

ȘCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ

Facultatea de Mecanică

Ing. Cristian Dorin NĂSTAC

**Studiul vibrațiilor structurilor cu
elemente repetitive utilizate în
ingineria civilă (construcții și instalații)**

**Study over vibrations of structures
with repetitive elements used in civil
engineering (buildings and
installations)**

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof.dr.ing. Sorin VLASE

BRAȘOV, 2018

D-lui (D-nei)

.....

COMPONENȚA

Comisiei de doctorat

Numită prin ordinul Rectorului Universității Transilvania din Braşov

Nr. din

PREȘEDINTE:	Prof.dr.ing. ROȘCA Ioan Călin
CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:	Prof.dr.ing. VLASE Sorin
REFERENȚI:	Prof.dr.ing.h.c. BRATU Polidor
	Prof.dr.ing. GILLICH Gilbert-Rainer
	Prof.dr.ing. NEGREAN Iuliu

Data, ora și locul susținerii publice a tezei de doctorat: 10.09.2018, ora
13⁰⁰, sala UII3

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi
transmise electronic, în timp util, pe adresa nastaccristi@unitbv.ro

Totodată, vă invităm să luați parte la ședința publică de susținere a tezei de
doctorat.

Vă mulțumim.

Cuprins

	Pag. rezumat	Pag. Teza
CUVÂNT INTRODUCATIV	5	5
1. OPORTUNITATEA, OBIECTIVELE, STRUCTURA ȘI CONȚINUTUL TEZEI DE DOCTORAT	6	7
1.1. Prezentare generală	6	7
1.2. Structura tezei	7	8
2. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR ÎN DOMENIU	10	12
2.1. Simetria și antisimetria în construcții și în tehnică	10	12
2.2. Analiza statică a structurilor cu simetrii	11	15
2.3. Un model al unei transmisii cu două motoare identice	13	19
2.4. Vibrații forțate în sisteme cu simetrii structurale	16	29
2.5. Un exemplu	17	32
2.6. Sisteme continue alcătuite din bare	20	38
2.6.1. Introducere	20	38
2.6.2. Descrierea unui sistem cu bare	21	39
2.6.3. Ecuațiile vibrațiilor transversale ale sistemului mecanic prezentat	21	39
2.6.4. Proprietăți ale valorilor proprii și ale vectorilor proprii	22	43
2.7. Analiză modală	24	46
2.7.1. Introducere	24	46
2.7.2. Moduri de mișcare	24	47
2.8. Concluzii	29	56
3. VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE	30	57
3.1. Introducere	30	57
3.2. Vibrațiile transversale ale barelor	30	57
3.3. Pulsațiile proprii și modurile proprii de mișcare	31	58
3.4. Vibrațiile longitudinale ale barelor	31	60
3.5. Vibrațiile torsionale ale barelor	32	64
4. PROPRIETĂȚI LA VIBRAȚII ALE SISTEMELOR CONTINUE	34	68
4.1. Introducere	34	68
4.2. Cuplarea vibrațiilor transversale și longitudinale în cazul unui sistem mecanic cu două bare identice	34	68
4.2.1. Descrierea problematicii studiate	34	68
4.2.2. Sistem mecanic cu două bare identice	35	69
4.2.3. Ecuațiile vibrațiilor transversale și longitudinale	35	69
4.2.4. Vectori și valori proprii	35	75
4.3. O metodă semianalitică pentru studiul vibrațiilor sistemelor mecanice cu bare cu o structură cu simetrii	36	77
4.3.1. Introducere	36	77
4.3.2. Prezentarea sistemului	37	78
4.3.3. Modelul analitic al sistemului cu bare	37	79
4.3.4. Ecuațiile vibrațiilor libere transversale și torsionale	38	80
4.3.5. Vectori și valori proprii	38	82
4.4. Modelul unei structuri cu bare	39	84
4.4.1. Modelul mecanic	39	84
4.4.2. Ecuațiile de mișcare a structurii	40	85
4.4.3. Rezultate teoretice privind vibrațiile structurii	41	87
4.5. Concluzii	43	94
5. VALIDARE EXPERIMENTALĂ	44	95



5.1	Modelul analizat	44	95
5.2	Calculul modurilor proprii de vibrație.....	45	98
5.3	Influența sudurilor asupra pulsațiilor proprii.....	47	111
5.4	Concluzii.....	48	112
6.	CONTRIBUȚII ORIGINALE, CONCLUZII, VALORIFICAREA REZULTATELOR ȘI DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE.....	49	113
6.1	Contribuții originale	49	113
6.2	Valorificarea și diseminarea rezultatelor	50	114
6.3	Direcții viitoare de cercetare.....	52	116
7.	BIBLIOGRAFIE	53	117
	REZUMAT SCURT / ABSTRACT.....	58	122
	<i>CURRICULUM VITAE</i>	59	
	<i>CURRICULUM VITAE</i>	60	

CUVÂNT INTRODUCATIV

În cadrul lucrării de doctorat elaborate m-am ocupat de o problemă pe care o consider de importanță în domeniul construcțiilor civile și anume utilizarea simetriilor pentru ușurarea calculului și a timpului de proiectare a unei structuri cu părți identice. În practica inginerescă majoritatea clădirilor, lucrărilor de artă, halelor, etc au în componență părți identice și prezintă simetrii. Asta se întâmplă din timpul antichității iar motivele sunt de mai multe feluri. Mai întâi o proiectare mai ușoară, mai rapidă, apoi o realizare mai ieftină și, ceea ce este mai puțin important pentru ingineri dar este important pentru beneficiari, din considerente estetice.

Din multitudinea aspectelor care pot fi studiate m-am orientat spre analiza răspunsului dinamic al acestor structuri și, în mod special, spre studiul comportării la vibrații. Este motivul pentru care mi-am schimbat oarecum domeniul cercetărilor, trecând într-o zonă multidisciplinară, unde a trebuit să-mi însușesc noțiuni aprofundate în dinamica structurilor, metoda elementelor finite, calcul numeric și mecanică experimentală care mi-au lărgit cunoștințele și puterea de înțelegere a comportării dinamice a structurilor pe care le realizăm noi, inginerii constructori. Toată această cercetare o consider benefică pentru pregătirea mea ulterioară, alături de faptul că mi-a adus o expertiză extrem de utilă în zone noi.

Rezultatul acestei activități s-a concretizat în rezultatele prezentate în teza de față, obținute în urma unei activități de trei ani în cadrul Scolii Doctorale a Universității Transilvania din Braşov.

Cu ocazia finalizării acestei etape din viața mea, îmi permit să adresez câteva cuvinte de mulțumire tuturor celor care m-au îndrumat, ajutat, sprijinit pe parcursul derulării acestei teze de doctorat.

Sunt în măsură, astfel, să mulțumesc pentru sprijinul direct și indirect primit și pentru îndrumarea primită de la Universitatea TRANSILVANIA din Braşov.

Elaborarea, fundamentarea științifică și verificarea acestei teze de doctorat a fost posibilă ca urmare a unei îndrumări științifice de calitate, realizate cu profesionalism. De asemenea universitatea dispune de condiții adecvate necesare desfășurării unor activități de cercetare științifică, specifice temei abordate, desfășurate în Departamentul de Inginerie Mecanică sub conducerea Prof. Univ. Dr. Hab. Sorin VLASE căruia, profitând de ocazie, îi mulțumesc pentru tot ajutorul acordat în toată această perioadă.

Doresc să aduc mulțumiri totodată distinșilor referenți din componența Comisiei de doctorat pentru atenția cu care au lecturat lucrarea și pentru observațiile pe care le-au făcut. Domnul prof.dr.ing.dr.h.c. Polidor Bratu de la Universitatea Dunărea de Jos din Galați, D-I prof.dr.ing. Iuliu Negrea de la Universitatea Tehnică Cluj Napoca și D-I prof.dr.ing. Reiner Gillich de la Universitatea din Reșița au avut bunăvoința de a accepta de a face parte din Comisia de referenți și și-au răpit din timp pentru a citi și face observații legate de teză și de conținutul ei și a contribui la îmbunătățirea conținutului acestei lucrări.

Mulțumesc, de asemenea, tuturor colegilor din cadrul Universității TRANSILVANIA din Braşov de la Facultatea de Construcții, pentru sprijinul fizic și moral acordat. Mulțumesc familiei care m-a sprijinit pe toată perioada derulării stagiului de doctorat și a fost cu totul dedicată activității mele.

