k)h_{e\bar{d}} - (\dot{\partial}_{\bar{d}}N^e_k)h_{e\bar{a}}];\\
\overset{3}{L}{}^i_{j\bar{k}} = \overset{1}{D}{}^i_{\bar{k}j} &= \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}(\delta_{\bar{k}}g_{j\bar{l}} - \delta_{\bar{l}}g_{j\bar{k}}); & \overset{2}{F}{}^c_{jb} &= \frac{1}{2}[h^{\bar{d}c}(\delta_j h_{a\bar{d}}) - \dot{\partial}_a N^c_j];\\
\overset{4}{L}{}^c_{a\bar{k}} = \overset{2}{H}{}^c_{\bar{k}a} &= \frac{1}{2}h^{\bar{d}c}[\delta_{\bar{k}}h_{a\bar{d}} - (\dot{\partial}_{\bar{d}}N^{\bar{e}}_{\bar{k}})h_{a\bar{e}}]; & \overset{1}{G}{}^i_{ab} &= \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}[(\dot{\partial}_b N^{\bar{d}}_{\bar{l}})h_{a\bar{d}} + (\dot{\partial}_a N^{\bar{d}}_{\bar{l}})h_{b\bar{d}}];\\
\overset{1}{C}{}^i_{ka} = \overset{1}{B}{}^i_{ak} &= \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}[\dot{\partial}_a g_{k\bar{l}} + (\delta_k N^{\bar{d}}_{\bar{l}})h_{a\bar{d}}]; & \overset{4}{H}{}^c_{j\bar{b}} &= -\frac{1}{2}h^{\bar{d}c}[(\dot{\partial}_{\bar{d}}N^e_j)h_{e\bar{b}} + (\dot{\partial}_{\bar{b}}N^e_j)h_{e\bar{d}}];\\
\overset{2}{C}{}^c_{ab} &= \frac{1}{2}h^{\bar{d}c}(\dot{\partial}_b h_{a\bar{d}} + \dot{\partial}_a h_{b\bar{d}}); & \overset{1}{M}{}^i_{\bar{a}b} &= \overset{3}{M}{}^i_{b\bar{a}} = \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}[(\dot{\partial}_{\bar{a}}N^{\bar{d}}_{\bar{l}})h_{b\bar{d}} - \delta_{\bar{l}}h_{b\bar{a}}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{3}{C}{}^i_{j\bar{b}} &= \overset{1}{E}{}^i_{\bar{a}j} = \frac{1}{2}g^{\bar{l}i}[\dot{\partial}_{\bar{b}}g_{j\bar{l}} - (\delta_{\bar{l}}N^d_j)h_{d\bar{b}}];\\
\overset{4}{C}{}^c_{a\bar{b}} &= \overset{2}{M}{}^c_{\bar{b}a} = \frac{1}{2}h^{\bar{d}c}(\dot{\partial}_{\bar{b}}h_{a\bar{d}} - \dot{\partial}_{\bar{d}}h_{a\bar{b}}), \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

şi conjugatele.

Această conexiune nu e nici $h-$ nici $v-$metrică.

Ca să studiem conexiunea Levi-Civita, putem să considerăm o conexiune similară, care ne ajută să exprimăm mai uşor proprietăţile lui ∇. Într-adevăr, fie $\widetilde{D}$ o $d-(c.l.c.)$ pe $T_C(T'M)$:

$$\begin{array}{llll} \widetilde{D}_{\delta_k}\delta_j = \overset{1}{L}{}^i_{jk}\delta_i; & \widetilde{D}_{\delta_k}\dot{\partial}_a = \overset{2}{L}{}^d_{ak}\dot{\partial}_d \ ; & \widetilde{D}_{\delta_k}\delta_{\bar{j}} = \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k}\delta_{\bar{i}} \ ; & \widetilde{D}_{\delta_k}\dot{\partial}_{\bar{a}} = \overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}k}\dot{\partial}_{\bar{d}} \\ \widetilde{D}_{\dot{\partial}_a}\delta_j = \overset{1}{C}{}^i_{ja}\delta_i; & \widetilde{D}_{\dot{\partial}_b}\dot{\partial}_a = \overset{2}{C}{}^d_{ab}\dot{\partial}_d \ ; & \widetilde{D}_{\dot{\partial}_a}\delta_{\bar{j}} = \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}a}\delta_{\bar{i}} \ ; & \widetilde{D}_{\dot{\partial}_b}\dot{\partial}_{\bar{a}} = \overset{4}{C}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}b}\dot{\partial}_{\bar{d}} \end{array} \tag{2.2.13}$$

şi conjugatele lor, unde coeficienţii locali ai conexiunii Levi-Civita sunt exprimaţi în (2.2.12).

Această $d-(c.l.c.)$ este metrică în raport cu G, adică $g_{j\bar{k}|m} = g_{j\bar{k}}|_d = g_{j\bar{k}|\bar{m}} = g_{j\bar{k}}|_{\bar{d}} = 0$, $h_{a\bar{b}|m} = h_{a\bar{b}}|_d = h_{a\bar{b}|\bar{m}} = h_{a\bar{b}}|_{\bar{d}} = 0$, unde cu $"_|"$, $"|"$, $"_{\bar{|}}"$, $"\bar{|}"$ sunt notate $h-$, $v-$, $\bar{h}-$ şi $\bar{v}-$derivatele covariante în raport cu $\widetilde{D}$.

Propoziţia 2.2.2. *Componentele nenule a torsiunii a $d-(c.l.c.)$ $\widetilde{D}$ sunt*

$$h\widetilde{\mathbb{T}}(\delta_{\bar{k}},\delta_j) = \widetilde{\tau}^i_{j\bar{k}}\delta_i; \quad v\widetilde{\mathbb{T}}(\delta_{\bar{k}},\delta_j) = \widetilde{\Theta}^d_{j\bar{k}}\dot{\partial}_d; \ h\widetilde{\mathbb{T}}(\dot{\partial}_{\bar{a}},\delta_j) = \widetilde{\Upsilon}^i_{j\bar{a}}\delta_i; \ h\widetilde{\mathbb{T}}(\dot{\partial}_a,\delta_j) = \widetilde{Q}^i_{ja}\delta_i;$$
$$v\widetilde{\mathbb{T}}(\dot{\partial}_{\bar{b}},\dot{\partial}_a) = \widetilde{\chi}^d_{a\bar{b}}\dot{\partial}_d; \quad v\widetilde{\mathbb{T}}(\dot{\partial}_{\bar{a}},\delta_j) = \widetilde{\rho}^d_{j\bar{a}}\dot{\partial}_d; \ v\widetilde{\mathbb{T}}(\delta_{\bar{k}},\dot{\partial}_a) = \widetilde{\Sigma}^d_{a\bar{k}}\dot{\partial}_d; \ v\widetilde{\mathbb{T}}(\dot{\partial}_a,\delta_j) = \widetilde{P}^d_{ja}\dot{\partial}_d;$$

şi conjugatele, unde

$$\begin{array}{l} \widetilde{\tau}^i_{j\bar{k}} = \overset{3}{L}{}^i_{j\bar{k}}; \quad \widetilde{\Theta}^d_{j\bar{k}} = \delta_{\bar{k}}N^d_j; \ \ \widetilde{\Upsilon}^i_{j\bar{a}} = \overset{3}{C}{}^i_{j\bar{a}}; \ \ \widetilde{Q}^i_{ja} = \overset{1}{C}{}^i_{ja}; \\ \widetilde{\chi}^d_{a\bar{b}} = \overset{4}{C}{}^d_{a\bar{b}}; \quad \widetilde{\rho}^d_{j\bar{a}} = \dot{\partial}_{\bar{a}}N^d_j; \ \ \widetilde{\Sigma}^d_{b\bar{j}} = \overset{4}{L}{}^d_{b\bar{j}}; \ \ \widetilde{P}^d_{ja} = \dot{\partial}_b N^d_j - \overset{2}{L}{}^d_{jb}. \end{array} \tag{2.2.14}$$

Curbura lui $\widetilde{D}$ are douăzeci componente (vezi p.44 din [Mu1])

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^i_{jkh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\delta_h\overset{1}{L}{}^i_{jk} + \overset{1}{L}{}^m_{jk}\overset{1}{L}{}^i_{mh}\}; \\ \widetilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}kh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\delta_h\overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} + \overset{3}{L}{}^{\bar{m}}_{\bar{j}k}\overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{m}h}\}; \\ \widetilde{R}^i_{j\bar{k}h} &= \delta_h\overset{3}{L}{}^i_{j\bar{k}} - \delta_{\bar{k}}\overset{1}{L}{}^i_{jh} + \overset{3}{L}{}^m_{j\bar{k}}\overset{1}{L}{}^i_{mh} - \overset{3}{L}{}^i_{m\bar{k}}\overset{1}{L}{}^m_{jh} + (\delta_h N^{\bar{e}}_{\bar{k}})\overset{3}{C}{}^i_{j\bar{e}} - (\delta_{\bar{k}}N^e_h)\overset{1}{C}{}^i_{je}; \\ \widetilde{\Omega}^d_{akh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\delta_h\overset{2}{L}{}^i_{ak} + \overset{2}{L}{}^e_{ak}\overset{2}{L}{}^d_{eh}\}; \\ \widetilde{\Omega}^{\bar{d}}_{\bar{a}kh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\delta_h\overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}k} + \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{a}k}\overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{e}h}\}; \\ \widetilde{\Omega}^d_{a\bar{k}h} &= \delta_h\overset{4}{L}{}^d_{a\bar{k}} - \delta_{\bar{k}}\overset{2}{L}{}^d_{ah} + \overset{4}{L}{}^e_{a\bar{k}}\overset{2}{L}{}^d_{eh} - \overset{4}{L}{}^d_{e\bar{k}}\overset{2}{L}{}^e_{ah} + (\delta_h N^{\bar{e}}_{\bar{k}})\overset{4}{C}{}^d_{a\bar{e}} - (\delta_{\bar{k}}N^e_h)\overset{2}{C}{}^d_{ae}; \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}^i_{jkc} &= \dot{\partial}_c \overset{1}{L}{}^i_{jk} - \delta_k \overset{1}{C}{}^i_{jc} + \overset{1}{L}{}^m_{jk} \overset{1}{C}{}^i_{mc} - \overset{1}{L}{}^i_{mk} \overset{1}{C}{}^i_{jc} + (\dot{\partial}_c N^e_k) \overset{1}{C}{}^i_{ej};\\
\widetilde{\Pi}^{\bar{i}}_{\bar{j}kc} &= \dot{\partial}_c \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} - \delta_k \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}c} + \overset{3}{L}{}^m_{\bar{j}k} \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{mc} - \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{mk} \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}c} + (\dot{\partial}_c N^e_k) \overset{3}{C}{}^i_{e\bar{j}};\\
\widetilde{\Pi}^i_{j\bar{k}c} &= \dot{\partial}_c \overset{3}{L}{}^i_{j\bar{k}} - \delta_{\bar{k}} \overset{1}{C}{}^i_{jc} + \overset{3}{L}{}^m_{j\bar{k}} \overset{1}{C}{}^i_{mc} - \overset{3}{L}{}^i_{m\bar{k}} \overset{1}{C}{}^m_{jc} + (\dot{\partial}_c N^{\bar{e}}_{\bar{k}}) \overset{1}{C}{}^i_{j\bar{e}};\\
\widetilde{P}^d_{akc} &= \dot{\partial}_c \overset{2}{L}{}^d_{ak} - \delta_k \overset{2}{C}{}^d_{ac} + \overset{2}{L}{}^e_{ak} \overset{2}{C}{}^d_{ec} - \overset{2}{L}{}^d_{ek} \overset{2}{C}{}^e_{ac} + (\dot{\partial}_c N^e_k) \overset{2}{C}{}^d_{ae};\\
\widetilde{P}^{\bar{d}}_{\bar{a}kc} &= \dot{\partial}_c \overset{4}{L}{}^d_{\bar{a}k} - \delta_k \overset{4}{C}{}^d_{ac} + \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{a}k} \overset{4}{C}{}^{\bar{d}}_{\bar{e}c} - \overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{e}k} \overset{4}{C}{}^{\bar{e}}_{\bar{a}c} + (\dot{\partial}_c N^e_k) \overset{4}{C}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}e};\\
\widetilde{P}^d_{a\bar{k}c} &= \dot{\partial}_c \overset{4}{L}{}^d_{a\bar{k}} - \delta_{\bar{k}} \overset{2}{C}{}^d_{ac} + \overset{4}{L}{}^e_{a\bar{k}} \overset{2}{C}{}^d_{ec} - \overset{4}{L}{}^d_{e\bar{k}} \overset{2}{C}{}^e_{ac} + (\dot{\partial}_c N^{\bar{e}}_{\bar{k}}) \overset{4}{C}{}^d_{a\bar{e}};\\
\widetilde{\Theta}^i_{j\bar{b}h} &= \delta_h \overset{3}{C}{}^i_{j\bar{b}} - \dot{\partial}_{\bar{b}} \overset{1}{L}{}^i_{jh} + \overset{3}{C}{}^m_{j\bar{b}} \overset{1}{L}{}^i_{mh} - \overset{3}{C}{}^i_{m\bar{b}} \overset{1}{L}{}^m_{jh} - (\dot{\partial}_{\bar{b}} N^e_h) \overset{1}{C}{}^i_{je};\\
\widetilde{Q}^d_{a\bar{b}h} &= \delta_h \overset{4}{C}{}^d_{a\bar{b}} - \dot{\partial}_{\bar{b}} \overset{2}{L}{}^d_{ah} + \overset{4}{C}{}^e_{a\bar{b}} \overset{2}{L}{}^d_{eh} - \overset{4}{C}{}^d_{e\bar{b}} \overset{2}{L}{}^e_{ah} - (\dot{\partial}_{\bar{b}} N^e_h) \overset{2}{C}{}^d_{je};\\
\widetilde{\Xi}^i_{jbc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\dot{\partial}_c \overset{1}{C}{}^i_{jb} + \overset{1}{C}{}^m_{jb} \overset{1}{C}{}^i_{mc}\};\\
\widetilde{\Xi}^{\bar{i}}_{\bar{j}bc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\dot{\partial}_c \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}b} + \overset{3}{C}{}^{\bar{m}}_{\bar{j}b} \overset{3}{C}{}^{\bar{i}}_{\bar{m}c}\};\\
\widetilde{\Xi}^i_{j\bar{b}c} &= \dot{\partial}_c \overset{3}{C}{}^i_{j\bar{b}} - \dot{\partial}_{\bar{b}} \overset{1}{C}{}^i_{jc} + \overset{3}{C}{}^m_{j\bar{b}} \overset{1}{C}{}^i_{mc} - \overset{3}{C}{}^i_{m\bar{b}} \overset{1}{C}{}^m_{jc};\\
\widetilde{S}^d_{abc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\dot{\partial}_c \overset{2}{C}{}^d_{ab} + \overset{2}{C}{}^e_{ab} \overset{2}{C}{}^d_{ec}\};\\
\widetilde{S}^{\bar{d}}_{\bar{a}bc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\dot{\partial}_c \overset{4}{C}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}b} + \overset{4}{C}{}^{\bar{e}}_{\bar{a}b} \overset{4}{C}{}^{\bar{d}}_{\bar{e}c}\};\\
\widetilde{S}^d_{a\bar{b}c} &= \dot{\partial}_c \overset{4}{C}{}^d_{a\bar{b}} - \dot{\partial}_{\bar{b}} \overset{2}{C}{}^d_{ac} + \overset{4}{C}{}^e_{a\bar{b}} \overset{2}{C}{}^d_{ec} - \overset{4}{C}{}^d_{e\bar{b}} \overset{2}{C}{}^e_{ac}.
\end{aligned}
$$

Obiectele geometrice asociate lui G sunt în general complicate. Câteva simplificări apar când alegem cazuri particulare pentru $g_{j\bar{k}}$ şi pentru $h_{a\bar{b}}$. Aici ne rezumăm la o analiză mai detaliată a cazului particular al liftului G din (2.2.11):

$$G_H(z,\eta) = g_{j\bar{k}}(z) dz^j \otimes d\bar{z}^k + h_{a\bar{b}}(z) \delta\eta^a \otimes \delta\bar{\eta}^b. \tag{2.2.16}$$

Propoziţia 2.2.3. *Conexiunea Levi-Civita a metricii (2.2.16) este dată de următorii coe-*

ficienţi nenuli

$$\begin{aligned}
\overset{1}{L}{}^{i}_{jk} &= \frac{1}{2} g^{\bar{l}i}(\partial_k g_{j\bar{l}} + \partial_j g_{k\bar{l}}); \\
\overset{2}{L}{}^{c}_{ak} &= \frac{1}{2}[h^{\bar{d}c}(\partial_k h_{a\bar{d}}) + \dot{\partial}_a N^c_k]; \\
\overset{3}{L}{}^{i}_{j\bar{k}} &= \overset{1}{D}{}^{i}_{\bar{k}j} = \frac{1}{2} g^{\bar{l}i}(\partial_{\bar{k}} g_{j\bar{l}} - \partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}}); \\
\overset{4}{L}{}^{c}_{a\bar{k}} &= \overset{2}{H}{}^{c}_{\bar{k}a} = \frac{1}{2} h^{\bar{d}c}[\partial_{\bar{k}} h_{a\bar{d}} - (\dot{\partial}_{\bar{d}} N^{\bar{e}}_{\bar{k}}) h_{a\bar{e}}]; \\
\overset{2}{F}{}^{c}_{jb} &= \frac{1}{2}[h^{\bar{d}c}(\partial_j h_{a\bar{d}}) - \dot{\partial}_a N^c_j]; \\
\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{a}b} &= \overset{3}{M}{}^{i}_{b\bar{a}} = \frac{1}{2} g^{\bar{l}i}[(\dot{\partial}_{\bar{a}} N^{\bar{d}}_{\bar{l}}) h_{b\bar{d}} - \partial_{\bar{l}} h_{b\bar{a}}],
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

unde $\partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}$.