Capitolul 1

1. OPORTUNITATEA, OBIECTIVELE, STRUCTURA ȘI CONȚINUTUL TEZEI DE DOCTORAT

1.1 *Prezentare generală*

Prezenta cercetare este elaborată sub autoritatea Școlii Doctorale Interdisciplinare a Universității "Transilvania" din Brașov.

În construcții structurile simetrice sunt utilizate frecvent datorită unei multitudini de factori cum ar fi: ușurința în proiectare, ușurința de fabricare, costul mai redus al proiectării, costul mai redus al fabricării acestor structuri, alcătuite din elemente repetitive și, o să vedem în cadrul lucrării, datorită unor posibile comportări îmbunătățite în exploatare. Dat fiind aria atât de largă de utilizare se pune problema dacă simetriile structurale care apar în acest sistem nu ar putea fi folosite pentru a ușura calculele legate de proiectarea și dimensionarea lor. Deși pentru cazul static problema a fost studiată și s-au dedus proprietăți care ușurează munca de proiectare și de calcul, în domeniul analizei dinamice utilizarea acestor proprietăți este încă redusă. Este motivul pentru care lucrarea de doctorat își propune să analizeze anumite tipuri de structuri, încă nestudiate, pentru a identifica proprietăți la vibrații care ar putea ajuta proiectantul și constructorul.

Obiectivul general al tezei îl constituie identificarea și prezentarea unor proprietăți la vibrații ale sistemelor continue cu bare, proprietăți care pot face ca procesul de proiectare, calcul și realizare a unor astfel de structuri să se ușureze. Câmpul principal de aplicabilitate al acestor proprietăți este în domeniul construcțiilor civile dar, la fel de bine, există aplicații în toate lucrările ingineresti. În cadrul acestui obiectiv general teza își propune:

- *studiul proprietăților la vibrații a unor sisteme încă nestudiate și anume la structuri cu diferite simetrii utilizate în cadrul construcțiilor civile;*
- *verificarea metodei la calculul unei structuri reale prin realizarea structurii reale și validarea experimentală a rezultatelor obținute teoretic în acest caz;*
- *propunerea unor proceduri care să ajute proiectanții de astfel de structuri să economisească timpul de proiectare și care vor avea ca rezultat și scăderea costurilor cu realizarea practică a structurii.*

Obiectivul general care urmează a fi realizat în etapele principale enunțate mai sus conduce la obiective conexe, care vor fi definite pentru diferite faze ale realizării tezei și care, îndeplinite, vor conduce spre îndeplinirea globală a temei propuse spre cercetare. Autorul își propune:

1. O analiză a cercetărilor în domeniu studiat și identificarea stadiului actual al cercetărilor. Domeniul este interdisciplinar și asta a făcut necesară studierea unor lucrări și a literaturii din mecanică, analiza structurilor civile, matematică, metode numerice, metoda elementelor finite, încercări mecanice etc. În

bibliografie este menționată literatura considerată mai sugestivă la acest capitol, aleasă dintr-o multitudine de lucrări, existente mai ales în domeniile conexe;

2. Identificarea unor direcții de cercetare noi în cadrul domeniului, cuprinzând noi tipuri de structuri care nu au mai fost analizate în trecut din acest punct de vedere;
3. Analiza critică a metodelor de modelare și de rezolvare cantitativă și calitativă a ecuațiilor diferențiale obținute;
4. Alegerea celor mai potrivite metode pentru scrierea ecuațiilor de mișcare pentru sisteme cu simetrie, rezolvarea lor și interpretarea calitativă;
5. Analiza și identificarea celor mai potrivite metode de calcul numeric pentru rezolvarea problemelor speciale impuse de tematică;
6. Modelarea sistemelor mecanice continue prin modele teoretice continue, utilizabile la sistemele mecanice cu bare legate rigid;
7. Modelarea sistemelor studiate utilizând Metoda Elementelor Finite;
8. Studiul teoretic al unor astfel de sisteme și determinarea unor proprietăți caracteristice;
9. Analiza unui sistem structural real, modelarea, calculul la vibrații și verificarea teoretică a proprietăților enunțate anterior;
10. Analiza experimentală a sistemului structural real pentru validarea modelului;
11. Analiza critică a rezultatelor teoretice obținute, concluzii și propuneri de valorificare a cercetărilor;
12. Diseminarea rezultatelor prin publicarea rezultatelor în reviste indexate ISI și prin participarea la conferințe științifice naționale și internaționale;
13. Identificarea unor posibile viitoare direcții de cercetare și de dezvoltare ale subiectului;
14. Formularea unor concluzii și indicații pentru proiectanții de structuri mecanice.

1.2 Structura tezei

Pentru o mai facilă deslușire a împărțirii în capitole și a logicii în care a fost organizat materialul tezei, procedăm mai jos la o trecere în revistă a conținutului principalelor capitole.

Capitolul 1. OPORTUNITATEA, OBIECTIVELE, STRUCTURA ȘI CONȚINUTUL TEZEI DE DOCTORAT. Este capitolul de față care explică obiectivul tezei, justifică motivațiile generale pentru care s-a abordat această direcție de cercetare, obiectivele conexe prevăzute sau apărute pe parcursul derulării cercetării, logica desfășurării activităților și utilitatea care se presupune a cercetării. De asemenea în cadrul acestui capitol, s-a prezentat, rezumativ, conținutul tezei de doctorat și conținutul fiecărui capitol în parte.

Capitolul 2. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR ÎN DOMENIU. Capitolul își propune să studieze consecințele pe care le pot avea, în domeniul construcțiilor, existența unor simetrii și antisimetrii în cazul unor structuri. În inginerie, în construcții dar

și în alte domenii, cum ar fi de exemplu industria constructoare de mașini sau de utilaje, industria automobilelor, industria aerospațială, există produse, elemente, mașini și componente care conțin părți identice, repetitive, care au în componența lor părți care prezintă simetrii de diferite tipuri. În cadrul construcțiilor majoritatea clădirilor, lucrărilor de artă, halelor, etc au în componență părți identice și prezintă simetrii. Aceste proprietăți pot fi folosite cu succes la ușurarea analizei statice și dinamice a unor structuri. Simetriile de diferite feluri care oferă proprietăți specifice structurilor au fost observate de mai multă vreme și utilizate mai ales în cazul static. Ele sunt prezentate în cursurile clasice de Rezistența materialelor sau Analiză Structurală.

În finalul capitolului este prezentată rezumativ Analiza modală, la nivelul necesităților implicate de rezolvarea obiectivelor tezei, ca un instrument deosebit de puternic pentru analiza vibrațiilor lineare ale sistemelor și care va fi utilizată frecvent în cadrul lucrării.

Capitolul 3. VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE. În cadrul acestui capitol se face o trecere în revistă a vibrațiilor sistemelor continue cu sublinierea aspectelor importante din punctul de vedere al dezvoltărilor din cadrul tezei. Deoarece în cadrul lucrării ne vom axa pe sisteme de bare, este studiată comportarea acestui element de structură la vibrații. Sunt studiate pe rând vibrațiile longitudinale, vibrațiile transversale și vibrațiile torsionale ale barelor. Studiul se face pe un model frecvent utilizat în cadrul Rezistenței Materialelor. Este posibil să se utilizeze modele perfecționate care să țină seamă de diferite efecte, care vor oferi soluții probabil mai bune însă concluziile trase pe modelele utilizate rămân valabile indiferent de complexitatea modelului ales.

Capitolul 4. PROPRIETĂȚI LA VIBRAȚII ALE SISTEMELOR CONTINUE. Teoria prezentată în capitolul anterior este utilizată pentru modelarea, scrierea ecuațiilor de mișcare și rezolvarea acestora în cazul unor sisteme mecanice continue. Pentru determinarea valorilor proprii ale structurii și a modurilor proprii s-a utilizat softul specializat de element finit ABAQUS. Menționăm că o analiză în paralel s-a făcut și cu programul de calcul AXIS, rezultatele obținute fiind în general compatibile. Cu programul de calcul AXIS introducerea datelor și obținerea rezultatelor reprezintă procedee foarte rapide, motiv pentru care am folosit acest program pentru a verifica mai multe modele, în scopul de a determina care este cea mai bună soluție pentru a sprijini structura pe sol prin legături care să ofere cele mai bune valori teoretice, apropiate de valorile măsurate apoi experimental. Pentru o structură reală este făcut calculul cu ajutorul metodei elementelor finite și sunt verificate proprietățile enunțate și demonstrate în cadrul lucrării.

Capitolul 5. VALIDARE EXPERIMENTALĂ. Pentru validarea modelului cu elemente finite propus s-a făcut o cercetare experimentală în vederea determinării spectrului de frecvențe pentru structura realizată în laborator. S-a construit o structură reală, pe baza modelului prezentat în Cap.4. Structura are ca scop de a servi drept suport pentru un chiller industrial. Modelul experimental construit este identic cu sistemul modelat cu metoda elementelor finite. Pe această structură alcătuită din bare legate rigid între ele s-au montat accelerometre în mai multe puncte pentru a determina spectrul de frecvențe la o excitație realizată cu un ciocan de impact. Punctele în care s-a făcut această excitație sunt alese pe conturul structurii, pentru a putea culege informația din cât mai multe puncte ale structurii, în vederea determinării cu o bună acuratețe a

pulsațiilor proprii. Măsurătorile efectuate ne-au oferit rezultate obținute experimental pentru valorile proprii care coincid, cu o bună precizie, cu valorile calculate.

Capitolul 6. CONTRIBUȚII ORIGINALE, CONCLUZII, VALORIFICAREA REZULTATELOR ȘI DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE. Teza de doctorat își propune să aducă contribuții în domeniul construcțiilor civile dar și al industriei constructoare de mașini în general. Ambele domenii sunt în plină dezvoltare în cadrul mai larg al ingineriei. Ca direcție principală de studiu în această teză a fost identificarea unor proprietăți pe care le au la vibrații structurile alcătuite din bare, legate rigid între ele. Rezultatele acestor cercetări ar putea fi folosite în procesul de proiectare și ar putea determina scăderea costurilor legate de realizarea și întreținerea unor astfel de structuri. Problematika abordată în lucrare a fost relativ puțin studiată, totuși unele lucrări în domeniu există iar importanța elementelor (părților) repetitive sau a simetriilor în efectuarea unor calcule de rezistență a fost observată de multă vreme. Rezultatele obținute în cadrul tezei de doctorat sunt originale și se adaugă altor cercetări în acest domeniu. Sunt prezentate pe parcursul acestui capitol contribuțiile originale aduse de autor la studiul problemei, sunt prezentate lucrările în subiectul tezei publicate (4 lucrări indexate ISI, 1 SCOPUS și 1 BDI), lucrările în domeniul științific al tezei (5 lucrări indexate ISI și 2 BDI) cât și direcțiile viitoare de cercetare care vor fi abordate.

Anexele: Cuprind rezultatele experimentale obținute la care se face referire în text care ar fi afectat cursivitatea conținutului propriu-zis al lucrării dacă ar fi prezentate în cadrul tezei.

Tema tezei de doctorat **Studiul vibrațiilor structurilor cu elemente repetitive utilizate în ingineria civilă (construcții și instalații)** se încadrează în domeniul ingineriei mecanice, dar pentru tratarea subiectului este necesară o abordare multidisciplinară, pentru că lucrarea înglobează noțiuni de rezistența materialelor, vibrații, metoda elementelor finite, metode numerice, ecuații diferențiale, fizică, acustică și programare.

Capitolul 2

2. STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRILOR ÎN DOMENIU

2.1 *Simetria și antisimetria în construcții și în tehnică*

În domeniul ingineresc, atât în construcții cât și în alte domenii cum ar fi de exemplu industria constructoare de mașini sau de utilaje, industria automobilelor, industria aerospațială există produse, părți de produse, mașini, componente care conțin elemente identice, repetitive, care au în componența lor părți care prezintă simetrii de diferite tipuri.

În cadrul construcțiilor majoritatea clădirilor, lucrărilor de artă, halelor, etc au în componență părți identice și prezintă simetrii. Asta se întâmplă din timpul antichității iar motivele sunt de mai multe feluri. Mai întâi o proiectare mai ușoară, mai rapidă, apoi o realizare mai ieftină și, ceea ce este mai puțin important pentru ingineri dar este important pentru beneficiari, din considerente estetice. În cele ce urmează dăm câteva exemple de astfel de construcții din mulțimea, aproape infinită a unor astfel de construcții care se întâlnesc în toată lumea civilizată.

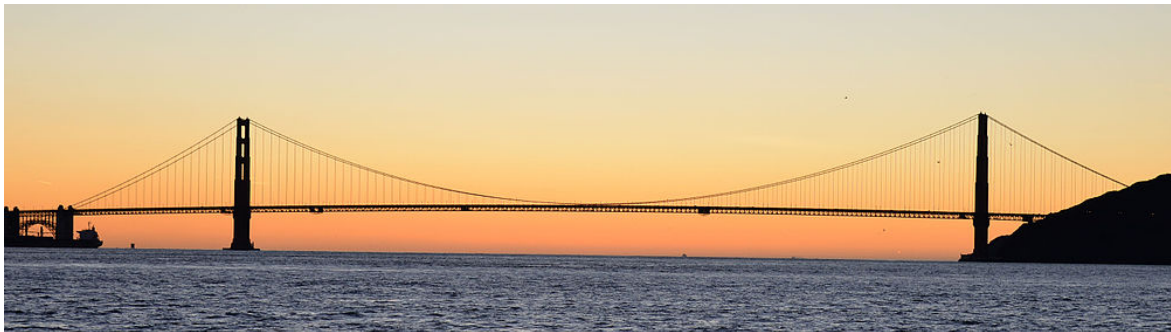


Fig.2.1. Golden Gate Bridge [91]

Am încercat să ilustrăm doar câteva exemple de structuri care au în componența lor elemente repetitive sau prezintă diferite forme de simetrie. Aceste proprietăți pot fi folosite cu succes la ușurarea analizei statice și dinamice a unor structuri.

Simetriile și proprietățile pe care acestea le dau structurilor au fost observate de cercetători și utilizate mai ales în cazul static și sunt prezentate în cursurile clasice de Rezistența materialelor sau Analiză Structurală.

Simetriile în Mecanică au fost studiate mai ales din punctul de vedere al matematicienilor (Holm and Stoica 2009, Marsden and Ratiu 2003, Singer 2004) întrucât au efecte în scrierea ecuațiilor de mișcare, dar cu mai puține aplicații în practică. În ianuarie 2018 a fost lansat un număr special al revistei Symmetry dedicate aplicațiilor în Mecanica Structurilor (Civil Engineering and Symmetry – 2018, A special issue of Symmetry -ISSN 2073-8994, vezi ref [100]). A fost finanțat și un proiect european pentru studiul acestui tip de probleme (Mechanics and symmetry in Europe: the geometry and dynamics of deformable systems. Project. HPRN-CT-2000-00113, Funded under: FP5-HUMAN POTENTIAL, vezi ref. [99]) și s-au ținut cursuri la Centrul

de Mecanica Solidelor – CISM de la UDINE (Similarity, Symmetry and Group Theoretical Methods in Mechanics, September 7, 2015 — September 11, 2015. Lectures at the International Centre for Mechanical Sciences, vezi ref. [101]).

2.2 Analiza statică a structurilor cu simetrii

Conceptele de simetrie și antisimetrie pot fi utilizate, cu succes, în analiza structurală. Simetria și antisimetria se pot întâlni, frecvent, la structurile din lumea reală. Subliniem că atunci când ne referim la o structură și spunem că este simetrică, această simetrie privește și condițiile de încărcare și de rezemare. În Fig. 2.10 prezentăm câteva astfel de structuri simple, evident simetrice :

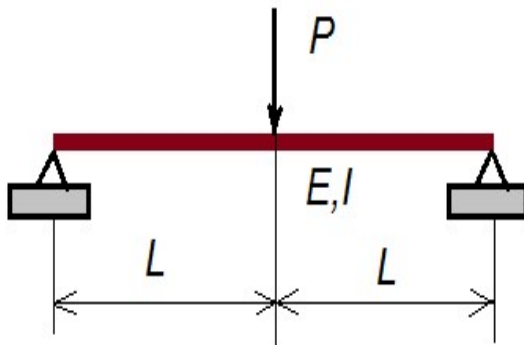


Fig.2.10.a

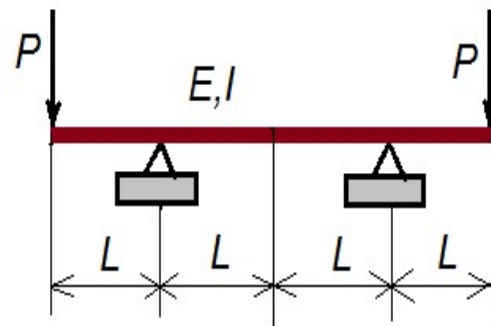


Fig.2.10.b

Fig.2.10. Structuri simetrice

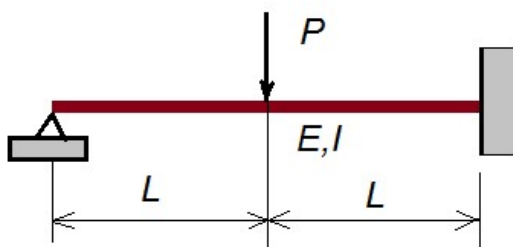


Fig.2.11.a

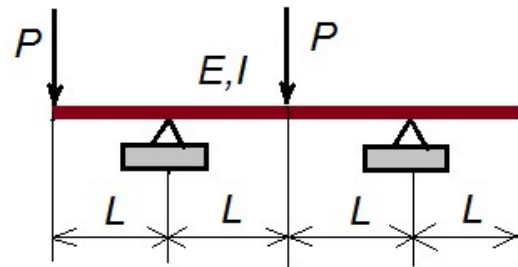


Fig.2.11.b

Fig.2.11. Structuri nesimetrice (asimetrice)