Curbura $d-(c.l.c.)$ $\widetilde{D}$ din (2.2.13) se reduce la

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^{i}_{jkh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\partial_h \overset{1}{L}{}^{i}_{jk} + \overset{1}{L}{}^{m}_{jk} \overset{1}{L}{}^{i}_{mh}\}; \\
\widetilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}kh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\partial_h \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}k} + \overset{3}{L}{}^{\bar{m}}_{\bar{j}k} \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{m}h}\}; \\
\widetilde{R}^{i}_{j\bar{k}h} &= \partial_h \overset{3}{L}{}^{i}_{j\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} \overset{1}{L}{}^{i}_{jh} + \overset{3}{L}{}^{m}_{j\bar{k}} \overset{1}{L}{}^{i}_{mh} - \overset{3}{L}{}^{i}_{m\bar{k}} \overset{1}{L}{}^{m}_{jh}; \\
\widetilde{\Omega}^{d}_{akh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\partial_h \overset{2}{L}{}^{i}_{ak} + \overset{2}{L}{}^{e}_{ak} \overset{2}{L}{}^{d}_{eh}\}; \\
\widetilde{\Omega}^{\bar{d}}_{\bar{a}kh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\partial_h \overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{a}k} + \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{a}k} \overset{4}{L}{}^{\bar{d}}_{\bar{e}h}\}; \\
\widetilde{\Omega}^{d}_{a\bar{k}h} &= \partial_h \overset{4}{L}{}^{d}_{a\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} \overset{2}{L}{}^{d}_{ah} + \overset{4}{L}{}^{e}_{a\bar{k}} \overset{2}{L}{}^{d}_{eh} - \overset{4}{L}{}^{d}_{e\bar{k}} \overset{2}{L}{}^{e}_{ah}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Fie $\mathbb{K}$ câmpul tensorial de curbură a conexiunii Levi-Civita ∇. Vom nota componentele lui cu aceleaşi litere ca în Aldea, [Al2], indexaţi cu două tipuri de indici. Din şaizeci de componente ale curburii, numai 21 vor fi nenule:

Propoziţia 2.2.4. *Fie* $\widetilde{D}$ $d-(c.l.c.)$ *pe* $T_C(T'M)$*, cu coeficienţii locali exprimaţi în (2.2.17). În raport cu reperul adaptat asociat* $(c.n.c)$ *Chern-Finsler, coeficienţii locali nenuli ai curburii a conexiunii Levi-Civita pe* $(T'M, G_H)$ *sunt*

$$
\begin{aligned}
R^{i}_{jkh} &= \widetilde{R}^{i}_{jkh};\\
R^{i}_{\bar{j}kh} &= \mathcal{A}_{hk}\{\overset{3}{L}{}^{i}_{k\bar{j}|h} + \overset{1}{L}{}^{m}_{kh}\overset{3}{L}{}^{i}_{m\bar{j}}\};\\
R^{\bar{i}}_{\bar{j}kh} &= \widetilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}kh};\\
R^{i}_{j\bar{k}h} &= \widetilde{R}^{i}_{j\bar{k}h} + \overset{3}{L}{}^{m}_{j\bar{k}}\overset{1}{L}{}^{i}_{mh} - \overset{1}{L}{}^{m}_{jh}\overset{3}{L}{}^{i}_{m\bar{k}} + \overset{3}{L}{}^{\bar{m}}_{\bar{k}j}\overset{3}{L}{}^{i}_{h\bar{m}};\\
R^{\bar{i}}_{j\bar{k}h} &= \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{\bar{k}j|h} + \overset{3}{L}{}^{\bar{i}}_{m\bar{k}}\overset{1}{L}{}^{m}_{jh};\\
\Omega^{d}_{akh} &= \widetilde{\Omega}^{d}_{akh};\\
\Omega^{d}_{a\bar{k}h} &= \widetilde{\Omega}^{d}_{a\bar{k}h};\\
\Pi^{d}_{jkc} &= \overset{2}{F}{}^{d}_{jc|h} - \overset{2}{F}{}^{d}_{jc}\overset{2}{L}{}^{e}_{ck} + (\dot{\partial}_{c}N^{e}_{k})\overset{2}{F}{}^{d}_{je};\\
\Pi^{d}_{\bar{j}kc} &= -\overset{4}{L}{}^{d}_{\bar{j}c|k} + \overset{3}{L}{}^{m}_{k\bar{j}}\overset{2}{F}{}^{d}_{mc} - \overset{4}{L}{}^{e}_{c\bar{j}}\overset{2}{L}{}^{d}_{ek} + (\dot{\partial}_{c}N^{e}_{k})\overset{4}{L}{}^{d}_{\bar{j}e};\\
\Pi^{d}_{j\bar{k}c} &= -\overset{2}{F}{}^{d}_{jc|\bar{k}} - \overset{2}{F}{}^{d}_{je}\overset{4}{L}{}^{e}_{c\bar{k}} + \overset{3}{L}{}^{\bar{m}}_{\bar{k}j}\overset{4}{L}{}^{d}_{c\bar{m}};\\
P^{i}_{\bar{a}kc} &= -\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{a}c|k} - \overset{2}{L}{}^{e}_{ck}\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{a}e} - \overset{1}{M}{}^{\bar{m}}_{c\bar{a}}\overset{3}{L}{}^{i}_{k\bar{m}} + (\dot{\partial}_{c}N^{e}_{k})\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{a}e};\\
P^{\bar{i}}_{\bar{a}kc} &= -\overset{1}{M}{}^{\bar{i}}_{c\bar{a}|k} - \overset{2}{L}{}^{e}_{ck}\overset{1}{M}{}^{\bar{i}}_{e\bar{a}} + (\dot{\partial}_{c}N^{e}_{k})\overset{1}{M}{}^{\bar{i}}_{e\bar{a}};\\
\Theta^{d}_{j\bar{b}h} &= -\overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{b}j}\overset{2}{E}{}^{d}_{\bar{e}h} - (\dot{\partial}_{\bar{b}}N^{e}_{h})\overset{2}{F}{}^{d}_{je}\\
Q^{i}_{a\bar{b}h} &= \overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{b}a|h} + \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{b}h}\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{e}a} + \overset{1}{M}{}^{\bar{m}}_{a\bar{b}}\overset{3}{L}{}^{i}_{h\bar{m}};\\
Q^{\bar{i}}_{a\bar{b}h} &= \overset{1}{M}{}^{\bar{i}}_{a\bar{b}|h} + \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{b}h}\overset{1}{M}{}^{\bar{i}}_{a\bar{e}};\\
\Xi^{i}_{\bar{j}bc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{b\bar{j}}\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{e}c}\};\\
\Xi^{i}_{j\bar{b}c} &= \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{b\bar{j}}\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{e}c} - \overset{2}{F}{}^{e}_{jc}\overset{1}{M}{}^{i}_{\bar{b}e};\\
\Xi^{d}_{j\bar{b}c} &= \overset{4}{L}{}^{\bar{e}}_{\bar{b}j}\overset{1}{M}{}^{d}_{c\bar{e}};\\
S^{d}_{\bar{a}bc} &= \mathcal{A}_{cb}\{\overset{1}{M}{}^{m}_{\bar{a}b}\overset{2}{F}{}^{d}_{mc} + \overset{1}{M}{}^{\bar{m}}_{b\bar{a}}\overset{4}{L}{}^{d}_{c\bar{m}}\};\\
S^{d}_{a\bar{b}c} &= \overset{1}{M}{}^{m}_{\bar{b}a}\overset{2}{F}{}^{d}_{mc} + \overset{1}{M}{}^{\bar{m}}_{a\bar{b}}\overset{4}{L}{}^{d}_{c\bar{m}}.
\end{aligned}
$$

Tensorii de curbură a lui Ricci sunt $\overset{H}{R}_{jk} := R^i_{jki};\ \overset{H}{R}_{\bar{j}k} := R^i_{\bar{j}ki};\ \overset{\bar{H}}{R}_{jk} := R^{\bar{\imath}}_{j\bar{\imath}k};\ \overset{V}{\Pi}_{\bar{j}k} := \Pi^d_{\bar{j}kd};\ \overset{H}{P}_{\bar{a}b} := P^i_{\bar{a}ib};\ \overset{V}{S}_{\bar{a}b} := S^d_{\bar{a}bd}$. De la care se obţin următorii scalari Ricci $r := g^{\bar{j}k}\overset{H}{R}_{\bar{j}k};\ \pi := g^{\bar{j}k}\overset{V}{\Pi}_{\bar{j}k};\ p := h^{\bar{a}b}\overset{H}{P}_{\bar{a}b};\ s := h^{\bar{a}b}\overset{V}{S}_{\bar{a}b}$.

Utilizând câteva idei din cazul real ([Mi-An]), o generalizare a ecuaţiilor Einstein clasice pentru un spaţiu Finsler complex $n-$dimensional este

$$\mathbf{R}_{\bar{\alpha}\beta} - \frac{1}{2}\rho \cdot \mathbf{G}_{\beta\bar{\alpha}} = \chi \mathbf{T}_{\bar{\alpha}\beta}. \tag{2.2.19}$$

Aici am standardizat notaţia şi am utilizat litere greceşti $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ în locul celor două tipuri de indici. Cu $\mathbf{R}_{\bar{\alpha}\beta}$ se notează componentele tensorului Ricci. ρ reprezintă curbura scalară Ricci. $\mathbf{G}_{\beta\bar{\alpha}}$ reprezintă tensorii metrici $g_{j\bar{k}}$ şi $h_{a\bar{b}}$, respectiv. χ este constanta universală, şi $\mathbf{T}_{\bar{\alpha}\beta}$ sunt tensorii energie-moment ([Al-Mu1]). Cum conexiunea Levi-Civita ∇ nu are torsiune, legile de conservare ale ecuaţiilor Einstein (2.2.19) sunt verificate, adică $\nabla_\alpha(\mathbf{R}^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\rho\delta^\alpha_\beta) = 0$, sau echivalent $\nabla_\alpha \mathbf{T}^\alpha_\beta = 0$.

Din acest motiv, ca şi în teoria clasică, are loc

Propoziţia 2.2.5. *În vid tensorii Ricci a conexiunii Levi-Civita de pe $T'M$ se anulează.*

2.3 Soluţiile ecuaţiilor Einstein complexe în vid pentru o metrică slab gravitaţională

În această secţiune scopul nostru este să rezolvăm ecuaţiile Einstein complexe în cazul spaţiului Finsler complex $2-$dimensional în vid, când tensorul metric fundamental este o metrică slab gravitaţională, [Al-Mu1]:

$$g_{j\bar{k}}(z, \eta) = \eta_{j\bar{k}} + p_{j\bar{k}}, \tag{2.3.1}$$

unde $(\eta_{j\bar{k}}) := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, este metrica Minkowski şi $(p_{j\bar{k}}) := \begin{pmatrix} \frac{2\Phi}{c^2} & i\frac{2\Phi}{c^2} \\ -i\frac{2\Phi}{c^2} & \frac{2\Phi}{c^2} \end{pmatrix}$ este o perturbare mică a lui $\eta_{j\bar{k}}$, şi Φ reprezintă un potenţial gravitaţional. În acest caz, Φ este o funcţie netedă cu valori reale în $T'M$ şi $\Phi \neq \frac{c^2}{2}$, unde $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$.

Teorema 2.3.1 ([Al-Mu4]). *Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex, cu $L = F^2$ din (2.3.2). Atunci (M, F) este ori un spaţiu pur hermitian, ori un spaţiu local Minkowski cu $\eta^1 =$*

$i\eta^2$, *având Lagrangianul*

$$L=\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)|\eta^1|^2-i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\eta^1\bar{\eta}^2+i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\eta^2\bar{\eta}^1-\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)|\eta^2|^2. \tag{2.3.2}$$

Prin calcule elementare, se obţin expresiile locale a $(c.l.c)$ Chern-Finsler unde $\Phi_k := \frac{\partial\Phi}{\partial z^k}$, $k=1,2$:

$$N_k^1=0;\quad N_k^2=\frac{-2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(\eta^1-i\eta^2)\Phi_k;\quad L_{jk}^1=0;$$
$$L_{1k}^2=-\frac{2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\Phi_k=iL_{2k}^2;\quad C_{jk}^1=0;\quad C_{jk}^2=0,\qquad j,k=1,2.$$

În continuare presupunem că (M,F) este un spaţiu pur hermitian, Metrica hermitiană corespunzătoare G_H dată în (2.2.16) rescrisă pentru metrica slab gravitaţională (2.3.1) va fi

$$G_{wg}(z,\eta)=\eta_{j\bar{k}}dz^j\otimes d\bar{z}^k+g_{j\bar{k}}\delta\eta^j\otimes\delta\bar{\eta}^k, \tag{2.3.3}$$

unde $(\eta_{j\bar{k}}) := \begin{pmatrix}1 & -i\\ i & -1\end{pmatrix}$, cu matricea inversă $(\eta^{\bar{k}j}) := \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{i}{2}\\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, şi

$$(g_{j\bar{k}}(z,\eta))_{j\bar{k}=1,2}=\begin{pmatrix}1+\frac{2\Phi}{c^2} & -i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\\ i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right) & -\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\end{pmatrix}\quad g^{\bar{k}j}(z,\eta))_{j\bar{k}=1,2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{i}{2} & -\frac{1+\frac{2\Phi}{c^2}}{2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\end{pmatrix}. \tag{2.3.4}$$

Ca să rezolvăm ecuaţiile Einstein în cazul particular a spaţiului Finsler, trebuie să exprimăm coeficienţii conexiunii Levi-Civita asociate metricii din (2.3.3). Coeficienţii căutaţi au următoarele expresii:

$$\overset{2}{L}{}_{jk}^2=\frac{-i^k}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(\Phi+(-1)^k\Phi_k);\qquad \overset{2}{F}{}_{jk}^2=\frac{-i^k}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(\Phi+\Phi_k); \tag{2.3.5}$$
$$\overset{1}{M}{}_{\bar{j}2}^1=\frac{-i^j}{c^2}(\Phi_{\bar{1}}+i\Phi_{\bar{2}});\qquad \overset{1}{M}{}_{\bar{j}2}^2=\frac{i^j}{c^2}(i\Phi_{\bar{1}}+\Phi_{\bar{2}}),\quad j,k=1,2.$$

Teorema 2.3.2. *Ecuaţiile Einstein complexe în vid corespunzătoare spaţiului Finsler complex* $2-$*dimensional* (M,F) *cu metrica Finsler complexă din (2.3.2) şi cu conexiunea*

Levi-Civita din (2.3.5) sunt

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{c^4\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\left(\Phi_1\Phi_{\bar{1}}+i\Phi_1\Phi_{\bar{2}}-i\Phi_2\Phi_{\bar{1}}-\Phi_2\Phi_{\bar{2}}\right)+\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\rho=0; \qquad (2.3.6)\\
&\frac{2i}{c^4\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\left(\Phi_1\Phi_{\bar{1}}+i\Phi_1\Phi_{\bar{2}}-i\Phi_2\Phi_{\bar{1}}-\Phi_2\Phi_{\bar{2}}\right)+i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\rho=0;\\
&\frac{i^{2-j}}{c^2}(\Phi_{1\bar{1}}+i\Phi_{1\bar{2}}-i\Phi_{2\bar{1}}-\Phi_{2\bar{2}})+\frac{2i}{c^4\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(1-i^{2-j})\left(\Phi_1\Phi_{\bar{1}}+\right.\\
&\left.+i\Phi_1\Phi_{\bar{2}}-i\Phi_2\Phi_{\bar{1}}-\Phi_2\Phi_{\bar{2}}\right)+(-i)^j\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\rho=0;\\
&\frac{i^{2-j}}{c^4\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(1-i)(\Phi+\Phi_1)\left(\Phi_{\bar{1}}-\Phi_{\bar{2}}\right)+(-i)^j\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\rho=0,\quad j=1,2,
\end{aligned}
$$

şi conjugatele lor, unde ρ reprezintă curbura scalară.

Propoziţia 2.3.1. *Funcţia cu valori reale pe $T'M$, $\Phi(z)=\Phi(z^1,\bar{z}^1,z^2,\bar{z}^2)$, este o soluţie ecuaţiilor Einsteni (2.3.6), dacă verifică următoarele condiţii:*

i) $\Phi_1=\Phi_2$;

ii) $\Phi_{\bar{1}}=\Phi_{\bar{2}}$.

Exemplul 2.3.1. Considerăm funcţia $\Phi(z)=\frac{c^2}{2}e^{i(z^1-\bar{z}^1)+i(z^2-\bar{z}^2)}$ pe $\mathbb{C}^2$. Impunând condiţia $\Phi>\frac{c^2}{2}$, introducem pe $D:=\{z\in\mathbb{C}^2|\text{Im}(z^1+z^2)>0\}$

o metrică Finsler complexă pur hermitiană cu ajutorul lui (2.3.2):

$$L=\left(1+e^Z\right)|\eta^1|^2-i\left(1-e^Z\right)\eta^1\bar{\eta}^2+i\left(1-e^Z\right)\eta^2\bar{\eta}^1-\left(1-e^Z\right)|\eta^2|^2,$$

unde $Z=i(z^1-\bar{z}^1)+i(z^2-\bar{z}^2)$. Cum Φ verifică condiţiile din Propoziţia 2.3.1, metrica de tip Sasaki definită în (2.3.3) cu ajutorul lui Φ, devine o soluţie pentru ecuaţiile lui Einstein în vid.

Menţionăm că pe lângă soluţiile oferite de Propoziţia 2.3.1, există şi alte soluţii:

Exemplul 2.3.2. Fie $\Phi(z)=\frac{c^2}{2}e^{-(z^1+\bar{z}^1)+z^2+\bar{z}^2}$ o funcţie cu valori reale pe $T'M$. Cerem, ca $\Phi>\frac{c^2}{2}$, şi introducem pe $D:=\{z\in\mathbb{C}^2|\ Re(z^2-z^1)>0\}$ o metrică Finsler complexă pur hermitiană cu ajutorul lui (2.3.2):

$$L=\left(1+e^Z\right)|\eta^1|^2-i\left(1-e^Z\right)\eta^1\bar{\eta}^2+i\left(1-e^Z\right)\eta^2\bar{\eta}^1-\left(1-e^Z\right)|\eta^2|^2,$$

unde $Z=-(z^1+\bar{z}^1)+z^2+\bar{z}^2$. Se poate verifica că funcţia Φ nu satisface cerinţele Propoziţiei 2.3.1, dar totuşi este o soluţie pentru sistemul (2.3.6). Deci metrica de tip Sasaki construită cu ajutorul ei devine o soluţie pentru ecuaţiile Einstein complexe.

Capitolul 3

Metrica Beil complexă

Metricile Beil reale au fost introduse pentru prima dată de R.G. Beil în scopul realizării unei teorii de unificare a câmpurilor gravitaţionale şi electromagnetice, [Be2]. Acestea au fost numite metrici Beil pe un spaţiu Finsler (real) (M, F), având tensorul metric $g_{ij}(x, y)$ de forma ${}^*g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x, y) + \sigma(x, y)B_i(x, y)B_j(x, y)$, unde $B_i(x, y) = g_{ij}(x, y)B^j(x, y)$, pentru $B^j(x, y)$ un câmp vectorial. R.G. Beil motivează alegerea făcută pentru metrica ${}^*g_{ij}(x, y)$ în felul următor: *"Cum în teoria mea de unificare cantitatea k, care corespunde cu σ din expresie, are legătură cu constanta gravitaţională, atunci o interpretare fizică posibilă a acestei teorii cu σ independentă de y, ar fi că gravitaţia în sine este dependentă de viteză."*

Utilitatea majoră a metricii Beil reale este evidenţiată în mai multe lucrări ştiinţifice, de pildă [An-Sh1, Ba-St-T, Mi-An, Mi3, Mi-H-Sh, Sa-Bl], etc. Scopul nostru este să dăm o descriere sistematică a spaţiilor Lagrange, Finsler şi Cartan, înzestrate cu metrici Beil complexe pe varietatea M,

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}(z, \eta) = g_{i\bar{j}}(z, \eta) + \sigma(z, \eta)B_i(z, \eta)B_{\bar{j}}(z, \eta), \tag{3.0.1}$$

cu $g_{i\bar{j}}(z, \eta)$ tensorul metric fundamental al spaţiului Finsler complex (M, F), şi $B_i(z, \eta) = g_{i\bar{j}}(z, \eta)\overline{B^j}(z, \eta)$, pentru $B^j(z, \eta)$ un câmp vectorial complex dat. Aceste spaţii sunt foarte interesante pentru aplicaţiile lor în fizica teoretică, având ca bază geometria spaţiului Finsler complex.