Următoarele structuri simple sunt antisimetrice

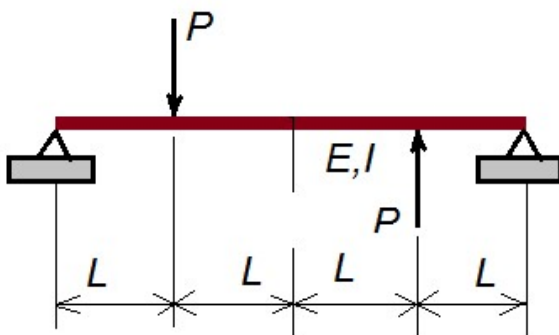


Fig.2.12.a

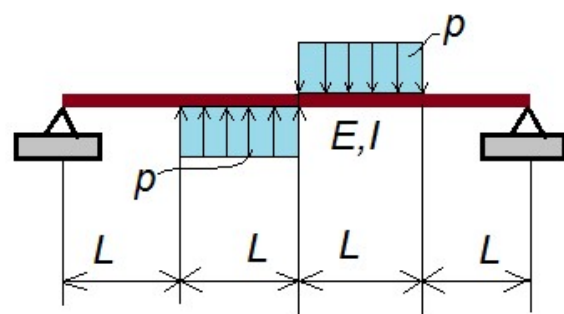


Fig.2.12.b

Fig.2.12. Structuri antisimetrice

Nu este dificil de văzut că deformațiile unei structuri simetrice vor fi simetrice față de punctul de simetrie. Se poate arăta cu ușurință, utilizând regulile care se aplică în mecanica structurilor (ecuațiile de echilibru, condițiile de compatibilitate și relațiile constitutive), că deformațiile structurilor simetrice sunt de asemenea simetrice, respectând simetria structurii. În mod analog se întâmplă pentru structurile antisimetrice. În Fig. 2.13 și Fig. 2.14 sunt prezentate deformațiile în aceste două cazuri.

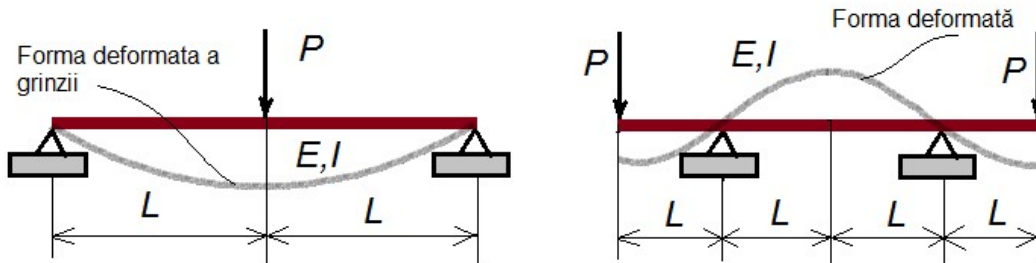


Figura 2.13. Deformații în structuri simetrice

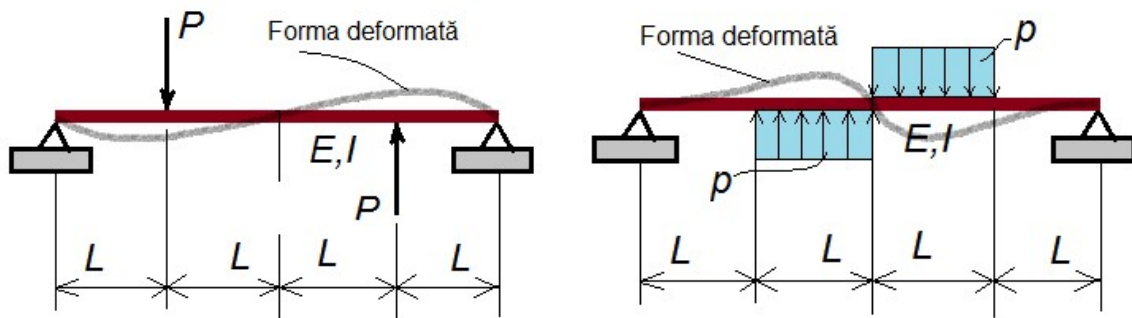


Figura 2.14. Deformații în structuri antisimetrice

Utilizând aceste proprietăți calculul unor astfel de structuri poate fi simplificat în mod semnificativ.

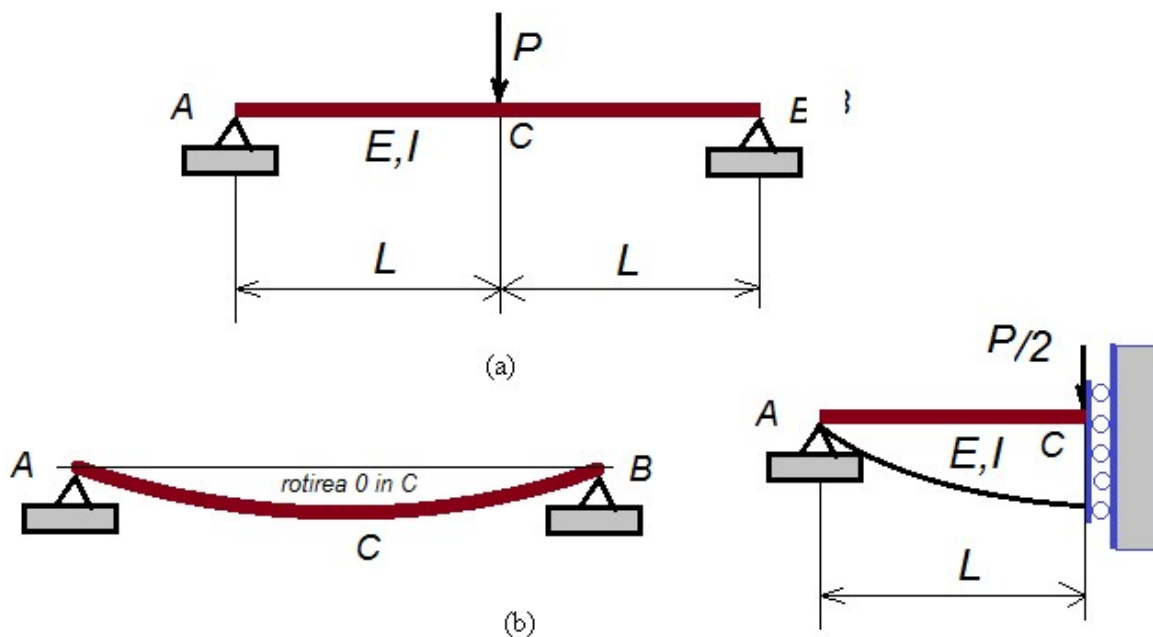


Figura 2.15.a. Utilizarea simetriei

Nu este dificil de constatat că deformațiile, pentru o structură simetrică, sunt și ele simetrice față de aceeași axă de simetrie. Acest lucru poate fi constatat în Fig. 2.15

unde se poate vedea că fiecare structură simetrică suferă deformații simetrice și poate fi demonstrat relativ ușor dacă se consideră ecuațiile de echilibru și se consideră domeniile pe care se aplică acestea.

2.3 Un model al unei transmisii cu două motoare identice

Un prim articol care analizează sistemele cu simetrii este făcut în Mangeron et al 1991, pentru o problemă concretă, generată de practică. În cele ce urmează se va prezenta, într-o formă simplificată, problema tratată în articolul citat. Să considerăm un sistem (S) (Fig.2.16) alcătuit din două subsisteme identice (S_1) și două sisteme diferite (S_2) și (S_3). Este cazul unei transmisii de autocamion acționat de două motoare identice. Acest caz a fost tratat în Mangeron 1991, Chiru et al. 2009 și prezentat pe larg în teza de doctorat Ambruș 2014.