Toate rezultatele din acest capitol aparţin autorului şi sunt cuprinse în lucrările [Sz2, Sz3, Sz5, Sz6].

3.1 Spații Lagrange complexe cu metrica Beil

În această secţiune introducem metrica Beil complexă, adică o metrică complexă care este compusă din două părţi: prima parte este tensorul fundamental al spaţiului Finsler complex, iar partea a doua este produsul între o funcţie cu valori reale cu două câmpuri vectoriale, toate definite pe o varietate complexă dată. Primul pas în studiul nostru constă în analiza tensorului $^*g_{i\bar{j}}$, obţinând o condiţie echivalentă ca să fie o metrică Lagrange generalizată, apoi calculăm inversa şi determinantul ei.

Mai departe, studiem cazurile când noua metrică Lagrange generalizată devine slab regulată, respectiv regulată. În aceste cazuri, suntem în măsură să determinăm câte o conexiune neliniară complexă a spaţiului corespunzător. Un caz special al spaţiului Lagrange generalizat este spaţiul local Minkowski generalizat. Am reuşit să particularizăm metrica Beil complexă, ca să obţinem şi aici un tensor metric potrivit.

La finalul acestei secţiuni, construim un Lagrangian complex pornind de la o metrică Beil complexă.

Urmărind ideile din cazul real, [An-Sh1, An-Sh2, Ba-St-T], introducem o nouă clasă de metrici complexe. Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex $n-$dimensional, şi $g_{i\bar{j}}$ tensorul metric fundamental. Presupunem că (M, F) este înzestrat cu un câmp vectorial complex $B = B^k(z,\eta)\dot{\partial}_k$, şi fie $B_k(z,\eta)dz^k$ o $(1,0)-$formă diferenţială, cu $B^{\bar{m}} := \overline{B^m}$. Ridicarea şi coborârea indicilor se efectuează cu $(g^{\bar{j}k})$ şi $(g_{i\bar{j}})$, unde $g_{i\bar{j}}g^{\bar{j}k} = \delta_i^k$. În plus considerăm şi o funcţie cu valori reale $\sigma : T'M \to \mathbb{R}$, pe $T'M$.

Cu ajutorul acestor obiecte definim

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}(z,\eta) = g_{i\bar{j}}(z,\eta) + \sigma(z,\eta)B_i(z,\eta)B_{\bar{j}}(z,\eta). \tag{3.1.1}$$

Scopul nostru este să demonstrăm, că matricea $(\tilde{g}_{i\bar{j}})$, definită înainte, este nedegenerată şi $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ este un $d-$tensor hermitan de tip $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \bar{0} \\ 1 & \bar{1}\end{smallmatrix}\right)$.

Verificarea faptul că $(\tilde{g}_{i\bar{j}})$ sunt componentele unei matrici hermitiene şi că verifică legea de transformare $\tilde{g}'_{i\bar{j}} = \frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\frac{\partial \bar{z}'^l}{\partial \bar{z}^j}{}^*g_{k\bar{l}}$ se poate efectua prin calcule simple.

Propoziţia 3.1.1. *Pentru $d-$tensorul $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ din (3.1.1) are loc*

i) $\det(\tilde{g}_{i\bar{j}}) = (1+\sigma B^2)\det(g_{i\bar{j}})$;

ii) Dacă $1+\sigma\mathbb{B}^2 \neq 0$, $d-$tensorul $g_{i\bar{j}}$ este nedegenerat şi inversa lui are următoarea expresie $\tilde{g}^{\bar{j}i} = g^{\bar{j}i} - \frac{\sigma}{1+\sigma\mathbb{B}^2}B^iB^{\bar{j}}$, *unde $\mathbb{B}^2 = B_i B^i = g_{i\bar{j}} B^i B^{\bar{j}}$ (norma lui B în raport cu $g_{i\bar{j}}$).*

Teorema 3.1.1. *Perechea $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ este un spaţiu Lagrange complex generalizat, dacă şi numai dacă $1 + \sigma\mathbb{B}^2 \neq 0$.*

Acest rezultat implică faptul că $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ din (3.1.1) este este tensorul fundamental al unei $g.c.L$, dacă $1 + \sigma\mathbb{B}^2 \neq 0$, pe care îl numim *metrica Beil complexă,* prin analogie cu cazul real, [An-Sh1].

Lema 3.1.1. *Metrica Beil complexă $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ din (3.1.1) este o metrică $(g.c.L)$ pozitiv definită dacă şi numai dacă $1 + \sigma\mathbb{B}^2 > 0$.*

Exemplul cel mai simplu al unei metrici Lagrange generalizate este cel care provine dintr-o funcţie Lagrange sau Finsler de pe $T'M$.

În cele ce urmează prezentăm câteva subclase proprii de spaţii $(g.c.L)$, pentru care putem să determinăm o $(c.n.c.)$ în funcţie de tensorul metric $\tilde{g}_{i\bar{j}}$.

Propoziţia 3.1.2. *i) Dacă câmpul vectorial Liouville complex $\Gamma = \eta^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}$ este ortogonal lui B, atunci $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ este o metrică slab regulată şi $\hat{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$.*

ii) Dacă $B_i = B_i(z)$ şi $\sigma(z, \eta) = f(|\beta|^2)$, cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ o funcţie netedă, atunci $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ este o metrică slab regulată dacă şi numai dacă $1 + \varphi\mathbb{B}^2 \neq 0$, unde $\varphi(|\beta|^2) = f''|\beta|^4 + 3f'|\beta|^2 + f$, $f' := \frac{df}{d|\beta^2|}$, $f'' := \frac{d^2 f}{(d|\beta^2|)^2}$, şi în acest caz obţinem

$$\hat{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \varphi(z, \eta) B_i(z) B_{\bar{j}}(z). \tag{3.1.2}$$

Lema 3.1.2. *$(C.n.c.)$ Chern-Lagrange a spaţiului $(g.c.L)$ $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ cu metrică slab regulată dată de (3.1.2) are următoarea expresie:*

$$\begin{aligned} \overset{CL}{\widetilde{N}_j^k} &= \overset{CF}{N_j^k} + \hat{g}^{\bar{l}k}(fB_{\bar{l}}B_p)_{|j}\eta^p + B^k B_m \overset{CF}{N_j^m} \left[(1 - \tilde{\varphi}B^2)(f'|\beta|^2 + f) - \varphi\right] \\ &\quad + \hat{g}^{\bar{l}k}(\partial_j \dot{\partial}_{\bar{l}} f)|\beta|^2, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

unde $\varphi(|\beta|^2) = f''|\beta|^4 + 3f'|\beta|^2 + f$, $\tilde{\varphi} := \frac{\varphi}{\varphi B^2 + 1}$ şi "$_{|j}$" reprezintă derivata covariantă Chern-Finsler a spaţiului Finsler complex (M, F).

Propoziţia 3.1.3. *i) Dacă câmpul vectorial Liouville complex $\Gamma = \eta^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}$ este ortogonal lui B, atunci $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ este o metrică regulată, şi $\hat{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}}$.*

ii) Dacă $B_i = B_i(z)$ şi $\sigma(z, \eta) = f(|\beta|^2)$, cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ o funcţie netedă, atunci $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ este o metrică regulată dacă şi numai dacă $f = c \in \mathbb{R}$ şi $1 + \varphi\mathbb{B}^2 \neq 0$. Astfel are loc,

$$\hat{g}_{i\bar{j}} = \tilde{g}_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + cB_i(z)B_{\bar{j}}(z). \tag{3.1.4}$$

Ca o consecinţă a acestei propoziţii şi a Lemei 3.1.2 avem,

Lema 3.1.3. $(C.n.c.)$ *Chern-Lagrange a spaţiului* $(g.c.L)$ $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ *cu metrică regulată dată de Propoziţia 3.1.3 cazul* ii) *are următoarea expresie:*

$$\overset{CL}{\widetilde{N}_j^k} = \overset{CF}{N_j^k} + c\tilde{g}^{\bar{\imath}k}(B_{\bar{\imath}}B_p)_{|j}\eta^p - \frac{c^2B^2}{cB^2+1}B^kB_m\overset{CF}{N_j^m} \tag{3.1.5}$$

unde $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ *este exprimat în (3.1.1) şi "$_{|j}$" reprezintă derivata covariantă Chern-Finsler a spaţiului Finsler complex* (M, F).

O condiţie suficientă ca spaţiul $(g.c.L)$ $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ să fie local Minkowski este prezentată în continuare:

Propoziţia 3.1.4. *Fie* $(g.c.L)$ $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ *un spaţiu* $(g.c.L)$ *cu metrica Beil complexă (3.1.1). Dacă metrica Finsler complexă* $g_{i\bar{j}}$ *este local Minkowski (adică există hărţi locale pe* $T'M$ *în care* $g_{i\bar{j}}$ *depinde numai de* η*), şi* $\partial_k(\sigma B_iB_{\bar{m}}) = 0,$ *atunci* $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ *este un spaţiu* $(g.c.L)$ *local Minkowski.*

3.2 Spaţii Finsler complexe cu metrica Beil

În secţiunea anterioară am introdus metrica Beil complexă şi am studiat în ce condiţii devine ea o metrică Lagrange generalizată. Continuând ideea clasificării, în cele ce urmează vrem să vedem în ce condiţii metrica Beil este tensorul metric al unui spaţiu Finsler complex.

La început dăm condiţii necesare şi suficiente pentru care tensorul (3.1.1) să fie un tensor metric al unui spaţiu Finsler complex (Teorema 3.2.1). Ca urmare putem să construim geometria acestor noi spaţii, adică să exprimăm obiectele principale ale geometriei corespunzătoare: conexiunea Chern-Finsler, curbura olomorfă, condiţiile Kähler, Berwald, şi proiectiv echivalenţa înte cei doi Lagrangieni.

Mai mult decât atât, scopul nostru este să arătăm, că această tehnică de abordare poate să aibă şi interpretare fizică. Ca să atingem acest obiectiv, am găsit o aplicaţie a metricii date în (3.1.1). În acest caz, s-a construit Lagrangianul unei metrici Beil complexe provenită dintr-o metrică slab gravitaţională perturbată de un potenţial electromagnetic. Rezolvând problema variaţională asociată acestui Lagrangian, regăsim $(c.l.c.)$ Chern-Finsler (Teorema 3.2.5). Geodezicele complexe corespunzătoare metricii Beil complexe sunt date în Teorema 3.2.6.

Teorema 3.2.1. *Metrica Beil complexă din (3.1.1) este tensorul metric fundamental al unui spaţiu Finsler complex $(M, \widetilde{F})$ dacă şi numai dacă următorul sistem de ecuaţii este satisfăcut:*

$$(\dot{\partial}_k\sigma)B_iB_{\bar{j}} + \sigma(\dot{\partial}_kB_i \cdot B_{\bar{j}} + \dot{\partial}_kB_{\bar{j}} \cdot B_i) = (\dot{\partial}_i\sigma)B_kB_{\bar{j}} + \sigma(\dot{\partial}_iB_k \cdot B_{\bar{j}} + \dot{\partial}_iB_{\bar{j}} \cdot B_k);$$
$$(\dot{\partial}_k\sigma)B_iB_{\bar{j}}\eta^k + \sigma(\dot{\partial}_kB_i \cdot B_{\bar{j}} + \dot{\partial}_kB_{\bar{j}} \cdot B_i)\eta^k = 0. \tag{3.2.1}$$

În acest caz, metrica Finsler complexă asociată este

$$\widetilde{F} = \sqrt{F + \sigma(z, \eta)|\beta|^2}. \tag{3.2.2}$$

Dacă condiţiile $(3.2.1)$ sunt verificate, atunci pentru $B_i = B_i(z)$ şi $\sigma = L$, a doua relaţie din (3.2.1) se reduce la $LB_iB_{\bar{j}} = 0$, care nu este o identitate pentru orice B_i. Deci putem să spunem, că $\tilde{g}_{i\bar{j}}$ în general nu este reductibil la o metrică Finsler complexă.

Următorul caz particular verifică condiţiile Teoremei anterioare:

Propoziţia 3.2.1. *Dacă $B_i = B_i(z)$ şi $\sigma = \sigma(z) \geq -\frac{F^2}{|\beta|^2}$, atunci $(M, \tilde{g}_{i\bar{j}})$ devine un spaţiu Finsler complex, cu metrica*

$$\widetilde{F}^2 = F^2 + \sigma(z)|\beta|^2, \tag{3.2.3}$$

unde $\beta = B_i(z)\eta^i$.

De-a lungul acestui subcapitol vom lucra cu următoarele ipoteze $B_i = B_i(z)$ şi $\sigma = \sigma(z) \geq 0$. În aceste condiţii metrica Beil complexă va fi de forma

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}(z, \eta) = g_{i\bar{j}}(z, \eta) + \sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z). \tag{3.2.4}$$

În aceste condiţii putem să demonstrăm că B^i, $\mathbb{B}^2$ şi $\widetilde{\sigma}$ sunt $(2, 0)-$omogene în η.

Exemplul 3.2.1. Dacă $F(z, \eta) = mc\sqrt{\gamma_{i\bar{j}}(z)\eta^i\bar{\eta}^j}$, $B_i(z) = A_i(z)$ şi $\sigma(z) = \frac{e}{m}$, unde $m,\ c,\ e$ sunt scalarii reali bine cunoscuţi, obţinem un model al electrodinamicii complexe.

Teorema 3.2.2. *Coordonatele locale a $(c.n.c.)$ Chern-Finsler asociate spaţiului Finsler complex $(M, \widetilde{F})$, $\widetilde{N}^i_j = \tilde{g}^{\bar{m}i}\frac{\partial\tilde{g}_{p\bar{m}}}{\partial z^j}\eta^p$, au expresia*

$$\widetilde{N}^i_j = N^i_j + A^i_j, \tag{3.2.5}$$

unde N^i_j este $(c.n.c)$ a spaţiului Finsler (M, F),

$$A^i_j = \tilde{g}^{\bar{m}i}(\sigma B_pB_{\bar{m}})_{|j}\eta^p, \tag{3.2.6}$$

A^i_j definit în (3.2.6) este un $d-$tensor $(1, 0)-$omogen în η.

În spaţiul Finsler complex $(M,\widetilde{F})$ reperul orizontal adaptat va fi notat cu $\tilde{\delta}_k := \partial_k - \widetilde{N}_k^m \dot{\partial}_m = \delta_k - A_k^m \dot{\partial}_m$.

Propoziţia 3.2.2. *În spaţiul Finsler complex $(M,\widetilde{F})$, cu $\widetilde{F}$ dată în (3.2.3), coeficienţii locali a $(c.l.c.)$ Chern-Finsler $\widetilde{C}\Gamma$ sunt*

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^i_{jk} &= L^i_{jk} + \dot{\partial}_j A^i_k;\\ \widetilde{C}^i_{jk} &= C^i_{jk} - \widetilde{\sigma} B^i B^{\bar{m}} C_{j\bar{m}k}.\end{aligned} \qquad (3.2.7)$$

Ca să evaluăm torsiunile şi curburile lui $\widetilde{C}\Gamma$, notăm cu $\Lambda^i_{jk} = \dot{\partial}_j A^i_k$ şi cu $\tilde{\Lambda}^i_{jk} = -\widetilde{\sigma} B^{\bar{m}} B^i C_{j\bar{m}k}$.

Componenetele nenule a torsiunii $N-(c.l.c.)$ $\widetilde{C}\Gamma$ sunt următoarele

$$\begin{aligned}\widetilde{T}^i_{jk} = T^i_{jk} + \Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj};\quad \widetilde{Q}^i_{j\bar{k}} = C^i_{j\bar{k}} + \tilde{\Lambda}^i_{j\bar{k}},\\ \widetilde{\Theta}^i_{j\bar{k}} = \Theta^i_{j\bar{k}} - \rho^i_{j\bar{p}} N^{\bar{p}}_{\bar{k}} + \widetilde{\delta}_{\bar{k}} A^i_j;\quad \widetilde{\rho}^i_{j\bar{k}} = \rho^i_{j\bar{k}} + \dot{\partial}_{\bar{k}} A^i_j,\end{aligned} \qquad (3.2.8)$$

unde $T^i_{jk},\ \Theta^i_{j\bar{k}}$ şi $\rho^i_{j\bar{k}}$ sunt expresiile locale a torsiunii asociate $(c.l.c.)$ Chern-Finsler pe (M,F) descrise în (1.1.12).

Componentele nenule a curburii corespunzătoare lui $\widetilde{C}\Gamma$ sunt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^i_{j\bar{k}h} &= R^i_{j\bar{k}h} - \tilde{\delta}_{\bar{k}}\Lambda^i_{jh} + A^{\bar{p}}_{\bar{k}} \cdot \dot{\partial}_{\bar{p}} L^i_{jh} - C^i_{jl}(\delta_{\bar{k}} A^l_h - A^{\bar{p}}_{\bar{k}} \cdot \dot{\partial}_{\bar{p}} N^l_h) - \tilde{\delta}_{\bar{k}} \widetilde{N}^l_h \cdot \tilde{\Lambda}^i_{jl};\\
\widetilde{P}^i_{j\bar{k}h} &= P^i_{j\bar{k}h} - S^i_{j\bar{p}h} A^{\bar{p}}_{\bar{k}} - \tilde{\delta}_{\bar{k}} \tilde{\Lambda}^i_{jh};\\
\widetilde{Q}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{k}h} &= Q^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{k}h} + \dot{\partial}_h \Lambda^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{k}} + \dot{\partial}_h A^{\bar{l}}_{\bar{k}} \cdot C^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{l}} + \dot{\partial}_h \widetilde{N}^{\bar{l}}_{\bar{k}} \cdot \tilde{\Lambda}^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{l}};\\
\widetilde{S}^i_{j\bar{k}h} &= S^i_{j\bar{k}h} - \dot{\partial}_{\bar{k}} \tilde{\Lambda}^i_{jh},
\end{aligned}$$

unde $R^i_{j\bar{k}h},\ P^i_{j\bar{k}h},\ Q^{\bar{\imath}}_{\bar{\jmath}\bar{k}h}$ şi $S^i_{j\bar{k}h}$ sunt componentele curburii lui $C\Gamma$.

Teorema 3.2.3. *Curbura olomorfă e în direcţia lui η a lui $\widetilde{C}\Gamma$ este*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\widetilde{F}}(z,\eta) &= \left(1 - \frac{\sigma|\beta|^2}{\widetilde{L}^2}\right)\mathcal{K}_F + \frac{2}{L^2}\left(1 - \frac{\sigma|\beta|^2}{\widetilde{L}^2}\right)\cdot\\ &\cdot\left[(\dot{\partial}_{\bar{p}}\widetilde{N}^l_0)A^{\bar{p}}_0\eta_l - (\delta_{\bar{0}}A^l_p)\eta^p\eta_l - \sigma\bar{\beta}B_l(\tilde{\delta}_{\bar{0}}\widetilde{N}^l_p)\bar{\eta}^p\right].\end{aligned}$$

Exemplul 3.2.2. Pentru $z,\eta \in \mathbb{C}^n$ notăm $|z|^2 := \sum_{k=1}^n z^k \bar{z}^k,\ < z,\eta > := \sum_{k=1}^n z^k \bar{\eta}^k$, şi considerăm *metrica Bergman*

$$L := \frac{|\eta|^2 - |z|^2|\eta|^2 + < z,\eta > \overline{< z,\eta >}}{(1-|z|^2)^2},$$

definită pe $\Delta^n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Tensorul metric fundamental al lui (M, L) este $g_{j\bar{k}} = \frac{1}{1-|z|^2}(\delta_{j\bar{k}} + \frac{\bar{z}^j z^k}{1-|z|^2})$, cu inversa $g^{\bar{k}j} = (1 - |z|^2)(\delta^{\bar{k}j} - \bar{z}^k z^j)$. Această metrică este Kähler pur hermitiană, de curbură olomorfă constantă egală cu -4, şi expresiile locale a $(c.n.c.)$ Chern-Finsler sunt: $N_k^j = \frac{1}{1-|z|^2}(\delta_k^j \sum_{l=1}^n \bar{z}^l \eta^l + \bar{z}^k \eta^j)$. Ca să obţinem un alt exemplu de metrică Beil complexă, alegem $B_k = \frac{\bar{z}^k}{1-|z|^2}$ şi $\sigma = -1$. Printr-un calcul direct, deducem $\widetilde{L} = L + \sigma B_j B_{\bar{k}} \eta^j \eta^k = \frac{|\eta^2|}{1-|z|^2}$; şi$\tilde{g}_{j\bar{k}} = \frac{1}{1-|z|^2}\delta_{j\bar{k}}$; $\tilde{g}^{\bar{k}j} = (1 - |z|^2)\delta^{\bar{k}j}$ iar $(c.n.c.)$ Chern-Finsler asociată aceastei metrici Beil este: $\widetilde{N}_k^j = N_k^j + \frac{\overline{<z,\eta>}}{1-|z|^2}\delta_k^j$ Curbura olomorfă a lui $(M, \widetilde{L})$ este pozitivă, $\mathcal{K}_{\widetilde{L}} = 2\frac{L}{\widetilde{L}} > 0$.

În contiuare evidenţiemcazur particulare de spaţii Finsler complex cu metrică Beil complexă.

- $(M, \widetilde{F})$ cu metrică Beil complexă este **pur hermitian** dacă şi numai dacă (M, F) este pur hermitian.
- Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex.
  - $(M, \widetilde{F})$ este **slab Kähler** dacă şi numai dacă
  $$\partial_j(\sigma|\beta|^2) - \partial_0(\sigma B_j B_{\bar{0}}) - \widetilde{C}_{p\bar{0}j} A_0^p = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2.9}$$
  - $(M, \widetilde{F})$ este **Kähler** dacă şi numai dacă
  $$\tilde{g}^{\bar{m}i}[\partial_0(\sigma B_j B_{\bar{m}}) - \partial_j(\sigma B_0 B_{\bar{m}}) - \widetilde{C}_{p\bar{m}j} A_0^p] = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2.10}$$
- Fie (M, F) un spaţiu Berwald generalizat. Spaţiul $(M, \widetilde{F})$ este **Berwald generalizat** dacă şi numai dacă
$$\dot{\partial}_{\bar{h}} \tilde{g}^{\bar{m}i}(\sigma B_p B_{\bar{m}})_{|0} \eta^p = 0. \tag{3.2.11}$$
- Fie (M, F) un spaţiu Berwald complex. $(M, \widetilde{F})$ este un spaţiu **Berwald complex** dacă următoarele condiţii sunt verificate
  i) $\tilde{g}^{\bar{m}i}[\partial_0(\sigma B_k B_{\bar{m}}) - \partial_k(\sigma B_0 B_{\bar{m}}) - \widetilde{C}_{p\bar{m}k} A_0^p] = 0$;
  ii) $\widetilde{C}_{i\bar{m}\bar{p}} A_0^i = 0$.

Următorul pas din studiul nostru este centrat pe identificarea cazurilor când metricile Finsler complexe L şi $\widetilde{L}$ sunt proiectiv echivalente.

Teorema 3.2.4. *Metricile Finsler complexe L şi $\widetilde{L} = L + \sigma|\beta|^2$, ambele definite pe M, sunt proiectiv echivalente, adică*

$$\widetilde{G}^r = G^r + Q^r + P\eta^r, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{3.2.12}$$

unde

$$Q^r = -\frac{1}{2\widetilde{L}} g^{\bar{j}l} T^{\bar{k}}_{\bar{p}\bar{j}} (\dot{\partial}_l \widetilde{L}) \bar{\eta}^p \bar{\eta}_k \eta^r, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{3.2.13}$$

$$P = \frac{1}{2\widetilde{L}} \left(A^i_j \eta^j + g^{\bar{j}i} T^{\bar{k}}_{\bar{p}\bar{j}} \bar{\eta}^p \bar{\eta}_k \right) (\dot{\partial}_i \widetilde{L}), \tag{3.2.14}$$

şi schimbarea proiectivă este $\widetilde{G}^r = G^r + \frac{1}{2} A^r_j \eta^j$.

Lema 3.2.1. *Fie (M, L) un spaţiu Finsler complex, şi fie $\widetilde{L}$ metrica Finsler complexă definită în (3.2.4) pe M. Coeficienţii spray-urilor G^i şi $\widetilde{G}^i$ a metricilor L şi $\widetilde{L}$ verifică relaţia*

$$\widetilde{G}^i = G^i + \frac{1}{2} \tilde{g}^{\bar{r}i} \left(\dot{\partial}_{\bar{r}} (\delta_k \widetilde{L}) \eta^k + 2 (\dot{\partial}_{\bar{r}} G^l)(\dot{\partial}_l \widetilde{L}) \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolarul 3.2.1. *Pentru metrica Finsler complexă $\widetilde{L}$ din (3.2.3) are loc $\tilde{g}_{i\bar{r}} A^i_j \eta^j \bar{\eta}^r = (\delta_k \widetilde{L}) \eta^k$.*

3.2.1 Problema variaţională într-un spaţiu slab gravitaţional perturbat

Fie (M, L) un spaţiu Finsler complex $2-$dimensional, cu

$$L = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) |\eta^1|^2 - i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^1 \bar{\eta}^2 + i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^2 \bar{\eta}^1 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) |\eta^2|^2 \tag{3.2.15}$$

metrica slab gravitaţională, studiată mai detaliat în [Al-Mu4], şi prezentată în Secţiunea 2.3 . În această subsecţiune, perturbăm metrica slab gravitaţională (3.2.15) ca să obţinem o metircă Beil complexă, cu un potenţial electrodinamic, $a|\beta|^2 = aB_j(z)B_{\bar{k}}(z)\eta^j\bar{\eta}^k$, cu $a > 0$. Astfel, obţinem o metrică Finsler complexă care provine dintr-o metrică slab gravitaţională $\widetilde{L} = L + a|\beta|^2$, a cărei tensor fundamental este

$$(\tilde{g}_{j\bar{k}}) := \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + aB_1B_{\bar{1}} & -i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) + aB_1B_{\bar{2}} \\ i\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) + aB_2B_{\bar{1}} & -\left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) + aB_2B_{\bar{2}} \end{pmatrix}, \tag{3.2.16}$$

şi inversa lui are următoarea expresie $\tilde{g}^{\bar{k}j} = g^{\bar{k}j} - \tilde{a}B^{\bar{k}}B^j$, unde $\tilde{a} = \frac{a}{a\mathbb{B}^2+1}$. Această metrică o vom numi *metrica Beil slab gravitaţională.*

Utilizând rezultatele generale din acest subcapitol, exprimăm legăturile dintre obiectele geometrice asociate acestei metrici:

$$\widetilde{N}_k^j = N_k^j + a\tilde{g}^{\bar{m}j}\left(\partial_k(B_pB_{\bar{m}})\eta^p + \frac{2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(\eta^1 - i\eta^2)\Phi_kB_{\bar{m}}B_2\right); \quad (3.2.17)$$

$$\widetilde{G}^j = G^j + a\tilde{g}^{\bar{m}j}\left(\partial_k(B_pB_{\bar{m}})\eta^p\eta^k + \frac{2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}(\eta^1 - i\eta^2)\Phi_kB_{\bar{m}}B_2\eta^k\right).$$

În cele ce urmează, studiem problema variaţională a metricii Beil slab graviaţionale $\widetilde{L} = L + a|\beta|^2$ în parametrizarea canonică a unei curbe pe varietatea complexă M în raport cu metrica slab gravitaţională pur hermitiană (3.2.15).

Considerăm $c(t),\ c \in \mathbb{R}$ o curbă C^∞ pe varietate complexă M, şi $(z^k(t), \eta^k = \frac{dz^k}{dt})$ extensia lui pe $T'M$. Ecuaţiile Euler-Lagrange în raport cu Lagrangianul complex $\widetilde{L}$ sunt

$$E_k(\widetilde{L}) := \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial z^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\eta^k}\right) = 0, \quad k = 1,2, \quad (3.2.18)$$

unde $\widetilde{L}$ este considerat de-a lungul curbei c pe $T'M$. În general soluţiile ecuaţiilor Euler-Lagrange sunt curbele extremale în raport cu lungimea de arc.

Propoziţia 3.2.3. *Ecuaţiile Euler-Lagrange în raport cu metrica* $\widetilde{L} = L + a|\beta|^2$ *sunt*

$$E_k(\widetilde{L}) = E_k(L) + aE_k(|\beta|^2) = 0, \quad k = 1,2. \quad (3.2.19)$$

sau în formă explicită

$$\begin{aligned}
E_1(\widetilde{L}) &= \frac{2}{c^2}(\bar{\eta}^1 + i\bar{\eta}^2)[-i(\Phi_1 - i\Phi_2)\eta^2 - \Phi_{\bar{j}}\bar{\eta}^j] \\
&\quad -L\left[\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)\frac{d^2\bar{z}^1}{ds^2} - i\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\frac{d^2\bar{z}^2}{ds^2}\right] \\
&\quad +a\left\{[\partial_1(B_pB_{\bar{q}}) - \partial_p(B_1B_{\bar{q}})]\eta^p\bar{\eta}^q - \partial_{\bar{p}}(B_1B_{\bar{q}})\bar{\eta}^p\bar{\eta}^q - LB_1B_{\bar{q}}\frac{d^2\bar{z}^q}{ds^2}\right\} = 0; \\
E_2(\widetilde{L}) &= \frac{2}{c^2}(\bar{\eta}^1 + i\bar{\eta}^2)[i(\Phi_1 - i\Phi_2)\eta^1 + i\Phi_{\bar{j}}\bar{\eta}^j] - L\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(i\frac{d^2\bar{z}^1}{ds^2} - \frac{d^2\bar{z}^2}{ds^2}\right) \\
&\quad +a\left\{[\partial_2(B_pB_{\bar{q}}) - \partial_p(B_2B_{\bar{q}})]\eta^p\bar{\eta}^q - \partial_{\bar{p}}(B_2B_{\bar{q}})\bar{\eta}^p\bar{\eta}^q - LB_2B_{\bar{q}}\frac{d^2\bar{z}^q}{ds^2}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Utilizând aceleaşi argumente ca în [Mu1], ecuaţiile geodezicei complexe pentru $(M, \widetilde{L})$ sunt

$$\frac{2i}{c^2}(\delta^i_k - \delta^2_k)(\bar{\eta}^1 + i\bar{\eta}^2)(\Phi_1 - i\Phi_2)\eta^k + a[\partial_k(B_p B_{\bar{q}}) - \partial_p(B_k B_{\bar{q}})]\eta^p\bar{\eta}^q = 0, \quad (3.2.20)$$

$$\frac{2}{c^2}(\delta^i_k - i\delta^2_k)(\bar{\eta}^1 + i\bar{\eta}^2)\Phi_{\bar{j}}\bar{\eta}^j + Lg_{k\bar{q}}\frac{d^2\bar{z}^q}{ds^2} + a\left[\partial_{\bar{p}}(B_k B_{\bar{q}})\bar{\eta}^p\bar{\eta}^q + LB_k B_{\bar{q}}\frac{d^2\bar{z}^q}{ds^2}\right] = 0, \quad (3.2.21)$$

pentru $k = 1, 2.$

Menţionăm că (3.2.21) poate fi rescrisă în forma $\frac{d^2z^m}{dt^2} + 2\widehat{G}^m(z(t), \eta(t)) = 0$, unde

$$\widehat{G}^m = \frac{1}{c^2}(\tilde{g}^{\bar{1}m} + i\tilde{g}^{\bar{2}m})\left(\eta^1 - i\eta^2\right)\Phi_j\eta^j + \frac{a}{2}\tilde{g}^{\bar{k}m}\partial_j(B_{\bar{k}}B_q)\eta^q\eta^j.$$

Funcţiile $\widehat{G}^m$ sunt coeficienţii unui spray complex pe $T'M$. Având în vedere că o $(c.n.c.)$ prin contracţie cu η determină un spray complex, obţinem că funcţiile

$$\widehat{N}^m_j(z, \eta) := \frac{2}{c^2}(\tilde{g}^{\bar{1}m} + i\tilde{g}^{\bar{2}m})\left(\eta^1 - i\eta^2\right)\Phi_j + a\tilde{g}^{\bar{k}m}\partial_j(B_{\bar{k}}B_q)\eta^q \quad (3.2.22)$$

sunt coeficienţii a unei $(c.n.c)$. Mai mult de atât are loc:

Teorema 3.2.5. $(C.n.c.)$ $\widehat{N}^j_k$ *şi* $(c.n.c.)$ *Chern-Finsler asociată spaţiului Finsler complex* $(M, L + a|\beta|^2)$ *coincid.*

Am dovedit în Teorema 3.2.4 că metricile Finsler complexe L şi $\widetilde{L}$ sunt proiectiv echivalente, adică ele au aceeaşi geodezice ca mulţimi de puncte. Deci, dacă găsim geodezicele lui (M, L) cu metrică slab gravitaţională, scopul nostru va fi atins. Pentru aceasta utilizăm un rezultat din [Al-Mu4], şi anume Teorema 3.6.

Teorema 3.2.6. *Fie F metrica pur hermitiană (3.2.15) pe varietatea M. Dacă $\widetilde{F}$ este o metrică Kähler, atunci curbele geodezice ale $(M, \widetilde{F})$ sunt următoarele:*

$$\gamma(s) = (\lambda_1 s + \mu_1, \lambda_2 s + \mu_2), \quad \lambda_k, \mu_k \in , \ \lambda_k \neq 0, \ k = 1, 2. \quad (3.2.23)$$

Exemplul 3.2.3. Considerăm o particulă încărcată în mişcare de-a lungul unui câmp slab gravitaţional. Ca parametrul de direcţie alegem pe timpul propriu t. Poziţia particulei este dată de $z^k(t)$, iar viteza şi acceleraţia sunt $\eta^k = \frac{dz^k}{dt}$ şi $a^k = \frac{d\eta^k}{dt}$, respectiv.

Acum presupunem că B_i este potenţialul electromagnetic $A_j(z)$. Astfel am obţunt modelul unei particule în mişcare de-a lungul unui câmp electromagnetic cu potenţialul

A^j. Se demonstrează printr-un calcul simplu , că dacă are loc $a|\beta|^2 = constant$, ecuaţia de mişcare în câmplul slab gravitaţional este

$$a^k + \frac{-2i}{c^2\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)}\left[\delta_2^k - \tilde{a}A^kA_2\right](\eta^1 - i\eta^2)\tilde{a}\Phi_j\eta^j = 0,$$

pentru $k = 1, 2.$

3.3 Spaţii Cartan complexe cu metrica Beil

Spaţiile Hamilton reale, în particular spaţiile Cartan reale, au fost de mare interes în ultimii ani [Bw, Mi-H-Sh]. Tranformata Legande, corespondenta formalismului Lagrange-Hamilton din domeniul mecanicii, are un rol important în studiul spaţiilor Hamilton, implicând totodată numeroase aplicaţii [Mi1]. De-a lungul acestui capitol prezentăm principalele domenii de utilizare a metricii Beil, introdusă şi dezvoltată de R.G. Beil, şi a spaţiilor Lagrange complexe înzestrate cu metrici de tip Beil $\tilde{g}_{jk} = g_{jk} + \sigma B_j B_k$.

În acest subcapitol introducem o metrică nouă, obţinută prin perturbarea unui tensor metric pe un spaţiu Cartan complex, de această formă $\tilde{h}^{\bar{j}k} = h^{\bar{j}k} + \sigma B^{\bar{j}} B^k$. Aici dăm condiţiile pentru care această metrică devine una Hamilton generalizată, şi îi vom numi *metrica Beil-Cartan complexă,* prin analogie cu cazul Finsler (Subcapitolul 3.1). În subsecţiunea 3.3.1 este descris un studiu altenativ al unui spaţiu Cartan complex, ca imagine prin transformarea Legendre complexă (pe scurt *procedeul $\mathcal{L}-$dual*) unui spaţiu Finsler complex. Aici sunt descrise relaţii înte spaţiile $\mathcal{L}-$duale, şi între astfel de spaţii.

Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan $n-$dimensional şi $h^{\bar{j}k}$ tensorul metric fundamental al acestuia. Presupunem, că $(M, \mathcal{C})$ este înzestrat cu un câmp vectorial $B = B_k(z,\zeta)\dot{\partial}^k$, $B_k(z,\zeta)d^*z^k$ este o $(1,0)-$formă diferenţială, cu $B^k := h^{\bar{j}k}B_{\bar{j}}$, unde $B_{\bar{j}} := \overline{B_j}$. Ridicarea şi coborârea indicilor se efectuează cu $h^{\bar{j}k}$ şi $h_{i\bar{j}}$, unde $h^{\bar{j}k}h_{i\bar{j}} = \delta_i^k$. În plus considerăm şi $\sigma : T'^*M \to \mathbb{R}$, o funcţie cu valori reale. Utilizând aceste obiecte, putem să definim:

$$\tilde{h}^{\bar{j}k}(z,\zeta) := h^{\bar{j}k}(z,\zeta) + \sigma(z,\zeta)B^{\bar{j}}(z,\zeta)B^k(z,\zeta). \tag{3.3.1}$$

Este evident, că $(\tilde{h}^{\bar{j}k})$ sunt componentele unui $d-$tensor hermitian. Căutăm inversa matricei $(\tilde{h}^{\bar{j}k})$ în forma $\tilde{h}_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}} - \tilde{\sigma}B_jB_{\bar{k}}$, în care avem de determinat funcţia $\tilde{\sigma}$. Din condiţia $\tilde{h}^{\bar{j}i}\tilde{h}_{k\bar{j}} = \delta_k^i$ rezultă că $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1+\sigma\mathbb{B}^2}$, cu $\mathbb{B}^2 = B^kB_k = h^{\bar{j}k}B_{\bar{j}}B_k$ (norma lui B în raport cu $h^{\bar{j}k}$). Astfel am dedus formula inversei:

$$\tilde{h}_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}} - \frac{\sigma}{1+\sigma\mathbb{B}^2}B_jB_{\bar{k}}. \tag{3.3.2}$$

În plus avem şi det$(\tilde{h}^{\bar{j}k}) \neq 0.$ În acest fel am dovedit următoarea teoremă:

Teorema 3.3.1. *Perechea $(M, \tilde{h}^{\bar{j}k})$ este un spaţiu Hamilton generalizat, dacă şi numai dacă $1 + \sigma\mathbb{B}^2 \neq 0.$*

Din acest motiv, $(\tilde{h}^{\bar{j}k})$ din (3.3.1) defineşte o metrică Hamilton generalizată, dacă $1 + \sigma\mathbb{B}^2 \neq 0,$ pe care o vom numi *metrica Beil-Cartan complexă,* prin analogie cu cazul Finsler complex, [Sz2].