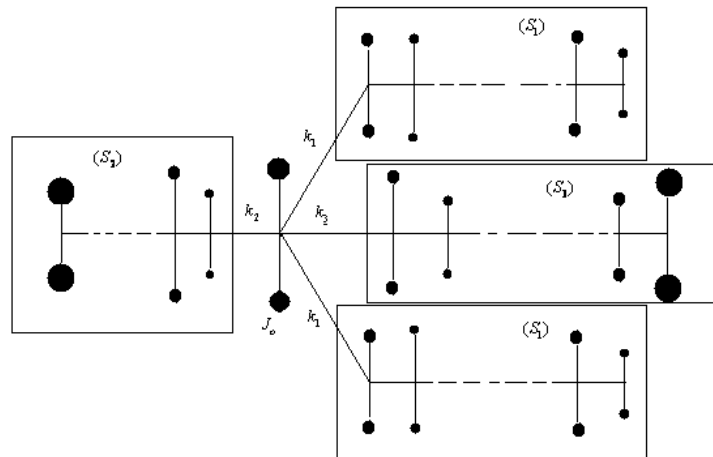


Figura 2.16. Modelul cu volanți ai sistemului simetric (după Mangeron et al 1991)

Ecuațiile de mișcare pot fi scrise utilizând diferite metode (Negrean 2017a, 2017b, Radoi și Deciu 1981, Ripianu 1960, Vâlcovici et al 1963, Vlase 1987a, 1987b, Voinea et al 1976, 1984, Rades 1979, 2010). Sunt studiate vibrațiile torsionale ale unui sistem cu arbori. Dacă considerăm un singur volan din sistem, volantul numărul i , legat de volanții precedent $i-1$ și următor $i+1$ prin elemente elastice cu rigiditățile $k_{i-1,i}$, respectiv $k_{i,i+1}$ ecuația de mișcare a acestui volan sunt date de relația:

$$J_i \ddot{\varphi}_i + k_{i-1,i}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + k_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = M_i \quad (2.3.1)$$

În această ecuație într-o primă aproximație se vor neglija amortizările, întrucât rezultatele obținute rămân calitativ la fel și în cazul unor amortizări Caughey. În aceste relații J_i reprezintă momentul de inerție al volanului i , φ_i rotirea acestuia, $k_{i-1,i}$ rigiditatea elementului de legătură care unește volanții $i-1$ și i , $k_{i,i+1}$ rigiditatea elementului de legătură care unește volanții i și $i+1$ iar M_i momentul exterior care acționează asupra rotorului i . Volantul cu momentul de inerție J_o are un rol special în modelul considerat, el asigură legătura dintre cele patru subsisteme. Pentru acest volan ecuația de mișcare va fi dată de (Vlase 2003):

$$J_o \ddot{\varphi}_o + k_1(\varphi_o - \varphi'_1) + k_1(\varphi_o - \varphi''_1) + k_2(\varphi_o - \varphi'_2) + k_3(\varphi_o - \varphi'_3) = 0 \quad (2.3.2)$$

Rigiditățile k_1, k_2, k_3 sunt explicitate în Fig. 2.16. În continuare se va nota cu $(S'_1), (S'_2), (S'_3)$ subsistemele obținute din $(S_1), (S_2), (S_3)$ luate fiecare independent (Fig.2.17) și fixate într-o parte. Pentru fiecare dintre aceste sisteme forma simbolică a ecuațiilor de mișcare va fi:

$$[J_i]\{\ddot{\varphi}_i\} + [K_i]\{\varphi_i\} = 0 \quad (2.3.3)$$

unde $i = 1, 2, 3$.

Pentru a determina modurile proprii de vibrație (vectorii proprii) va trebui să rezolvăm, în conformitate cu teoria clasică, sistemul linear omogen:

$$\begin{bmatrix} [P_1(\omega_i^2)] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [P_1(\omega_i^2)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [P_2(\omega_i^2)] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [P_3(\omega_i^2)] & 0 \\ 0 \dots -k_1 & 0 \dots -k_1 & 0 \dots -k_2 & 0 \dots -k_3 & P_o(\omega_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi_1\} \\ \{\Phi_1'\} \\ \{\Phi_2\} \\ \{\Phi_3\} \\ \{\Phi_o\}_i \end{Bmatrix} = 0 \quad i = \overline{1, n} \quad (2.3.10)$$

unde vectorul propriu a fost partiționat corespunzător subsistemelor $(S_1), (S_2), (S_3)$.

În cele ce urmează este prezentat un exemplu de calcul pe care sunt verificate proprietățile demonstrate anterior. Se analizează un sistem mai simplu care este format dintr-un sistem de volanți compus din două subsisteme identice (fig.2.18).

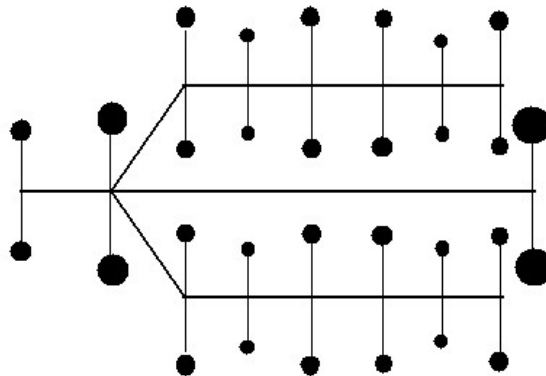


Figura 2.18. Sistem cu volanți cu ramuri identice

În fig.2.19 este prezentată partea repetitivă din sistem, care va trebui să aibă modurile proprii identice cu ale întregului sistem.

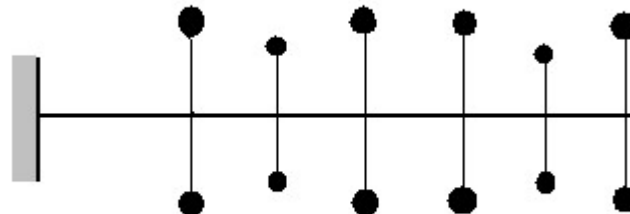


Figura 2.19. Subsistemul cu vibrații proprii egale cu ale sistemului simetric

Dacă se calculează valorile proprii pentru subsistemul (S_1) și se compară cu valorile proprii ale sistemului integral, se constată că acestea sunt și valori proprii pentru întregul sistem. În cele ce urmează se va face o reprezentare grafică a modurilor proprii care va fi sugestivă pentru prezentarea rezultatelor. Se constată că pentru vibrațiile proprii calculate pentru subsistemul (S_1) (și care se regăsesc printre vibrațiile proprii ale sistemului integral (S)), modurile proprii de mișcare, calculate pentru cele două subsisteme (S_1), vor fi egale dar de sens contrar. Celelalte mase concentrate (volanți în cazul nostru) vor fi în repaus. Aceste situații sunt reprezentate cu albastru. Pentru celelalte valori proprii ale sistemului integral modurile proprii de mișcare ale subsistemelor (S_1) vor fi identice. Aceste moduri sunt reprezentate cu roz.

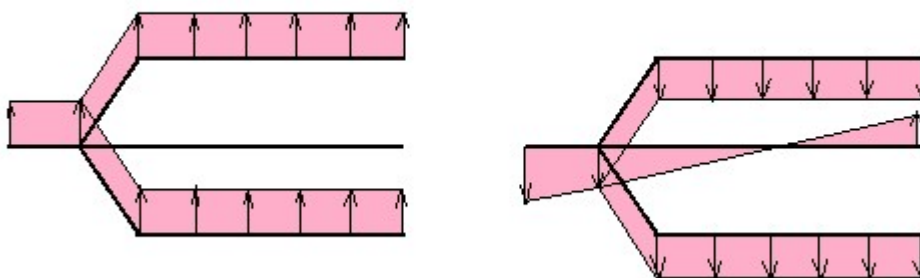


Figura 2.20.a

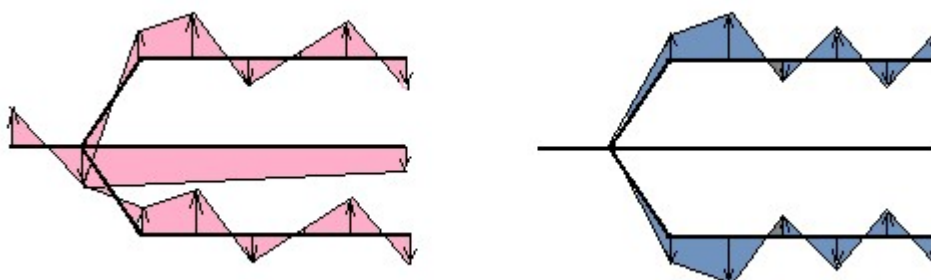


Figura 2.20.f

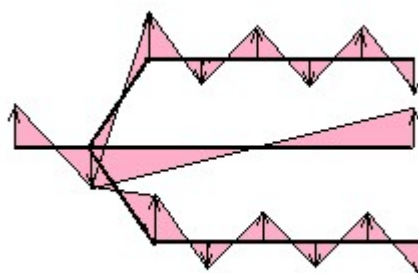


Figura 2.20.h

Figura 2.20. Modurile proprii de vibrație pentru sistemul ramificat simetric din fig. 2.18