Teorema 3.3.2. *Metrica Beil-Cartan definită în (3.3.1) este tensorul metric fundamental al unui spaţiu Cartan complex $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ dacă şi numai dacă satisface următorul sistem de ecuaţii*

$$\begin{aligned} & B^{\bar{j}}(\dot{\partial}^m\sigma \cdot B^k - \dot{\partial}^k\sigma \cdot B^m) + \sigma[\dot{\partial}^m B^{\bar{j}} \cdot B^k - \dot{\partial}^k B^{\bar{j}} \cdot B^m + \\ & + B^{\bar{j}}(\dot{\partial}^m B^k - \dot{\partial}^k B^m)] = 0 \\ & B^{\bar{j}}\dot{\partial}^m\sigma \cdot \beta + \sigma(\dot{\partial}^m B^{\bar{j}}\beta + B^{\bar{j}}\dot{\partial}^m B^k\zeta_k) = 0. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

În plus, metrica Cartan complexă asociată va fi

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \sqrt{\mathcal{C} + \sigma(z,\zeta)|\beta|^2}, \tag{3.3.4}$$

unde $\beta = B^k(z,\zeta)\zeta_k.$

Este uşor de demonstrat, că nu orice $B^k(z,\zeta)$ şi $\sigma(z,\zeta)$ satisface sistemul anterior. Din această cauză studiem cazul particular $B^k = B^k(z)$ şi $\sigma = \sigma(z).$

Propoziţia 3.3.1. *Dacă $B^k = B^k(z)$ şi $\sigma = \sigma(z) \geq -\frac{\mathcal{C}^2}{|\beta|^2},$ atunci $(M, \widetilde{\mathcal{C}}^2 = \mathcal{C}^2 + \sigma(z)|\beta|^2)$ este un spaţiu Cartan complex, având tensorul metric fundamental $\tilde{h}^{\bar{j}k}$ dat prin*

$$\tilde{h}^{\bar{j}k}(z,\zeta) := h^{\bar{j}k}(z,\zeta) + \sigma(z)B^{\bar{j}}(z)B^k(z). \tag{3.3.5}$$

Ca să se poată dezvolta geometria unui spaţiu Cartan complex este necesară o $(c.n.c.).$ Conexiunea Chern-Cartan depinde numai de tensorul fundamental al spaţiului, şi cum noi am obţinut tensorul corespunzător spaţiului $(M, \widetilde{\mathcal{C}}^2 = \mathcal{C}^2 + \sigma(z)|\beta|^2)$ în (3.3.5), după câteva calcule triviale, obţinem expresia locală a $(c.n.c.)$ Chern-Cartan:

$$\widetilde{N}_{jk} = N_{jk} + A_{jk}, \quad \text{unde} \quad A_{jk} := -\tilde{h}_{j\bar{m}}(\sigma B^l \bar{B}^m)_{|k}\zeta_l.$$

Din proprietăţile $(c.n.c.)$ deducem, că A_{jk} este un $d-$tensor $(1,0)-$omogen. Reperul orizontal asociat lui $\widetilde{N}_{jk}$ va fi notat cu $\delta_k := \delta^*_k + A_{km}\dot{\partial}^m.$

Conexiunea Chern-Cartan $\widetilde{D}$ din (1.3.1) a metricii Beil-Cartan complexe are următoarele expresii locale:

$$\widetilde{H}^i_{jk} = H^i_{jk} + \dot{\partial}^i A_{jk}, \qquad \widetilde{V}^{ik}_j = V^{ik}_j + \hat{\sigma} B_j B_{\bar{m}} V^{\bar{m}ik}. \tag{3.3.6}$$

În cele ce urmează sunt prezentate cazuri particulare de spaţiul Cartan complex $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$:

- Spaţiul $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ este **pur hermitian** dacă şi numai dacă $(M, \mathcal{C})$ este pur hermitian.
- Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Kähler-Cartan complex,
  - $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ este **slab Kähler-Cartan** dacă şi numai dacă
  $$\tilde{h}^{\bar{0}j}(A_{jk} - A_{kj}) = 0.$$
  - $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ este **Kähler-Cartan** dacă şi numai dacă $d-$tensorul A_{jk} este simetric.
- Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Berwald-Cartan complex,
  - $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ este **Berwald-Cartan** dacă şi numai dacă
  $$(\dot{\partial}^{\bar{m}} \tilde{h}_{j\bar{k}})(\sigma B^l \bar{B}^k)_{|i} \zeta_l = 0.$$
  - $(M, \widetilde{\mathcal{C}})$ este **tare Berwald-Cartan** dacă şi numai dacă $\dot{\partial}^i A_{jk}$ depinde numai de poziţia z.

Exemplul 3.3.1. Versiunea complexă a metricii ecologice a lui Antonelli

$$H_A(z^1, z^2, \zeta_1, \zeta_2) = e^{2f(z)} \left[|\zeta_1|^2 + |\zeta_1|^2 \right],$$

definită pe un domeniu din $\widetilde{T'^*M}$, dim $T_C M = 2$, astfel încât tensorul metric fundamental să fie nedegenerat ([A-I-M],[Mu2]). Funcţia $f(z)$ are valori reale. Se verifică prin calcule elementare, că această metrică satisface condiţia $iii)$ din Teorema 1.3.1, deci spaţiul (M, H_A) este Berwald-Cartan. Scopul nostru este să găsim valori potrivite pentru $\sigma(z)$ şi pentru $B^k(z)$, astfel încât spaţiul Cartan complex $(M, \widetilde{H})$ să fie Berwald-Cartan. Alegem $\sigma(z) = ke^{2f(z)},\ k \in \mathbb{R}$, şi $\beta = \zeta_1$. Cu aceste obiecte, obţinem metrica Beil-Cartan complexă

$$\widetilde{H}(z^1, z^2, \zeta_1, \zeta_2) = e^{2f(z)} \left[(1+k)|\zeta_1|^2 + |\zeta_1|^2 \right],$$

care este o metrică Berwald-Cartan complexă.

3.3.1 $\mathcal{L}-$dualitate între spațiul Finsler complex și Cartan complex

O altă modalitate de a descrie un spaţiu Cartan complex este prin stabilirea corespondenţei obiectelor geometrice de pe un spaţiu Finsler complex (M, F) cu a cele de pe un spaţiu Cartan complex $(M, \mathcal{C})$ prin transformarea Legendre complexă (pe scurt procesul $\mathcal{L}-$dualităţii), [Mu1].

Teorema 3.3.3 ([Al-Mu6]). *Fie $(M, \mathcal{C})$ un spaţiu Cartan complex. $\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^k}\right\}$ este un reper vertical pe $VT'^*M \oplus \overline{VT'^*M}$, cu*

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^k} := h_{km}\dot{\partial}^m + h_{k\bar{m}}\dot{\partial}^{\bar{m}}, \tag{3.3.7}$$

dacă şi numai dacă $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1 = I_{2n}$, cu $\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} h^{kj} & h^{\bar{p}k} \\ h^{\bar{r}s} & h^{\bar{p}\bar{r}} \end{pmatrix}$ şi $\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} h_{kj} & h_{j\bar{r}} \\ h_{k\bar{m}} & h_{\bar{m}\bar{r}} \end{pmatrix}$,

Expresia locală a lui $\dot{\partial}^k$ în raport cu reperul $\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^k}\right\}$ este obţinută prin (3.3.7):

$$\dot{\partial}^k = h^{kl}\frac{\partial}{\partial \zeta^l} + h^{\bar{m}k}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^m}, \tag{3.3.8}$$

dacă are loc $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2\mathcal{H}_1 = I_{2n}$.

Imaginea prin transformarea Legendre complexă al unui spaţiu Finsler complex (M, F) local devine un spaţiu Cartan complex $(M, \mathcal{C})$, şi invers, adică

$$\big(L(z^k, \eta^k)\big)^* = H(z^k, \zeta_k); \quad \big(H(z^k, \zeta_k)\big)^\circ = L(z^k, \eta^k), \tag{3.3.9}$$

cu

$$\frac{\partial L}{\partial z^i} = -\frac{\partial^* H}{\partial z^i}; \quad (\eta^k)^* = \dot{\partial}^k H; \quad (\zeta_k)^\circ = \dot{\partial}_k L.$$

Teorema 3.3.4 ([Al-Mu6]). *Fie M o varietate complexă cu metricile F şi $\mathcal{C}$ date de (3.3.9). $\mathcal{L}-$dualul spaţiului Finsler complex (M, F) local este spaţiul Cartan complex $(M, \mathcal{C})$ dacă şi numai dacă*

$$\mathcal{G}\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1\mathcal{G} = I_{2n}, \tag{3.3.10}$$

unde $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{kj} & g_{j\bar{r}} \\ g_{k\bar{m}} & g_{\bar{m}\bar{r}} \end{pmatrix}$ este matricea Hessiană pe $T_C(T'M)$ a metricii Finsler complexe $L = F^2(z^k, \eta^k)$, $g_{jk} := \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^j \partial \eta^k}$, şi $g_{j\bar{k}} := \frac{\partial^2 F^2}{\partial \eta^j \partial \bar{\eta}^k}$ este tensorul metric asociat.

Din expresiile locale (3.3.10) şi (3.3.8), se obţine că $(\dot{\partial}_k)^* = \frac{\partial}{\partial \zeta^k}$, şi împreună cu (3.3.9) obţinem:

$$\begin{aligned}
&(g_{kj})^* = h_{kj}; \quad (g_{j\bar{r}})^* = h_{j\bar{r}}; \quad (g^{ks})^* = h^{ks}; \quad (g^{\bar{p}k})^* = h^{\bar{p}k};\\
&(\dot{\partial}_k)^* \left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right) = -h_{kr}\dot{\partial}^r\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right) - h_{k\bar{m}}\dot{\partial}^{\bar{m}}\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right);\\
&(\dot{\partial}_{\bar{k}})^* \left(\frac{\partial L}{\partial z^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^k}\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right) = -h_{\bar{k}\bar{r}}\dot{\partial}^{\bar{r}}\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right) - h_{l\bar{k}}\dot{\partial}^{l}\left(\frac{\partial^* H}{\partial z^i}\right).
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Mai mult, utilizând pentru $(c.n.c.)$ Chern-Finsler, $N_j^k = g^{\bar{m}k}\frac{\partial g_{l\bar{m}}}{\partial z^i}\eta^l = g^{\bar{m}k}\frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial \bar{\eta}^m}$, acest proces găsim

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)^* - N_i^k(\dot{\partial}_k) = \frac{\partial^*}{\partial z^i} + \overset{\circ}{N}_{ki}\dot{\partial}^k,$$

unde $\overset{\circ}{N}_{ki} := \frac{\partial^2 L}{\partial z^i \partial \eta^k} - g_{jk}N_i^j$. Aplicând (3.3.11) pentru $\overset{\circ}{N}_{ki}$, rezultă $(\overset{\circ}{N}_{ki})^* = N_{ki}$, adică imaginea prin $\mathcal{L}-$dualitate a lui $\overset{\circ}{N}_{ki}$ este $(c.n.c.)$ Chern-Cartan, şi astfel $(\delta_k)^* = \delta_k^*$.

3.3.2 Duala metricii Beil complexe

Aplicăm rezultatele din secţiunea anterioară pentru a găsi dualul unui spaţiu Finsler complex cu metrică Beil.

Reluăm elementele necesare din subcapitolele anterioare. Fie (M, F) un spaţiu Finsler complex, cu $g_{i\bar{j}}$ tensorul metric fundamental, şi fie

$$\tilde{g}_{i\bar{j}}(z,\eta) = g_{i\bar{j}}(z,\eta) + \sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z) \tag{3.3.12}$$

o metrică Beil complexă asociată. Coeficienţii locali ai $(c.n.c.)$ Chern-Finsler asociate sunt

$$\tilde{N}_j^i = N_j^i + A_j^i, \text{ unde } A_j^i = \tilde{g}^{\bar{m}i}(\sigma B_p B_{\bar{m}})_{|j}\eta^p, \tag{3.3.13}$$

iar aici avem expresiile coeficienţilor locali a conexiunii Chern-Finsler

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{jk}^i &= L_{jk}^i + \dot{\partial}_j A_k^i;\\
\tilde{C}_{jk}^i &= C_{jk}^i - \tilde{\sigma}B^i B^{\bar{m}} C_{j\bar{m}k}.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Prin analogie considerăm un spaţiu Cartan complex $(M, \mathcal{C})$ cu metrica fundamentală $h^{\bar{j}k}$ şi o metrică Beil-Cartan complexă asociată $\tilde{h}^{\bar{j}k}(z,\zeta) = h^{\bar{j}k}(z,\zeta) + \tilde{\sigma}(z)\tilde{B}^{\bar{j}}(z)\tilde{B}^k(z)$. Presupunem că metricile Finsler F şi Cartan $\mathcal{C}$ complexe sunt $\mathcal{L}-$duale, deci au loc relaţiile (3.3.9) şi (3.3.11).

În primul rând căutăm imaginea lui $(\tilde{g}_{i\bar{j}})$ prin transformarea Legendre complexă:

$$\begin{aligned}(\tilde{g}_{i\bar{j}}(z,\eta))^* &= (g_{i\bar{j}}(z,\eta)+\sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z))^* \\ &= (g_{i\bar{j}}(z,\eta))^* + (\sigma(z))^*(B_i(z))^*(B_{\bar{j}}(z))^* \\ &= h_{i\bar{j}}(z,\zeta)+\sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z) := \hat{h}_{i\bar{j}}(z,\zeta).\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Propoziţia 3.3.2. *Pentru $d-$tensorul $\hat{h}_{i\bar{j}}$ din (3.3.15) avem,*

$i)$ $\det(\hat{h}_{i\bar{j}}) = (1+\sigma(\mathbb{B}^2)^*)\det(h_{i\bar{j}})$;

$ii)$ *Dacă $1+\sigma(\mathbb{B}^2)^* \neq 0, d-$tensorul $\hat{h}_{i\bar{j}}$ este nedegenerat, şi inversa are următoarea expresie $\hat{h}^{\bar{j}k} = h^{\bar{j}k} - \frac{\sigma}{1+\sigma(\mathbb{B}^2)^*}(B^{\bar{j}})^*(B^k)^*$,*

unde $(B^k)^*(z,\zeta) = B_{\bar{m}}(z)h^{\bar{m}k}(z,\zeta)$ şi $(\mathbb{B}^2)^*(z,\zeta) = h^{\bar{m}p}(z,\zeta)B_{\bar{m}}(z)B_p(z)$.

Teorema 3.3.5. *$(M,\hat{h}^{\bar{j}k})$, cu $\hat{h}^{\bar{j}k}$ din (3.3.15), este un spaţiu Cartan complex dacă şi numai dacă $\sigma > -\frac{1}{(\mathbb{B}^2)^*}$, cu metrica Cartan complexă*

$$\hat{\mathcal{C}}^2 = \mathcal{C}^2 + \hat{\sigma}|\hat{\beta}|^2, \tag{3.3.16}$$

unde $\hat{\beta} := (B^k)^*\zeta_k$ şi $\hat{\sigma} = -\frac{\sigma}{1+\sigma(\mathbb{B}^2)^*}$.

Propoziţia 3.3.3. *$\mathcal{L}-$dualul lui $(M,\tilde{g}_{j\bar{k}})$ dată în (3.3.12), este un spaţiu Cartan complex cu metrică Beil-Cartan complexă $\hat{h}^{\bar{j}k} := h^{\bar{j}k} + \hat{\sigma}(z)\hat{B}^{\bar{j}}(z)\hat{B}^k(z)$, unde $\hat{B}^k(z) := h^{\bar{m}k}B_{\bar{m}}(z), \hat{\mathbb{B}}^2 := \hat{B}^kB_k, \hat{\sigma}(z) := -\frac{\sigma}{1+\sigma\hat{\mathbb{B}}^2}$, dacă şi numai dacă spaţiul Finsler complex $(M,\tilde{g}_{j\bar{k}})$ este pur hermitian.*

Exemplul 3.3.2. În subcapitolul anterior am dat un model al electrodinamicii construit cu o metrică Beil complexă în felul următor: $F(z,\eta) = mc\sqrt{\gamma_{i\bar{j}}(z)\eta^i\bar{\eta}^j}, B_i(z) = A_i(z)$ şi $\sigma(z) = \frac{e}{m}$, unde $\gamma_{i\bar{j}}$ este o funcţie pur hermitiană pe M, $A_i(z)$ reprezintă potenţialul electromagnetic, şi $m,\ c,\ e$ sunt scalarii reali bine cunoscuţi. În acest exemplu vrem să construim $\mathcal{L}-$dualul acestei metrici. Utilizând propoziţia prezentată anterior:

$$\begin{aligned} h^{\bar{j}k} &= mc\gamma^{\bar{j}k}, & \hat{B}^k(z) &= mc\gamma^{\bar{m}k}A_{\bar{m}}, \\ \hat{\mathbb{B}}^2 &= mc\gamma^{\bar{m}p}A_{\bar{m}}A_p, & \hat{\sigma}(z) &= -\frac{e}{m(1+ec\gamma^{\bar{m}p}A_{\bar{m}}A_p)}. \end{aligned}$$

Cu notaţia $A^k := \gamma^{\bar{m}k}A_{\bar{m}}$ regăsim metrica Beil-Cartan complexă

$$\hat{h}^{\bar{j}k} = mc\gamma^{\bar{j}k} - \frac{emc}{1+ecA^iA_i}A^{\bar{j}}A^k.$$

În cele ce urmează construim $(c.n.c.)$ Chern-Cartan asociată spaţiului Cartan complex $(M,\hat{\mathcal{C}})$, cu ajutorul formulei $\hat{N}_{jk}=\hat{h}_{j\bar{m}}\frac{\partial^*\hat{h}^{\bar{m}p}}{\partial z^k}\zeta_p$:

$$\hat{N}_{jk}=N_{jk}+\sigma B_j(B^p)^*N_{pk}-\hat{h}_{j\bar{m}}\partial_j^*(\hat{\sigma}(B^{\bar{m}})^*(B^p)^*)\zeta_p. \tag{3.3.17}$$

Propoziţia 3.3.4. *În spaţiul Catan complex $(M,\hat{\mathcal{C}})$, cu $\hat{\mathcal{C}}$ dată în (3.3.16), coeficienţii locali ai conexiunii Chern-Cartan$\hat{C}\Gamma=(\hat{N}_{jk},\hat{H}^i_{jk},\hat{V}^{ik}_j,0,0)$ sunt*

$$\begin{aligned}\hat{H}^j_{ki} &= H^j_{ki}+\sigma B_k\left[V^{\bar{m}pj}B_{\bar{m}}N_{pi}+(B^p)^*H^j_{pi}\right]-(\dot{\partial}^j h_{k\bar{m}})\partial_i^*(\hat{\sigma}(B^{\bar{m}})^*(B^p)^*)\zeta_p-\\ &\quad -\hat{h}_{k\bar{m}}\cdot\dot{\partial}^j\left[\partial_i^*(\hat{\sigma}(B^{\bar{m}})^*(B^p)^*)\right]\zeta_p-\hat{h}_{k\bar{m}}\cdot\partial_i^*(\hat{\sigma}(B^{\bar{m}})^*(B^j)^*); \qquad (3.3.18)\\ \hat{V}^{ik}_j &= V^{ik}_j+\sigma\hat{\sigma}\left[(\mathbb{B}^2)^*-\mathbb{B}^2\right]V^{\bar{m}ik}B_{\bar{m}}B_j-\hat{\sigma}^2(1+\sigma\mathbb{B}^2)V^{\bar{m}pk}B_{\bar{m}}B_pB_j(B^i)^*,\end{aligned}$$

unde H^j_{ki} şi V^{ik}_j sunt coeficienţii locali ai conexiunii Chern-Cartan a spaţiului $(M,\mathcal{C})$ date în (1.3.1).

Propoziţia 3.3.5. *$\mathcal{L}-$duala conexiunii liniare complexe Chern-Finsler este conexiunea $\check{C}\Gamma$, dată de coeficienţii locali*

$$\begin{aligned}&\check{H}^j_{ki}=\hat{H}^j_{ki};\quad \check{H}^j_{k\bar{\imath}}=0;\\ &\check{V}^{ik}_j=\hat{h}^{\bar{s}i}(\dot{\partial}^{\bar{m}}h_{j\bar{s}})(\dot{\partial}^k h_{\bar{m}\bar{p}})\zeta^{\bar{p}};\quad \check{V}^{i\bar{k}}_j=\hat{h}^{\bar{k}r}h_{rl}\hat{V}^{il}_j+\hat{h}^{\bar{s}i}(\dot{\partial}^{\bar{k}}h_{j\bar{s}}).\end{aligned}$$

Utilizând rezultatele din Subcapitolul 3.2 împreună cu rezultatele din [Al-Mu6], am obţinut următoarele afirmaţii:

Dacă (M,F) este un spaţiu Kähler complex, şi tensorul metric $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ din (3.3.12) satisface condiţia

- $\partial_j(\sigma|\beta|^2)-\partial_0(\sigma B_jB_{\bar{0}})-\ \tilde{C}_{p\bar{0}j}A^p_0=0,\quad j=1,\ldots,n,$ atunci spaţiu $(M,\hat{\mathcal{C}})$ este slab Kähler-Cartan;
- $\tilde{g}^{\bar{m}i}[\partial_0(\sigma B_jB_{\bar{m}})-\partial_j(\sigma B_0B_{\bar{m}})-\tilde{C}_{p\bar{m}j}A^p_0]=0,\quad i,j=1,\ldots,n,$ atunci spaţiul $(M,\hat{\mathcal{C}})$ Kähler-Cartan.

Propoziţia 3.3.6. *Dacă (M,F) este un spaţiu Berwald complex, şi tensorul metric $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ din (3.3.12) satisface una din următoarele condiţii*

i) $\tilde{g}^{\bar{m}i}[\partial_0(\sigma B_kB_{\bar{m}})-\partial_k(\sigma B_0B_{\bar{m}})-\tilde{C}_{p\bar{m}k}A^p_0]=0;$

ii) $\tilde{C}_{i\bar{m}\bar{p}}A^i_0=0,$

atunci spaţiul $(M,\hat{\mathcal{C}})$ definit în (3.3.16) este tare Berwald-Cartan.

Capitolul 4

Deformări ale metricilor Finsler complexe

Deformarea structurii unei varietăţi complexe este o problemă celebră studiată în anii 1980 de K. Kodaira ([K]), care a condus la obţinerea unei clasificări în geometria complexă bazată pe invarianţi algebro-topologici. Pentru o varietate complexă dată (M, J), $J^2 = I$, (adică schimbarea de hărţi locale este olomorfă), în linii mari, problema deformării constă în caracterizarea tuturor varietăţilor complexe (M, J') izomorfe cu (M, J). La nivel infinitezimal, această procedură constă în dezvoltarea în serie de puteri a coordonatelor pentru fiecare deformare J', şi în studiul coeficienţilor din această serie în raport cu parametrul real t. Condiţia de integrabilitate a structurii deformate conduce la ideea, că primul coeficient al acestei serii aparţine unei clase de coomologie, numită clasa Kodaira-Spancer. Studiul deformării de ordin doi (coeficinetul lui t^2) este mult mai complicat. Prin urmare, de un mai mare interes este deformarea infinitezimală de ordinul întâi a lui (M, J).

În capitolul de faţă ne propunem să discutăm o problemă mai simplă. Nu vom deforma varietatea M, şi deci spaţiul tangent olomorf $T'M$ rămâne acelaşi, în schimb vom modifica metrici ce acţionează pe $T'M$, metrici ce provin dintr-o funcţie Finsler complexă $(M, L := F^2)$, astfel încât metricile obţinute să provină dintr-o familie de spaţii Finsler complexe (M, L_t). Problematica este cunoscută sub denumirea de deformarea structurilor Finsler complexe. După informaţiile pe care le avem, problema a fost abordată doar de T. Aikou în [Ai3] şi studiază deformarea infinitezimală a structurilor Einstein-Finsler pe cazul fibratelor olomorfe E. Evident, cazul $E = T'M$, unde există conexiunea liniară specială Chern-Finsler, aduce contribuţii în plus.

Toate rezultatele din acest capitol aparţin autorului şi sunt cuprinse în lucrările [Sz7, Sz8].

4.1 Deformări infinitezimale ale structurii Finsler complexe

Fie $(M, L := F^2)$ un spaţiu Finsler complex, cu tensorul metric fundamental $g_{j\bar{k}}(z, \eta)$. Considerăm o familie cu de spaţii Finsler complexe $\{(M, L_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ cu un parametru, unde pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, $L_t(z, \eta)$ verifică condiţiile de funcţii Finsler pe fibratul olomorf tangent $T'M$ din definiţia (1.1.2), iar tensorii metrici sunt $g_{j\bar{k}}(t) := g_{t\ j\bar{k}}(z, \eta)$ ca în (1.1.10). Presupunem că pentru $t = 0$, avem $L_0 = L$. Pentru această familie de spaţii Finsler complexe putem considera vectorul tangent

$$V := \left(\frac{\partial L_t}{\partial t}\right)_{t=0}, \tag{4.1.1}$$

numit *deformarea infinitezimală* indusă de familia $\{L_t\}_t$. Componentele sale în raport cu reperul ortonormat $\{\delta_k, \dot{\partial}_k, \delta_{\bar{k}}, \dot{\partial}_{\bar{k}}\}$ adaptat conexiunii Chern-Finsler, sunt date de

$$v_{j\bar{k}} := \left(\frac{\partial g_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}\right)_{t=0}. \tag{4.1.2}$$

Cum L_t sunt funcţii Finsler complexe, putem să deducem imediat că şi funcţia V este şi ea netedă pe $\widetilde{T'M}$, pozitiv definită şi omogenă. Totuşi nu rezultă că (M, V) ar fi un spaţiu Finsler complex. Pentru a obţine acest rezultat, funcţia V trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

Propoziţia 4.1.1. *Fie (M, L) un spaţiu Finsler complex, cu deformarea infnitezimală V definită în (4.1.1). Dacă funcţia V verifică condiţiile:*

i) $V(z, \eta) \geq 0,$ *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $\eta = 0;$

ii) *matricea* $\left(v_{j\bar{k}}\right) := \left(\frac{\partial g_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}\right)_{t=0}$ *este pozitiv definită,*

atunci (M, V) devine un spaţiu Finsler complex, cu tensorul metric $v_{j\bar{k}}$.

Observaţia 4.1.1. *Inversa lui $v_{j\bar{k}}$ este $v^{\bar{k}m} := \frac{\partial g^{\bar{k}m}(t)}{\partial t}|_{t=0}$.*

În continuare presupunem ca (M, V) este un spaţiu Finsler complex.

Lema 4.1.1. *Între tensorii $g_{j\bar{k}}$ din (1.1.10) şi $v_{j\bar{k}}$ din (4.1.2) are loc următoarea relaţie:*

$$v_{j\bar{k}}g^{\bar{k}i} + g_{j\bar{k}}v^{\bar{k}i} = 0. \tag{4.1.3}$$

Scopul nostru este găsirea unor conexiuni neliniare pe (M, V) şi stabilirea legăturii dintre acestea şi cele existente.

Teorema 4.1.1. *Fie* (M, L) *un spaţiu Finsler complex, cu deformarea lui infintezimală* (M, V)*. Funcţiile* $\overset{V}{N}{}_j^k := \frac{\partial N_j^k(t)}{\partial t}|_{t=0}$ *sunt coeficienţii locali al unei* $(c.n.c.)$ *pe* (M, V)*, numită* conexiuna indusă deformării.

Teorema 4.1.2. *Fie* N $(c.n.c)$ *Chern-Finsler pe* (M, L) *şi* $\overset{V}{N}$ *conexiunea indusă pe deformarea infinitesimală* (M, V) *şi fie* $\overset{VCF}{N}$ *conexiunea neliniară Chern-Finsler pe* (M, V)*. Are loc*

$$\overset{V}{N}{}_j^m = g_{i\bar{l}} v^{\bar{l}m} (N_j^i - \overset{CFV}{N}{}_j^i). \tag{4.1.4}$$

În cele ce urmează, extindem construcţia anterioară pentru un $t \in \mathbb{R}$, arbitrar. Pentru familia de spaţii Finsler complexe $\mathcal{F} = \{(M, L_t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ considerăm vectorul tangent

$$V_t := \frac{\partial L_t}{\partial t}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.1.5}$$

numită *deformarea infinitezimală indusă de funcţiile* L_t, având componentele

$$v_{j\bar{k}}(t) := \frac{\partial g_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}, \tag{4.1.6}$$

în raport cu reperul $\{\delta_k, \dot{\partial}_k, \delta_{\bar{k}}, \dot{\partial}_{\bar{k}}\}$ pe (M, L_t).

Având în vedere că L_t este o funcţie Finsler, rezultă că V_t este netedă pe $\widetilde{T'M}$, este pozitiv definită şi omogenă, fără a fi o funcţie Finsler complexă. Ca acest obiectiv să fie atins, funcţiile trebuie să satisfacă următoarele condiţii:

Propoziţia 4.1.2. *Fie* (M, L_t) *un spaţiu Finsler complex, cu deformarea infinitezimală* (M, V_t)*. Dacă funcţiile* V_t *verifică pentru orice* $t \in \mathbb{R}$ *condiţiile:*

i) $V_t(z, \eta) \geq 0,$ *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $\eta = 0;$

ii) matricea $\big(v_{j\bar{k}}(t)\big) := \frac{\partial g_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}$ *este pozitiv definită,*

atunci (M, V_t) *va fi un spaţiu Finsler complex, cu tensorul metric* $v_{j\bar{k}}(t),$ *având inversa* $v^{\bar{k}m}(t) := \frac{\partial g^{\bar{k}m}(t)}{\partial t}.$

În continuare presupunem că (M, V_t) este un spaţiu Finser complex, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. În acest mod, am construit o familie de funcţii Finsler complexe $\{(M, V_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, unde $V_0 = V$. Acum suntem în măsură să definim deformarea infinitezimală a lui $\{(M, V_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, similar ca în cazul lui $\{(M, L_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Fie

$$W := \left(\frac{\partial V_t}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 L_t}{\partial t^2}\right)_{t=0}, \tag{4.1.7}$$

deformarea infinitezimală de ordin doi a metricii L. Componentele ei în raport cu reperul ortonormat $\{ \overset{V}{\delta}_k, \dot{\partial}_k, \overset{V}{\delta}_{\bar{k}}, \dot{\partial}_{\bar{k}}\}$, sunt

$$w_{j\bar{k}} := \left(\frac{\partial v_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^2 g_{j\bar{k}}(t)}{\partial t^2}\right)_{t=0}. \tag{4.1.8}$$

După felul construcţiei, W păstrează proprieatea de a fi netedă, omogenă şi pozitiv definită, acestea derivând din proprietăţile lui V_t.

Propoziţia 4.1.3. *Funcţia W din (4.1.7) este o funcţie Finsler complexă, dacă şi numai dacă:*

i) $W(z, \eta) \geq 0$, *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $\eta = 0$;

ii) matricea $\left(w_{j\bar{k}}\right) := \left(\frac{\partial v_{j\bar{k}}(t)}{\partial t}\right)_{t=0}$ *este pozitiv definită.*

Tensorul fundamental al spaţiului (M, W) *va fi* $w_{j\bar{k}}$, *cu inversa* $w^{\bar{k}m} := \frac{\partial v^{\bar{k}m}(t)}{\partial t}|_{t=0}$.

Lema 4.1.2. *Între tensorii $v_{j\bar{k}}$ din (4.1.2) şi $w_{j\bar{k}}$ din (4.1.8) are loc*

$$v_{j\bar{k}}w^{\bar{k}i} + v_{j\bar{k}}w^{\bar{k}i} = 0. \tag{4.1.9}$$

Corolarul 4.1.1. *Între tensorii $g_{j\bar{k}}$ din (1.1.10) şi $w_{j\bar{k}}$ din (4.1.8) are loc:*

$$g_{j\bar{k}}w^{\bar{k}m} + w_{j\bar{k}}g^{\bar{k}m} + 2\delta_j^m = 0. \tag{4.1.10}$$

Scopul nostru este să găsim diferite conexiuni neliniare pe (M, W), ca să descriem relaţii între obiectele geometriei deformărilor infinitezimale de ordinul întâi şi doi ale lui L. Folosind aceleaşi idei ca în construcţia lui (M, V), am găsit:

Teorema 4.1.3. *Fie (M,W) deformarea infinitezimală a lui (M,V). Următoarele funcţii sunt $(c.n.c.)$ pe (M,W):*

$$i)\ \overset{W}{N_k^j} := \frac{\partial \overset{CFV}{N_k^j}(t)}{\partial t}|_{t=0} = \left(w^{\bar{m}j}\frac{\partial v_{s\bar{m}}}{\partial z^k} + v^{\bar{m}j}\frac{\partial w_{s\bar{m}}}{\partial z^k} \right)\eta^s; \tag{4.1.11}$$

$$ii)\ \overset{VW}{N_k^j} := \frac{\partial \overset{V}{N_k^j}}{\partial t}|_{t=0} = \left(w^{\bar{m}j}\frac{\partial g_{s\bar{m}}}{\partial z^k} + g^{\bar{m}j}\frac{\partial w_{s\bar{m}}}{\partial z^k} + 2v^{\bar{m}j}\frac{\partial v_{s\bar{m}}}{\partial z^k} \right)\eta^s. \tag{4.1.12}$$

Pe de altă parte, pe (M,W) putem să considerăm şi pe $(c.n.c.)$ Chern-Finsler $\overset{CFW}{N_k^j} = w^{\bar{m}j}\frac{\partial w_{s\bar{m}}}{\partial z^k}\eta^s$. Următorul rezultat furnizează noi relaţii între conexiunile introduse anterior:

Propoziţia 4.1.4. *Pe spaţiul (M,W) are loc:*

$$i)\ \overset{W}{N_k^j} = v_{i\bar{m}}w^{\bar{m}j}\left(\overset{CFV}{N_k^i} - \overset{CFW}{N_k^i} \right); \tag{4.1.13}$$

$$ii)\ \overset{VW}{N_k^j} = \left(w^{\bar{m}j}\frac{\partial g_{s\bar{m}}}{\partial z^k} + g^{\bar{m}j}\frac{\partial w_{s\bar{m}}}{\partial z^k} \right)\eta^s + 2\overset{CFV}{N_k^j}. \tag{4.1.14}$$

În continuare să analizăm mai atent conexiunile liniare corespunzătoare deformării infinitezimale (M,V). Fie D_t conexiunea liniară Chern-Finsler a familiei cu un parametru $\{(M,L_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Notăm cu $D_0 := D$, unde D este conexiunea Chern-Finsler pe (M,L).

Propoziţia 4.1.5. *Fie $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ o familie cu un parametru a metricilor Finsler complexe pe $T'M$, cu deformarea infinitezimală V. Deformarea infinitezimală $\left(\frac{\partial D_t}{\partial t}\right)_{t=0}$ a conexiunii Chern-Finsler D este nulă, dacă şi numai dacă $D'V=0$.*

Coeficienţii nenuli ai conexiunii induse $\overset{V}{D}$ sunt:

$$\overset{V}{L}{}^m_{jk} := \left(\frac{\partial L^i_{jk}(t)}{\partial t}\right)_{t=0} = v^{\bar{m}i}\delta_k g_{j\bar{m}} + g^{\bar{m}i}\delta_k v_{j\bar{m}} - g^{\bar{m}i}\dot{\partial}_p g_{j\bar{m}}\overset{V}{N}{}^p_k;$$
$$\overset{V}{C}{}^m_{jk} := \left(\frac{\partial C^i_{jk}(t)}{\partial t}\right)_{t=0} = v^{\bar{m}i}\dot{\partial}_k g_{j\bar{m}} + g^{\bar{m}i}\dot{\partial} v_{j\bar{m}},$$

unde $\left(L^m_{jk}, C^m_{jk}\right)$ sunt date în (1.1.11).

4.2 Deformarea de ordinul întâi a metricii

Până acum am considerat spaţiul Finsler complex $(M, L := F^2)$ şi familia de spaţii Finsler complexe $\{(M, L_t)\}$, care au definit deformarea infinitezimală V, pentru care am presupus că verifică ipotezele unei funcţii Finsler complexe.

În cele ce urmează, tratăm problema inversă. Considerăm un spaţiu Finsler complex (M, L) şi o funcţie dată $V : T'M \to \mathbb{R}^+$. În acest fel, definim o familie de funcţii $\tilde{L}_t : T'M \to \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{L}_t := L + tV, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.2.1}$$

numită *deformarea de ordinul întâi a lui* L.

Din (4.1.1) rezultă în mod clar că V este deformarea infinitezimală de ordinul întâi a lui $\tilde{L}_t$.