2.4 Vibrații forțate în sisteme cu simetrii structurale

Se va studia situația vibrațiilor forțate ale unui sistem mecanic cu simetrii și care a fost studiat în paragraful precedent. Se va considera că cele două subsisteme identice (S_1) care compun sistemul (S) au aceeași excitație (adică momentele externe care excită volanții sunt egale pentru cele două ramuri). Atunci vectorul momentelor de torsiune care acționează asupra sistemului poate fi scris sub forma:

$$\{M\} = [\{M_1\}^T \{M_1\}^T \{M_2\}^T \{M_3\}^T M_o]^T \quad (2.4.1)$$

S-a făcut partiționarea conform subsistemelor care compun sistemul studiat. Rel. (2.3.7) vor lua forma:

$$[J]\{\ddot{\varphi}\} + [K]\{\varphi\} = \{M\} \quad (2.4.2)$$

Se notează cu $[\Phi]$ matricea modală obținută pentru sistemul liber:

$$[\Phi] = [\{\Phi\}_1 \{\Phi\}_2 \dots \{\Phi\}_n] \quad (2.4.3)$$

Se vor nota cu q_1, q_2, \dots, q_n coordonatele canonice ale sistemului. În acest caz se poate scrie:

$$\{\varphi\} = [\Phi]\{q\} \quad (2.4.4)$$

Să facem notațiile:

$$[J^*] = [\Phi]^T [J] [\Phi] \quad (2.4.5)$$

matricea inerțială diagonală a sistemului de ecuații diferențiale exprimat în coordonate nodale. Elementele nenule ale acestei matrice sunt: $J_i^* = \{\Phi\}_i^T [J] \{\Phi\}_i$.

Apoi:

$$[K^*] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (2.4.6)$$

matricea de rigiditate diagonală a sistemului de ecuații diferențiale. Elementele nenule sunt date de relația: $k_i^* = \{\Phi\}_i^T [K] \{\Phi\}_i$ și:

$$\{M^*\} = [\Phi]^T \{M\} \quad (2.4.7)$$

vectorul momentelor care sunt reduse la coordonatele canonice. Elementele matricei $\{M^*\}$ sunt date de: $M_i^* = \{\Phi\}_i^T \{M\}$. Dacă se fac aceste notații și se aplică teoria clasică de rezolvare pentru astfel de sisteme, vibrația forțată a sistemului este descrisă de un set de n ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, de ordinul doi, decuplate:

$$[J^*]\{\ddot{q}\} + [K^*]\{q\} = \{M^*\} \quad (2.4.8)$$

sau:

$$J_i^* \ddot{q}_i + k_i^* q_i = M_i^* \quad , \quad i=1, n \quad (2.4.9)$$

Dacă împărțim rel. (2.4.9) cu J_i^* și dacă se face notația: $\omega_i^2 = k_i^* / J_i^*$ se va obține setul de ecuații diferențiale decuplate:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{M_i^*}{J_i^*} \quad (2.4.10)$$

Există următoarea proprietate:

T1. Sistemul (2.4.8) are pentru pulsațiile proprii $\omega_i^2 =_1 \omega_i^2$ soluția sistemului omogen (asta înseamnă că excitația nu va influența mișcarea sistemului).

Pentru celelalte valori proprii avem următoarea proprietate: amplitudinile vibrațiilor forțate calculate pentru celelalte pulsații proprii au, pentru fiecare armonică p pentru care avem $p^2 = \omega_i^2 \neq_1 \omega_i^2$, forma:

$$\{\varphi_p\} = \begin{Bmatrix} \{\varphi_{1p}\} \\ \{\varphi_{1p}\} \\ \{\varphi_{2p}\} \\ \{\varphi_{3p}\} \\ \varphi_{op} \end{Bmatrix} \quad (2.4.14)$$

2.5 Un exemplu

Un exemplu simplu va ilustra proprietățile demonstrate anterior (Fig.2.22). Avem două ramuri identice pe care le vom izola în cadrul modelului. Se consideră următoarele valori pentru momentele de inerție: $J_1 = J$; $J_2 = 2J$; $J_3 = 4J$;

$J_4 = J$; $J_5 = 3J$; $J_6 = 7J$; $J_7 = 5$. Pentru constantele elastice se consideră valorile: $k_1 = k$; $k_2 = 3k$; $k_3 = 5k$; $k_4 = 3k$; $k_5 = 4k$; $k_6 = 7k$; $k_7 = k$; $k_8 = 3k$.

Se notează $p^2 = k/J$. Se utilizează mediul de programare MatLab pentru determinarea valorilor proprii. Se obțin valorile: 2853 p , 2754 p , 2438 p , 2415 p , 2181 p , 1691 p , 1667 p , 1212 p , 917 p , 780 p , 659 p , 194 p .

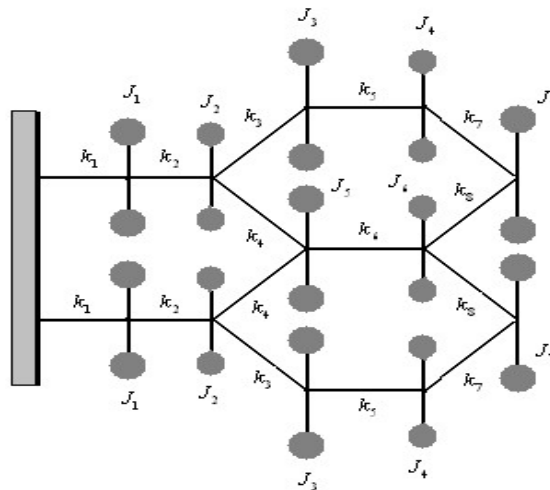


Figura 2.22. Un sistem cu simetrie

În Fig.2.23 se prezintă descompunerea sistemului conform celor prezentate la începutul capitolului.

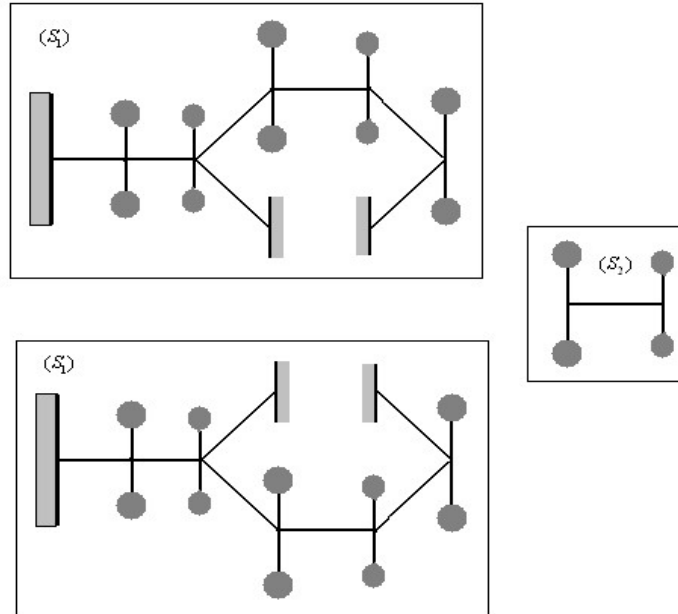


Figura 2.23. Descompunerea în subsisteme
Matricea modală pentru acest exemplu este:

-0,37	0,41	0,13	-0,24	0,51	-0,62	0,59	0,15	0,20	0,25	0,22	0,21
-0,37	-0,41	0,13	0,24	0,51	0,62	0,59	0,15	-0,20	0,25	-0,22	0,21
0,51	-0,49	-0,08	0,15	-0,13	-0,23	0,24	0,13	0,21	0,29	0,27	0,27
0,51	0,49	-0,08	-0,15	-0,13	0,23	0,24	0,13	-0,21	0,29	-0,27	0,27
-0,14	0,16	-0,15	0,13	0,02	0,12	-0,14	-0,17	0,27	0,39	0,41	0,29
0,18	-0,25	0,66	-0,63	0,12	0,22	-0,23	-0,29	0,12	0,28	0,40	0,30
-0,01	0,01	-0,02	0,03	-0,04	-0,02	0,07	-0,34	-0,58	-0,32	0,22	0,33
-0,30	0,00	0,15	0,00	-0,60	0,00	0,08	0,48	0,00	0,03	0,00	0,30
0,05	0,00	-0,03	0,00	0,22	0,00	-0,15	0,48	0,00	-0,20	0,00	0,32
-0,14	-0,16	-0,15	-0,13	0,02	-0,12	-0,14	-0,17	-0,27	0,39	-0,41	0,29
0,18	0,25	0,66	0,63	0,12	-0,22	-0,23	-0,29	-0,12	0,28	-0,40	0,30
-0,01	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	0,02	0,07	-0,34	0,58	-0,32	-0,22	0,33

Vectorii modali calculați se vor reprezenta în Fig.2.24.