Teorema 4.2.1. *Spaţiul* $(M, \tilde{L}_t)$, *cu* $\tilde{L}_t$ *definit în (4.2.1), este un spaţiu Finsler complex dacă şi numai dacă*

i) *deformarea infinitezimală de primul ordin* V *este o funcţie Finsler complexă,*

ii) $tV \geq -L$, $\forall (z, \eta) \in T'M$, $t \in \mathbb{R}$, *egalitatea are loc dacă şi numai dacă* $\eta = 0$ *şi* $V(z, 0) = 0$, $\forall\, z \in M$.

iii) t *este suficient de mic, astfel ca metrica* $\tilde{L}_t$ *să rămână pozitiv definită.*

iv) *tensorul fundamental* $\tilde{g}_{j\bar{k}}(z, \eta, t)$ *este pozitiv definit, unde*

$$\tilde{g}_{j\bar{k}}(t) = \frac{\partial^2 \tilde{L}_t}{\partial \eta^j \partial \bar{\eta}^k} = g_{j\bar{k}}(z, \eta) + t v_{j\bar{k}}(z, \eta). \tag{4.2.2}$$

Propoziţia 4.2.1. *Fie* $(M, \tilde{L}_t)$ *un spaţiu Finsler complex cu* $\tilde{L}_t$ *dată în (4.2.1). Inversa tensorului fundamental* $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$ *din (4.2.2) este* $\tilde{g}^{\bar{k}m}(z, \eta, t)$ *cu expresia*

$$\tilde{g}^{\bar{k}m}(t) = \frac{1}{1+t^2} g^{\bar{k}m}(z, \eta) + \frac{t}{1+t^2} v^{\bar{k}m}(z, \eta). \tag{4.2.3}$$

Teorema 4.2.2. *Fie* $(M, \tilde{L}_t)$ *un spaţiu Finsler complex cu* $\tilde{L}_t$ *dată în (4.2.1). Conexiunea neliniară complexă Chern-Finsler* $\tilde{N}^i_j(z, \eta, t)$ *este*

$$\tilde{N}^i_j(t) = N^i_j + \frac{t}{1+t^2} \frac{\partial N^p_j(t)}{\partial t}|_{t=0} \left(\delta^i_p - t v^i_p\right), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.2.4}$$

unde N^i_j *sunt coeficienţii locali a* $(c.n.c.)$ *Chern-Finsler pe* (M, L) *şi* $v^i_p := v_{p\bar{m}} g^{\bar{m}i}$.

Acum putem să construim reperul adaptat asociat $(c.n.c.)$ Chern-Finsler din $(M,\tilde{L}_t)$.

Lema 4.2.1. *Reperul adaptat asociat* $(c.n.c.)$ *Chern-Finsler* $\tilde{N}(t)$ *este* $\{\tilde{\delta}_m(t),\dot{\partial}_m,\tilde{\delta}_{\bar{m}}(t),\dot{\partial}_{\bar{m}}\}$*, cu:*

$$\tilde{\delta}_m(t)=\delta_m-\frac{t}{1+t^2}(\overset{V}{\delta}_m-\partial_m)+\frac{t^2}{1+t^2}\frac{\partial N_m^k(t)}{\partial t}|_{t=0}v_k^p\dot{\partial}_p,$$

$\tilde{\delta}_{\bar{m}}(t)=\overline{\tilde{\delta}_m(t)}$, *unde* δ_m *este reperul adaptat orizontal asociat lui* N_j^i *din* (M,L)*, şi* $\overset{V}{\delta}_m$ *este deformarea lui infinitezimală.*

Propoziţia 4.2.2. *Pe spaţiul Finsler complex* $(M,\tilde{L}_t)$*, cu* $(M,\tilde{L}_t)$*, definită în (4.2.1), coeficienţii nenuli a conexiunii* $\tilde{D}_t=(\tilde{N}_j^i(t),\ \tilde{L}_{jk}^i(t),\ \tilde{C}_{jk}^i(t),0,0)$ *sunt:*

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{jk}^i(t) &= \frac{1+2t^2}{1+t^2}L_{jk}^i+\frac{t}{1+t^2}v_m^iL_{jk}^m-\frac{t^2}{1+t^2}\dot{\partial}_kv_p^i\frac{\partial N_j^p(t)}{\partial t}|_{t=0},\\ \tilde{C}_{jk}^i(t) &= \frac{1}{1+t^2}C_{jk}^i+\frac{t}{1+t^2}v_m^iC_{jk}^m.\end{aligned}$$

Torsiunea $(c.l.c.)$ Chern-Finsler $\tilde{D}_t$ are următorii coeficienţi locali nenuli:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{jk}^i(t) &= \tilde{L}_{jk}^i(t)-\tilde{L}_{kj}^i(t)=\frac{1+2t^2}{1+t^2}T_{jk}^i+\frac{t}{1+t^2}v_m^iT_{jk}^m-\\ &-\frac{t^2}{1+t^2}\left(\dot{\partial}_kv_p^i\frac{\partial N_j^p(t)}{\partial t}|_{t=0}-\dot{\partial}_jv_p^i\frac{\partial N_k^p(t)}{\partial t}|_{t=0}\right), \qquad (4.2.5)\\ \tilde{Q}_{jk}^i(t) &= \tilde{C}_{jk}^i(t)=\frac{1}{1+t^2}C_{jk}^i+\frac{t}{1+t^2}v_m^iC_{jk}^m,\\ \tilde{\rho}_{j\bar{k}}^i(t) &= \dot{\partial}_{\bar{k}}\tilde{N}_j^i(t)=\rho_{j\bar{k}}^i+\frac{t}{1+t^2}\frac{\partial\rho_{j\bar{k}}^i(t)}{\partial t}|_{t=0}-\\ &-\frac{t^2}{1+t^2}\left(\dot{\partial}_{\bar{k}}v_p^i\frac{\partial N_j^p(t)}{\partial t}|_{t=0}+v_p^i\frac{\partial\rho_{j\bar{k}}^p(t)}{\partial t}|_{t=0}\right),\\ \tilde{\Theta}_{j\bar{k}}^i(t) &= \delta_{t\bar{k}}\tilde{N}_j^i(t)=\Theta_{j\bar{k}}^i+\frac{t}{1+t^2}\left[\delta_{\bar{k}}\left(\frac{\partial N_j^p(t)}{\partial t}|_{t=0}\right)(\delta_p^i-tv_p^i)-\right.\\ &\left.-\frac{\partial N_j^p(t)}{\partial t}|_{t=0}t\delta_{\bar{k}}v_p^i+\frac{\partial N_{\bar{k}}^{\bar{l}}(t)}{\partial t}|_{t=0}(\delta_{\bar{l}}^{\bar{r}}-tv_{\bar{l}}^{\bar{r}})\tilde{\rho}_{j\bar{r}}^i(t)\right].\end{aligned}$$

Teorema 4.2.3. *Fie* (M,L) *un spaţiu Finsler complex cu deformarea infinitezimală* V*, care verifică condiţia* $D'V=0$*, unde* D *este* $(c.l.c.)$ *Chern-Finsler pe* (M,L)*. Atunci conexiunea* $\tilde{D}_t=(\tilde{N}_j^i(t),\tilde{L}_{jk}^i(t),\tilde{C}_{jk}^i(t),0,0)$ *este independentă de* t.

În cele ce urmează, ne concentrăm asupra studiului cazurilor particulare de metrici Finsler complexe pentru deformări de ordinul întâi $\tilde{L}_t = L+tV.$ Presupunem îndeplinite condiţiile din Teorema 4.2.1.

Propoziţia 4.2.3. *Spaţiul Finsler complex $(M, \tilde{L}_t)$ este pur hermitian dacă şi numai dacă (M, L) este pur hermitian.*

Din expresia $h-$torsiunii $\tilde{T}^i_{jk}(t)$ din (4.2.5) am dedus următoarea proprietate:

Propoziţia 4.2.4. *Fie (M, L) un spaţiu Kähler complex. $(M, \tilde{L}_t)$, cu $\tilde{L}_t$ definită în (4.2.1), este un spaţiu Kähler complex dacă şi numai dacă*

$$\dot{\partial}_k v^i_p \frac{\partial N^p_j(t)}{\partial t}|_{t=0} - \dot{\partial}_j v^i_p \frac{\partial N^p_k(t)}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Spray-ul complex derivat din $(c.n.c.)$ Chern-Finsler $\tilde{N}^i_j(t)$ este

$$\tilde{G}^i(t) = G^i + \frac{t}{1+t^2}\frac{\partial G^i(t)}{\partial t}|_{t=0}\left(\delta^i_p - tv^i_p\right). \tag{4.2.6}$$

Propoziţia 4.2.5. *Fie (M, L) un spaţiu Berwald generalizat. Au loc următoarele afirmaţii:*

$i)$ *$(M, \tilde{L}_t)$ definită în (4.2.1) este Berwald generalizat dacă tensorii v^i_j şi $g^{\bar{m}i}\partial_0 v_{0\bar{m}}$ sunt olomorfi.*

$ii)$ *Dacă spaţiul Finsler complex (M, V) cu V din (4.1.1) este Berwald generalizat, atunci şi $(M, \tilde{L}_t)$ devine Berwald generalizat.*

Propoziţia 4.2.6. *Fie (M, L) un spaţiu Berwald complex. Au loc următoarele afirmaţii:*

i) Spaţiul $(M, \tilde{L}_t)$ definit în (4.2.1) este Berwald complex dacă tensorii $v^i_j,\ g^{\bar{m}i}\partial_0 v_{0\bar{m}}$ sunt olomorfi şi $\dot{\partial}_0 v^i_p \frac{\partial N^p_k(t)}{\partial t}|_{t=0} = 0.$

ii) Dacă spaţiul Finsler complex (M, V) cu V din (4.1.1) este un spaţiu Berwald complex, atunci şi $(M, \tilde{L}_t)$ este Berwald complex.

În continuare, prezentăm în ce condiţii spaţiile Finsler complexe $(M, \tilde{L}_t)$ şi (M, L) sunt proiectiv echivalente, adică au aceleaşi geodezice ca mulţimi de puncte.

Propoziţia 4.2.7. *Funcţiile Finsler L şi $\tilde{L}_t$ sunt proiectiv echivalente dacă şi numai dacă deformarea infinitezimală a spray-ului complex G^i este independentă de $t.$ În acest caz, relaţia proiectivă este $\tilde{G}^i = G^i.$*

4.3 Deformarea de ordin doi a metricii Finsler

Până acum am analizat deformarea infinitezimală de ordinul întâi şi doi a unei metrici Finsler complexe, cu ajutorul căreia am construit deformarea de ordinul întâi unei metrici Finsler complexe. În acest subcapitol, ne ocupăm cu deformarea de ordinul doi a unei metrici Finsler complexe, studiem conexiunea neliniară Chern-Finsler asociată deformării, precum şi câteva subclase speciale, evidenţiind şi câteva proprietăţi de rigiditate.

Considerăm un spaţiu Finsler complex $(M, L = F^2)$ şi două funcţii arbitrare $V, W : T'M \to \mathbb{R}^+$.

Definim familia de funcţii $\hat{L}_t : T'M \to \mathbb{R}^+$:

$$\hat{L}_t := L + tV + t^2 W, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.3.1}$$

numită *deformarea de ordin doi a lui* L.

În mod cert, din (4.1.1) şi (4.1.7), rezultă că V este deformarea infinitezimală de ordinul întâi şi W de ordinul doi a lui $\hat{L}_t$.

Acum suntem în căutarea condiţiilor în care $(M, \hat{L}_t)$ este un spaţiu Finsler complex pentru $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Ca să atingem acest obiectiv, aceste funcţii trebuie să satisfacă cele patru condiţii din definiţia unei funcţii Finsler complexe.

Teorema 4.3.1. *$(M, \hat{L}_t)$, cu $\hat{L}_t$ definit în (4.3.1), este un spaţiu Finsler complex dacă şi numai dacă*

i) deformările infinitezimale de ordinul întâi şi doi a lui L_t, adică V şi W, sunt funcţii Finsler complexe;

ii) $L + tV + t^2 W \geq 0,\ \forall (z, \eta) \in T'M,\ t \in \mathbb{R}$, şi $V(z, 0) = 0,\ W(z, 0) = 0\,, \forall\, z \in M$.

iii) t este suficient de mic, astfel ca metrica $\hat{L}_t$ să rămână pozitiv definită.

iv) tensorul fundamental $\hat{g}_{j\bar{k}}(z, \eta, t)$ este pozitiv definit, cu

$$\hat{g}_{j\bar{k}}(t) := \frac{\partial^2 \hat{L}_t}{\partial \eta^j \partial \bar{\eta}^k} = g_{j\bar{k}} + t v_{j\bar{k}} + t^2 w_{j\bar{k}}. \tag{4.3.2}$$

Observaţia 4.3.1. *Funcţiile $\hat{L}_t$ sunt omogene, pentru că şi L, V şi W sunt omogene.*

În studiul geometriei lui $(M, \hat{L}_t)$ avem nevoie de inversa matricei $(\hat{g}_{j\bar{k}})$.

Propoziţia 4.3.1. *Fie $(M, \hat{L}_t)$ un spaţiu Finsler complex, cu $\hat{L}_t$ din (4.3.1). Inversa tensorului fundamental $\hat{g}_{j\bar{k}}(t)$ din (4.3.2) este $\hat{g}^{\bar{k}m}(z, \eta, t)$ cu expresia*

$$\hat{g}^{\bar{k}m}(t) = \frac{1}{t^4 - t^2 + 1} g^{\bar{k}m} + \frac{t}{t^4 - t^2 + 1} v^{\bar{k}m} + \frac{t^2}{t^4 - t^2 + 1} w^{\bar{k}m}. \qquad (4.3.3)$$

Teorema 4.3.2. *Fie $(M, \hat{L}_t)$ un spaţiu Finsler complex, dat prin (4.3.1). Conexiunea neliniară Chern-Finsler $\hat{N}^j_k(z, \eta, t)$ pe $(M, \hat{L}_t)$ are următorii coeficienţi locali:*

$$\hat{N}^j_k(t) = \hat{g}^{\bar{m}j} \left(g_{i\bar{m}} N^i_k + t v_{i\bar{m}} \overset{CFV}{N^i_k} + t^2 w_{i\bar{m}} \overset{CFW}{N^i_k} \right), \qquad (4.3.4)$$

unde N^i_k, $\overset{CFV}{N^i_k}$ şi $\overset{CFW}{N^i_k}$ sunt $(c.n.c.)$ Chern-Finsler pe (M, L), (M, V) şi pe (M, W), respectiv.

Propoziţia 4.3.2. *Coeficienţi locali nenuli a conexiunii liniare Chern-Finsler $\hat{D}_t = (\hat{N}^i_j(t), \hat{L}^i_{jk}(t), \hat{C}^i_{jk}(t), 0, 0)$ sunt:*

$$\begin{aligned} \hat{L}^i_{jk}(t) &= \hat{g}^{\bar{m}i} \left(g_{p\bar{m}} L^p_{jk} + t v_{p\bar{m}} \overset{CFV}{L^p_{jk}} + t^2 w_{p\bar{m}} \overset{CFW}{L^p_{jk}} \right) + \\ &\quad + N^p_k \dot{\partial}_j (\hat{g}^{\bar{m}i} g_{p\bar{m}}) + t \overset{CFV}{N^p_k} \dot{\partial}_j (\hat{g}^{\bar{m}i} v_{p\bar{m}}) + t^2 \overset{CFW}{N^p_k} \dot{\partial}_j (\hat{g}^{\bar{m}i} w_{p\bar{m}}); \\ \hat{C}^i_{jk}(t) &= \hat{g}^{\bar{m}i} \left(g_{p\bar{m}} C^p_{jk} + t v_{p\bar{m}} \overset{CFV}{C^p_{jk}} + t^2 w_{p\bar{m}} \overset{CFW}{C^p_{jk}} \right). \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

Din (4.3.5) deducem expresia $h-$torsiunii:

$$\begin{aligned} \hat{T}^i_{jk} &= \hat{g}^{\bar{m}i} \left(g_{p\bar{m}} T^p_{jk} + t v_{p\bar{m}} \overset{CFV}{T^p_{jk}} + t^2 w_{p\bar{m}} \overset{CFW}{T^p_{jk}} \right) + \\ &\quad + t \dot{\partial}_j (\hat{g}^{\bar{m}i} v_{p\bar{m}}) (\overset{CFV}{N^p_k} - N^p_k) + t^2 \dot{\partial}_j (\hat{g}^{\bar{m}i} w_{p\bar{m}}) (\overset{CFW}{N^p_k} - N^p_k). \end{aligned} \qquad (4.3.6)$$

Cazuri particulare de spaţii Finsler $(M, \hat{L})$ sunt prezentate în continuare.

Propoziţia 4.3.3. *Fie (M, L), (M, V) şi (M, W) spaţii slab Kähler complexe. Deformarea de ordinul doi $(M, \hat{L}_t)$ este un spaţiu slab Kähler dacă şi numai dacă*

$$G^i (\hat{g}^{\bar{m}j} g_{i\bar{m}} \dot{\partial}_k \hat{g}_{j\bar{l}} + \dot{\partial}_k g_{i\bar{l}}) + t \overset{CFV}{G^i} (\hat{g}^{\bar{m}j} v_{i\bar{m}} \dot{\partial}_k \hat{g}_{j\bar{l}} + \dot{\partial}_k v_{i\bar{l}}) + t^2 \overset{CFW}{G^i} (\hat{g}^{\bar{m}j} w_{i\bar{m}} \dot{\partial}_k \hat{g}_{j\bar{l}} + \dot{\partial}_k w_{i\bar{l}})$$

se anulează.

Propoziţia 4.3.4. *Fie $(M,L),\ (M,V)$ şi (M,W) spaţii Kähler complexe. Deformarea de ordinul doi $(M,\hat{L}_t)$ este un spaţiu Kähler dacă ori $t=0$ ori metricile $L,\ V$ şi W sunt proiectiv echivalente.*

Ca să studiem subclasele Berwald generalizat şi Berwald complex trebuie să scriem expresia spray-ului complex pe $(M,\hat{L}_t)$.

Propoziţia 4.3.5. *Spray-ul complex asociat $(c.n.c.)$ Chern-Finsler pe $(M,\hat{L}_t)$ este*

$$\hat{G}^j(t)=\frac{1}{2}\hat{g}^{\bar{m}j}(t)\left(g_{i\bar{m}}G^i+tv_{i\bar{m}}\overset{CFV}{G^i}+t^2w_{i\bar{m}}\overset{CFW}{G^i}\right), \tag{4.3.7}$$

unde $G^i,\ \overset{CFV}{G^i}$ şi $\overset{CFW}{G^i}$ sunt spray-urile complexe asociate conexiunilor Chern-Finsler pe $(M,L),\ (M,V)$ şi pe (M,W), respectiv.