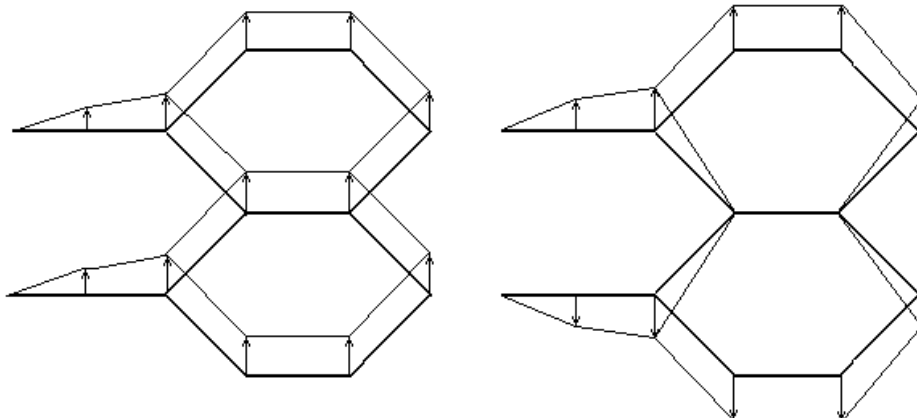


Figura 2.24.a

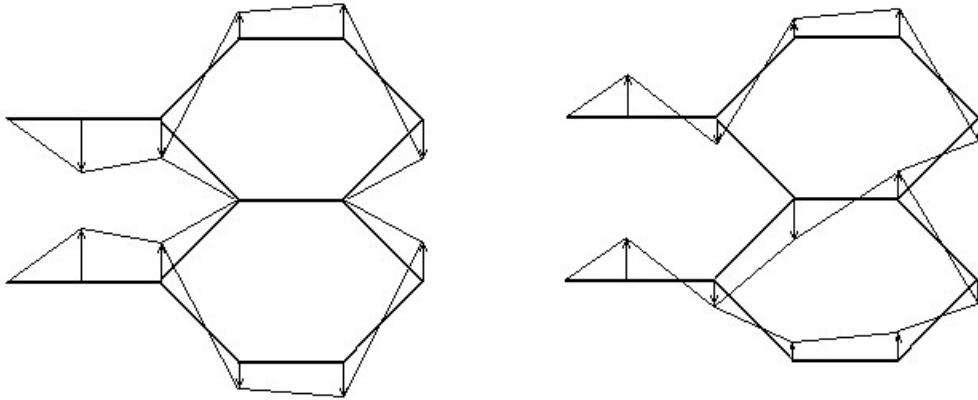


Figura 2.24.d

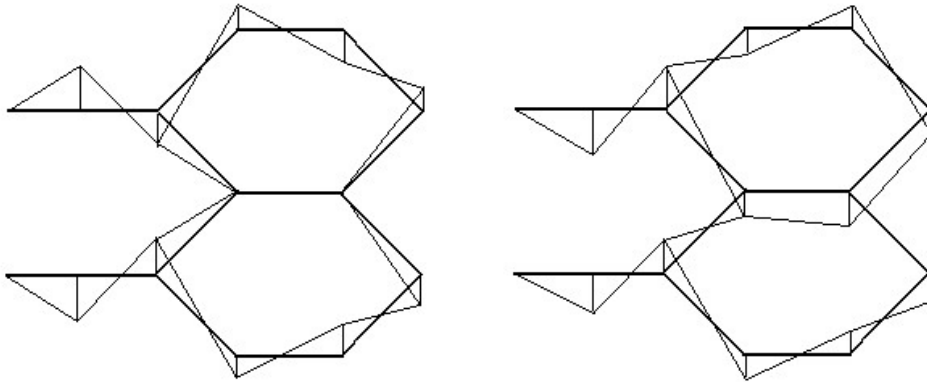


Figura 2.24.f

Să facem calculul valorilor proprii pentru substructura simetrică. Se vor obține valorile 2754 p, 2415 p, 1691 p, 917 p, 659 p. Matricea modală pentru acest subsistem va fi:

$$[\Phi_1] = \begin{bmatrix} -0,58 & 0,34 & 0,87 & -0,30 & 0,36 \\ 0,69 & -0,21 & 0,33 & -0,18 & 0,41 \\ -0,23 & -0,18 & -0,18 & -0,07 & 0,62 \\ 0,36 & 0,90 & -0,30 & 0,22 & 0,56 \\ -0,01 & -0,05 & 0,09 & 0,91 & 0,07 \end{bmatrix}$$

În Fig.2.25 se reprezintă modurile proprii de vibrație pentru această situație.

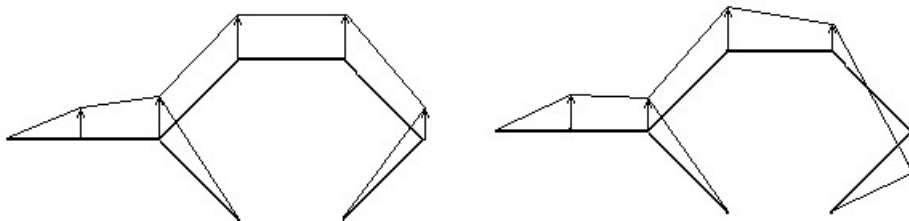


Fig.2.25a

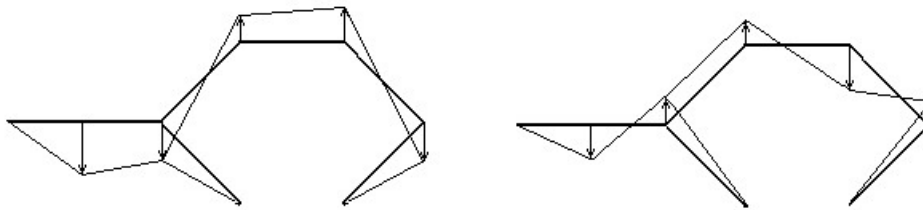


Fig.2.25b

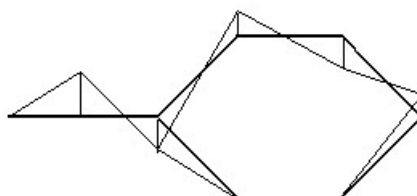


Fig.2.25c

Figura 2.25. Modurile proprii pentru substructura simetrică

2.6 Sisteme continue alcătuite din bare

2.6.1. Introducere

În cele ce urmează prezentăm proprietăți pe care le au unele sisteme mecanice continue care prezintă diferite forme de simetrie. Probleme de acest gen apar în mod frecvent în aplicațiile ingineresti și în construcții, multe sisteme mecanice utilizate în aceste domenii prezentând proprietăți de simetrie, rezultate în urma procesului de proiectare, din considerente constructive, de simplitate, de cost sau logistice. Sunt prezentate în continuare cercetări referitoare la proprietăți ale valorilor proprii și ale modurilor proprii de vibrație în cazul vibrațiilor transversale ale unui sistem de bare în care două dintre cele trei bare sunt identice. Determinarea acestor proprietăți permite ușurarea efortului și timpului de calcul și, implicit, creșterea preciziei calculelor în astfel de probleme. Pentru cazul calculului static, în rezistența materialelor există metode cunoscute și aplicate de determinarea tensiunilor și deformațiilor pentru structurile simetrice sau antisimetrice. Și pentru calculul în regim dinamic se cunosc, mai mult intuitiv, anumite proprietăți pe care le au soluțiile obținute. Lucrări care să abordeze sistematic această problemă nu prea se întâlnesc, unele rezultate au fost publicate în Vlase et al 2016, Vlase et al 2017a, 2017b, 2017c, 2018a, b.