Propoziţia 4.3.6. *Fie $(M,L),\ (M,V)$ şi (M,W) spaţii Berwald generalizate. $(M,\hat{L})$ este un spaţiu Berwald generalizat, dacă ori $t=0$ ori metricile $L,\ V$ şi W sunt proiectiv echivalente.*

Propoziţia 4.3.7. *Fie $(M,L),\ (M,V)$ şi (M,W) spaţii Berwald complexe. $(M,\hat{L})$ este un spaţiu Berwald complex, dacă ori $t=0$ ori metricile $L,\ V$ şi W sunt proiectiv echivalente.*

În partea finală a acestui capitol studiem relaţii între conexiunile liniare ale diferitelor spaţii Finsler complexe.

Teorema 4.3.3. *Fie (M,L) un spaţiu Finsler complex, cu deformările infinitezimale de ordinul întâi şi doi V şi W, respectiv, şi D conexiunea liniară complexă Chern-Finsler pe (M,L). Fie $\hat{L}_t:=L+tV+t^2W$ deformarea de ordin doi a lui L.*

- $i)$ *Dacă $D'W=0$, atunci conexiunile Chern-Finsler pe spaţiile (M,L) şi (M,W) coincid.*
- $ii)$ *Fie $\tilde{L}_t=L+tV$ deformarea de ordinul întâi a lui L. Pe spaţiul Finsler complex $(M,\tilde{L}_t)$ avem $(c.l.c.)$ Chern-Finsler pe $\tilde{D}_t$. Dacă $\widetilde{D}'_tW=0$, atunci conexiunile Chern-Finsler pe $(M,\hat{L}_t),\ (M,\tilde{L}_t)$ şi (M,W) coincid.*
- $iii)$ *Fie $\breve{V}_t=V+tW$ deformarea de ordinul întâi a lui V. Dacă $D'\breve{V}_t=0$, atunci conexiunea Chern-Finsler pe $(M,\hat{L}_t)$ este independentă de t.*

Capitolul 5

Contribuţii originale. Diseminarea rezultatelor

Contribuţii originale

Teza de doctorat este structurată pe patru capitole. Pornind de la noţiunile preliminare din primul capitol, în fiecare secţiune sunt prezentate contribuţiile originale ale autoarei.

- Introducerea *liftului Sasaki generalizat*, şi realizarea unui studiu a structurilor hipercomplexe compatibile cu el. În acest fel s-a obţinut, printre altele, conexiunea Levi-Civita a spaţiului.
- Determinarea conexiunii Levi-Civita pentru o nouă $(h, v)-$metrică, şi particularizarea sa pentru metrica slab gravitaţională. Rezolvarea ecuaţiilor Einstein din vid în aceste condiţii.
- Definirea *metricii Beil complexe,* urmată de studiul geometriei spaţiului înzestrat cu ea. Prezentarea multiplelor aplicaţii pentru această metrică, de exemplu în electrodinamică, şi într-un spaţiu slab gravitaţional perturbat.
- Studiul geometriei spaţiului dotat cu noua *metrică Beil-Cartan complexă,* şi compararea proprietăţilor geometrice cu $\mathcal{L}$-dualul spaţiului Beil complex.
- Introducerea *deformărilor de ordinul întâi şi doi a unei metrici Finsler complexe* utilizând noţiunea de deformare inifinitezimală a unei metrici. Studiul spaţiilor înzestrate cu aceste metrici.

Diseminarea rezultatelor

Lucrări publicare în reviste de spacialitate

- **A. Szász**, *Generalized Quaternionic Structures on the Total Space of a Complex Finsler Space,* Bull. of the *Transilvania* Univ. Braşov, Vol 5(54), No. 1, 85-96, 2012.
- **A. Szász**, *Generalized complex Lagrange spaces with Beil metric,* Bull. of the *Transilvania* Univ. Braşov, **7(56)** (2014), No. 2.
- **A. Szász**, *Beil metrics in complex Finsler geometry,* Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. **20**, No. 2, 2015, pp. 72-83.
- **A. Szász**, *Einstein equations of G-natural complex Finsler metrics*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis, 30 (2014).
- **A. Szász**, *The complex Beil-Cartan metric,* Proceeding of the Workshop de matematică şi informatică, 27.02.2015, Braşov.
- **A. Szász**, *The geometry of complex Cartan spaces with Beil metrics*, trimisă spre publicare.
- **A. Szász-Friedl**, *Deformation of complex Finsler metrics,* acceptată în An. Ovidius Constanţa, 2017.
- **A. Szász-Friedl**, *Second order Deformation of complex Finsler metrics*, trimisă spre publicare.

Participare la conferinţe internaţionale şi naţionale

- VII-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT 2011), 29 august - 4 septembrie, 2011, Braşov, România
- IX-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT 2013), 29 - 31 august, 2013, Debrecen, Ungaria;
- International Conference on Mathematics and Computer Science (MACOS '14), 26 - 28 iunie, 2014, Braşov, România;
- X-th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory (FERT 2014), 18 - 24 august, 2014, Braşov, România;

- Workshop de matematică şi informatică, 27 februarie 2015, Braşov, România;
- International Conference on Applied and Pure Mathematics (ICAPM 2017), 2 - 5 noiembrie, 2017, Iaşi, România.

Direcţii viitoare de cercetare

Subiectul tezei este vast şi oferă posibilităţi multiple de continuare. Ţinând cont de faptul că fizica cuantică lucrează cu operatori (Lagrangieni, Hamiltonieni) complecşi, se pot extinde teoriile din spaţiile Finsler complexe la spaţii Lagrange şi Hamilton cu metrici relativiste utile pentru fizicieni, de exemplu:

- Metrici Finsler complexe cu aplicaţii in quantică relativistă. Soluţii pentru ecuaţia Dirac pe un spaţiu Finsler complex cu metrici Beil.
- Teorii relativiste dependente de timp (Anastasiei-Hashiguchi) cu aplicaţii în geometria Finsler complexă.
- Continuarea subiectului deformarea structurilor Finsler complexe.

Bibliografie

[A-P] M. Abate, G. Patrizio, *Finsler Metrics - A Global Approach*, Lecture Notes in Math., **1591**, Springer-Verlag, 1994.

[Ai1] T. Aikou, *On Complex Finsler Manifolds,* Rep. Kagoshima Univ., **24** (1991), 9-25.

[Ai2] T. Aikou, *Some remarks on locally conformal Berwald space.* Finsler geometry (Seattle, WA, 1995), Contemp. Mat., 196, AMS Prov. RI, 1996.

[Ai3] T. Aikou, *A Note on Infinitesimal Deformations of Complex Finsler Structures,* Anelele Ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, Tomul XLIII, s.I.a, Matematică, 1997.

[Ai4] T. Aikou, *Einstein-Finsler Vector Bundles,* Publ. Math. Debrecen, 51 (1997), 363-384.

[Ai5] T. Aikou, *Partial Connection on Complex Finsler Bundles and its Applications,* Illinois J. of Math., 42 (1998), 481-492.

[Ai6] T. Aikou, *Applications of Bott Connection to Finsler Geometry,* Steps in Diff. Geom., Proc. of Coll. on Diff. Geom., Debrecen, 2000, 3-13.

[Al] N. Aldea, *Contribuţii la studiul curburii olomorfe a varietăţilor complexe*, Teză de doctorat, Universitatea Transilvania Braşov, 2005.

[Al1] N. Aldea, *The Holomorphic Flag Curvature of the Kähler Model of a Complex Lagrange Space,* Bull. of the Transilvanian Univ. Braşov **9**(44), (2002), 39-46.

[Al2] N. Aldea, *Complex Finsler spaces of constant holomorphic curvature,* Diff. Geom. and its Appl., Proc. Conf. Prague 2004, Charles Univ. Prague (Czech Republic) 2005, 179-190.

[Al-Mu1] N. Aldea, G. Munteanu, *On complex Finsler spaces with Randers metrics*, Journal Korean Math. Soc., **4**6 (2009) , no. 5, 949-966.

[Al-Mu2] N. Aldea, G. Munteanu, *On projective invariants of the complex Finsler space,* Diff. Geom. Appl., 30 (2012), 6.

[Al-Mu3] N. Aldea, G. Munteanu, *On Complex Landsberg and Berwald spaces,* J. Geom. Phys., 62 (2012), 368-380.

[Al-Mu4] N. Aldea, G.Munteanu, *New candidates for a Hermitian approach of gravity,* Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **10** (2013), 9.

[Al-Mu5] N. Aldea, G. Munteanu, *Some classes of complex Cartan spaces,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **57** (2012), 5, 2178-2187.

[Al-Mu6] N. Aldea, G. Munteanu, *Recent results on complex Cartan spaces*, J. Geom. Phys., 106 (2016), 155-170. doi: 10.1016/j.geomphys.2016.03.024.

[An-Sh1] M. Anastasiei, H. Shimada, *The Beil metrics associated to a Finsler space*, Balkan J. Geom. Appl. **3** (1998), no. 2, 1-16.

[An-Sh2] M. Anastasiei, H. Shimada, *Deformation of Finslerian Metrics,* Fund. Theories Phys., **109**, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 2000.

[A-I-M] P.L. Antonelli, R.S. Ingarden, M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[B-C-S] D. Bao, S.S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemannian Finsler Geom.,* Graduate Texts in Math., **200,** Springer-Verlag, 2000.

[Ba-St-T] V. Balan, P. Stavrinos, K. Trenčevski, *Weak Gravitational Models Based on Beil Metrics*, Applied Differential Geometry - General Relativity and The Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 7-22, 2000.

[Be1] R. Beil, *Electrodynamics from a Metric*, International Journal of Theoretical Physics, **26** (1987) , No. 2.

[Be2] R. Beil, *Finsler Geometry and a Unified Field Theory in Finsler Geometry*, Contemporary Math., **196,** AMS (1993), 265-272.

[Bw] L. Berwald, *On Finsler and Cartan geometries, III. Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals,* Ann. of Math. **42** (1941), 20, 84-112.

[Bo] M. Born, *A sugestion for unifying quantum theory and relativity*, Proc. Roy. Soc., A **165**, (1938), 291-303.

[C-S] B. Chen, Y. Shen, *Kähler Finsler metrics are actually strongly Kähler* Chin. Ann. Math. Ser. B, **30** (2009), no. 2, 173-178.

[H] D. Huybrechts, *Complex Geometry. An Introduction,* Springer, 2005.

[K] K. Kodaira, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures,* Springer, Berlin, 1986.

[IM] I. Mihai, *Complex differential geometry*, in Handbook of Differential Geometry, edited F. Dillen, L. Verstraelen.

[Mi-An] R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications,* Fundamental Theories of Physics, Vol. 59, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[Mi1] R. Miron, *Hamilton Geometry,* An. St. Univ. Al.I. Cuza, Iaşi, **35** (1989).

[Mi2] R. Miron, *Lagrange Geometry,* Comput. Modeling, **20**, no. 4-5, 25-40, 1994.

[Mi3] R. Miron, *The geometry of higher order Lagrange spaces. Applications to mechanics and physics,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[Mi4] R. Miron, *The geometry of Ingarden spaces,* Reports on Mathematical Physics, **54**(2) (2004), 131-147.

[Mi-H-Sh] R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, V. S. Sabau, *The geometry of Hamilton and Lagrange spaces,* Fund. Theories Phys., 118, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[Mu1] G. Munteanu, *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries,* Kluwer Acad. Publ., **141**, FTPH, 2004.

[Mu2] G. Munteanu, *Generalized Complex Lagrange Spaces*, Finslerian Geom., Kluwert Acad. Publ., **109** (2000), 209-222.

[Mu3] Munteanu, G., *Metric Almost Semiquaternion Structures,* Bull. Math. Soc. Sci. Roumanie, **32**(80) (1988), no.4, 153-160.

[Mu4] Munteanu, G., *Integrability Conditions for Almost Semiquaternion Structures,* Riv. Mat. Univ. Parma, 13 (1987), no.4, 153-160.

[Mu-Al] G. Munteanu, N. Aldea, *A complex Finsler approach of gravity,* Int. J. Geom. Methods. Phys. **9**, 7, 2012.

[Mu-Bă] G. Muntenau, V. Bălan, *Lecture on General Relativity*, (romanian), Bren, 2000.

[O] V. Oproiu, *Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold,* Balkan J. of Geom. and its Appl., **15**, no.1, (2010), 104-119.

[Pe-Ta] E. Peyghana, A. Tayebi, *Finslerian complex and Kählerian structures,* Nonlinear Analysis: Real World Applications **11** (2010), 3021-3030.

[Sa-Bl] A. Sandovici, V. Blănuţă, *Generalized Beil Metric on Finsler Space,* Libertas Mathematica, vol XXVII, 2007.

[Sz1] **A. Szász,** *Generalized Quaternionic Structures on the Total Space of a Complex Finsler Space,* Bull. of the *Transilvania* Univ. Braşov, Vol 5(54), No. 1, 85-96, 2012.

[Sz2] **A. Szász,** *Generalized complex Lagrange spaces with Beil metric,* Bull. of the *Transilvania* Univ. Braşov, **7(56)** (2014), No. 2.

[Sz3] **A. Szász,** *Beil metrics in complex Finsler geometry,* Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. **20**, No. 2, 2015, pp. 72-83.

[Sz4] **A. Szász,** *Einstein equations of G-natural complex Finsler metrics*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyháziensis, 30 (2014)

[Sz5] **A. Szász,** *The complex Beil-Cartan metric,* Proceeding of the Workshop de matematică şi informatică, 27.02.2015, Braşov

[Sz6] **A. Szász,** *The geometry of complex Cartan spaces with Beil metrics*, trimisă spre publicare

[Sz7] **A. Szász-Friedl,** *Deformation of complex Finsler metrics,* acceptată in An. Ovidius Constanţa, 2017.

[Sz8] **A. Szász-Friedl,** *Second order Deformation of complex Finsler metrics*, trimisă spre publicare

[U] C. Udriste, *Completeness of Finsler manifolds*, Publ. Math. Debrecen, **42**, 1-2(1993), 45-50.

[Yan] R. Yan, *Connections on Complex Finsler Manifolds*, Acta Math. Apl. Sinica, vol. 19, **3** (2003), 431-436.

Anexe

Anexa 1. Scurt rezumat al texei

Scopul tezei de doctorat *Structuri geometrice pe spaţiul total al unui spaţiu Finsler complex* este studiul spaţiilor Finsler complexe înzestrate cu diferite metrici, respectiv prezentarea diferenţelor şi a legăturilor cu spaţiul de bază. După noţiunile introductive, în Capitolul 2 au fost definite două lifturi complexe, obţinute cu ajutorul tensorului metric al spaţiului, liftul Sasaki generalizat şi o nouă $(h, v)-$metrică. Cu aceste noţiuni a fost studiată compatibilitatea metricii cu structuri hipercomplexe existente pe spaţiul de bază, şi au fost descrise conexiunile Levi-Civita corespunzătoare. În cele ce urmează sunt construite noi spaţii al căror tensor metric are o formă specială, conform necesităţilor propuse. În Capitolul 3 a fost prezentată metrica Beil complexă şi proprietăţile geometriei unui astfel de spaţii, cu diverse aplicaţii într-un spaţiu slab gravitaţional sau în electrodinamică. Pe urmă s-a introdus metrica Beil-Cartan, unde după o analiză ale elementelor din geometrie, s-a făcut un studiu comparativ între spaţiul Beil-Cartan complex şi $\mathcal{L}-$dual spaţiului Beil complex. Ultimul capitol este dedicat studiului deformărilor de ordinul întâi şi doi al structurilor Finsler complexe.

Abstract

The aim of the PhD thesis *Geometric structures on the total space of a complex Finsler manifold* is the study of complex Finsler manifolds enowed with different metrics, and to provide the differences and the links with the base manifold. After the introductory part, in Chapter 2 were defined two complex lifts obtained from the fundamental metric tensor of the space, the generalised Sasaki lift and a new $(h, v)-$metric. With this metrics some compatibility properties with hypercomplex structures are presented, and also the corresponding Levi-Civita connections are expressed . In the following new spaces are constructed, whose fundamental tensor have a special form, according to our requirenments. In the 3th Chapter the complex Beil metric and the geometric properties of such a manifold were presented, with divers applications in a weakly gravitational space or in electrodynamics. Afterwards the complex Beil-Cartan metric is introduced, where an analysis of the geometric elements is realised. A comparative study is made between the Beil-Cartan space and the $\mathcal{L}-$dual of a complex Beil one. The last chapter is dedicated to the study of the first and second order deformation of a complex Finsler structure.

Anexa 2. Curriculum Vitae

INFORMAŢII PERSONALE	Annamária (căs. FRIEDL) SZÁSZ e-mail: szasz.annamaria@unitbv.ro
EXPERIENŢĂ PROFESIONALĂ	**2011→2015, 2017→prezent:** doctorand şi profesor asociat, Departamentul de Matematică şi Informatică, Universitatea *Transilvania* din Braşov
EDUCAŢIE ŞI FORMARE	**2009→2011: Titlul de Master în domeniul Matematică** Universitatea *Transilvania* din Braşov, Facultatea de Matematică şi Informatică, specilizarea: Matematică şi Informatică **2006→2009: Titlul de Licenţiat în Matematică** Universitatea *Transilvania* din Braşov, Facultatea de Matematică şi Informatică, specilizarea: Structuri Matematice Fundamentale şi Aplicaţii **2002→2006: Liceu** Liceul Teoretic *Tamási Áron* din Odorheiu-Secuiesc, specilizarea: Matematică şi Informatică, intensiv informatică
APTITUDINI Şi COMPETENŢE PERSONALE	**Limbi străine cunoscurte:** Engleză - ascultat, citit, discurs oral: mediu Germană - ascultat, citit, discurs oral: mediu **Competenţe şi abiltăţi sociale:** spirit de echipă, iniţiativă proprie, seriozitate, responsabilitate, empatie **Competenţe şi aptitudini de utilizare a calculatorului:** Microsoft - Word, Excel, PowerPoint, Acces, C, C++, Mathematica, Scilab, Maple, Oracle, Latex, PhotoShop.

PERSONAL INFORMATIONS	Annamária (căs. FRIEDL) SZÁSZ e-mail: szasz.annamaria@unitbv.ro
WORK EXPERIENCE	**2011→2015, 2017→now:** PhD student and Adjunct Professor, Deparament of Mathematics and Computer Sciences, *Transilvania* University of Braşov
EDUCATION AND TRAINING	**2009→2011: Master degree in Mathematics** *Transilvania* University of Braşov, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, specilization: Fundamental Mathematical Structures and Applications **2006→2009: Bachelor Degree in Matematics** *Transilvania* University of Braşov, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, specilization: Mathematics and Computer Sciences **2002→2006: High School** *Tamási Áron* High School, Odorheiu-Secuiesc, specialisation: Mathematics and Computer Sciences, intensive computer sciences
PERSONAL SKILLS	**Foreign languages:** English - listening, reading, spoken interaction: medium Geman - listening, reading, spoken interaction: medium **Social skills:** team spirit, initiative, sobiety, liability, emphaty **PC skills:** Microsoft - Word, Excel, PowerPoint, Acces, C, C++, Mathematica, Scilab, Maple, Oracle, Latex, PhotoShop.