2.6.2. Descrierea unui sistem cu bare

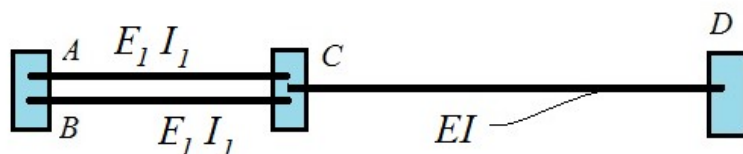


Figura 2.28

Să considerăm un sistem mecanic, continuu (Fig.2.28), alcătuit din două bare identice AC și BC legate rigid (prin sudură în cazul unui sistem ingineresc) de o a treia bară CD. Bara CD este în prelungirea barelor paralele AC și BC. În punctele A și B avem încastrare (sunt nule deplasările și rotirile capătului barei). La fel în D. În punctul C deplasările transversale ale punctului C aparținând tuturor celor trei bare și rotirea secțiunilor celor trei bare în C sunt egale, datorită legăturii rigide dintre ele. Dacă se consideră elementul infinitezimal din jurul punctului C, va trebui ca acesta să se afle în echilibru, deci forțele tăietoare din cele două bare identice să fie egale cu forța tăietoare din bara CD. O relație similară se obține și pentru echilibrul momentelor încovoietoare. Aceste considerații vor defini condițiile de capăt (boundary conditions).

2.6.3. Ecuațiile vibrațiilor transversale ale sistemului mecanic prezentat

Pentru o bară continuă, cu secțiune constantă, vibrațiile transversale ale sistemului sunt descrise, în lipsa unei forțe distribuite de-a lungul barei, de ecuațiile clasice (Buzdugan et al. 1982, Bratu 2000, Bratu și Drăgan 2002, Timoshenko și Gere 2009, Teodorescu 1972):

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6.1)$$

unde: v este săgeata barei, x este distanța de la capătul din stanga a barei până la punctul care are deplasarea v , ρ reprezintă densitatea materialului, A aria secțiunii barei, E modulul de elasticitate longitudinal, I_z momentul de inerție al secțiunii în centrul de greutate.

Conform procedurii clasice, pentru rezolvarea ecuației diferențiale prezentate (Arnold 1973, Henderson și Luca 2016, Myint-U 1977, Radeș 2010, Șabac 1981) se caută o soluție sub forma:

$$v(x, t) = u_0 \Phi(x) \sin(pt + \theta) \quad (2.6.2)$$

Dacă se notează:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda_1 \sqrt{pl_1} & \cos \lambda_1 \sqrt{pl_1} & \operatorname{sh} \lambda_1 \sqrt{pl_1} & \operatorname{ch} \lambda_1 \sqrt{pl_1} \\ \cos \lambda_1 \sqrt{pl_1} & -\sin \lambda_1 \sqrt{pl_1} & \operatorname{ch} \lambda_1 \sqrt{pl_1} & \operatorname{sh} \lambda_1 \sqrt{pl_1} \end{bmatrix} \quad (2.6.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{\lambda}{\lambda_1} & 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.21)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\lambda_1\sqrt{pl_1} & \sin\lambda_1\sqrt{pl_1} & ch\lambda_1\sqrt{pl_1} & sh\lambda_1\sqrt{pl_1} \\ -\sin\lambda_1\sqrt{pl_1} & \cos\lambda_1\sqrt{pl_1} & sh\lambda_1\sqrt{pl_1} & ch\lambda_1\sqrt{pl_1} \end{bmatrix} \quad (2.6.22)$$

$$D = \begin{bmatrix} \sin\lambda_1\sqrt{pl_1} & \cos\lambda_1\sqrt{pl_1} & sh\lambda_1\sqrt{pl_1} & ch\lambda_1\sqrt{pl_1} \\ \cos\lambda_1\sqrt{pl_1} & -\sin\lambda_1\sqrt{pl_1} & ch\lambda_1\sqrt{pl_1} & sh\lambda_1\sqrt{pl_1} \\ -\frac{EI_z}{E_1 I_{z1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^3 & 0 & -\frac{EI_z}{E_1 I_{z1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^3 & 0 \\ 0 & -\frac{EI_z}{E_1 I_{z1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^3 & 0 & -\frac{EI_z}{E_1 I_{z1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^3 \end{bmatrix} \quad (2.6.23)$$

matricea sistemului se poate scrie sub forma:

$$S = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & B \\ C & C & D \end{bmatrix} \quad (2.6.24)$$

Condiția $\det(S)=0$ permite determinarea valorilor proprii pentru sistemul dat.

2.6.4. Proprietăți ale valorilor proprii și ale vectorilor proprii

Să considerăm una singură dintre barele identice AB sau AC. Vibrațiile transversale ale acestora sunt descrise de ecuația diferențială binecunoscută:

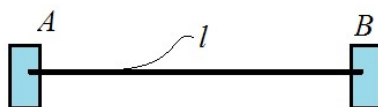


Figura 2.29

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6.25)$$

Condiții de capăt sunt:

Punctul A: $x=0$; $v(0,t)=0$; $v'(0,t)=0$ și Punctul B: $x=l$; $v(l,t)=0$; $v'(l,t)=0$

Dacă se alege pentru v funcția:

$$v(x,t) = v_0 \Phi(x) \sin(pt + \theta) \quad (2.6.26)$$

și se introduce în ecuația diferențială inițială se obține:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - p^2 \frac{\rho A_1}{E_1 I_{z1}} \Phi = 0 \quad ; \quad \lambda_1^4 = \frac{\rho A_1}{E_1 I_{z1}}, \quad (2.6.27)$$

cu soluția:

$$\Phi(x) = C_1 \sin \lambda_1 \sqrt{px} + C_2 \cos \lambda_1 \sqrt{px} + C_3 \operatorname{sh} \lambda_1 \sqrt{px} + C_4 \operatorname{ch} \lambda_1 \sqrt{px} \quad (2.6.28)$$

Capetele A și C sunt încastrate deci: $v_{AC}(0,t) = 0$; $v'_{AC}(0,t) = 0$, $v_{AC}(l,t) = 0$; $v'_{AC}(l,t) = 0$. Punând aceste condiții pentru soluția (2.6.28) constantele C_1, C_2, C_3, C_4 se determină din sistemul linear omogen:

$$[A]\{C\} = 0 \quad (2.6.29)$$

Condiția $\det(A) = 0$ permite determinarea valorilor proprii ale barei AC (sau BC). Efectuând calculele se obține:

$$\cos \lambda \sqrt{pl} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{pl} = 1 \quad (2.6.30)$$

relație care permite determinarea pulsațiilor proprii ale unei singure bare AC sau BC.

Vom demonstra următoarea teoremă:

T1. Valorile proprii pentru bara AB, încastrată la capete, sunt și valori proprii pentru întreg sistemul mecanic.

Demonstrație: Trebuie să arătăm că $\det(A)=0$ implică $\det(S)=0$. În lucrarea [74] este demonstrată această proprietate într-un caz mai general. Rezultă că proprietatea există și pentru cazul particular pe care-l avem în lucrare.

De aici rezultă că valorile proprii ale unei singure bare, încastrate la capete, sunt și valori proprii ale întregului sistem, încastrat în punctele A, B și D.

Se pot demonstra următoarele două teoreme:

T2. Pentru valorile proprii care sunt comune subsistemului format dintr-o bara încastrată la capete și sistemul total (existența lor e probată de teorema T1) vectorii proprii sunt de forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ -\Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.31)$$

T3. Pentru celelalte pulsații proprii, care nu se obțin din T1, vectorii proprii sunt de forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} \quad (2.6.36)$$

Pentru exemplificare, în cele ce urmează se prezintă modurile proprii de vibrație pentru sistemul mecanic format din trei bare din care două identice, studiat în lucrare. Pentru pulsațiile proprii ale sistemului care coincid cu cele ale unei singure bare încastrate la cele două capete, modurile proprii de vibrație sunt antisimetrice, cele două bare identice vibrează în contrafază (Fig.2.30.a), iar cea de-a treia bara se găsește în

repaus. Pentru celelalte pulsații proprii de vibrație, barele identice au modurile de vibrație identice și au aspectul din Fig.2.30.b.

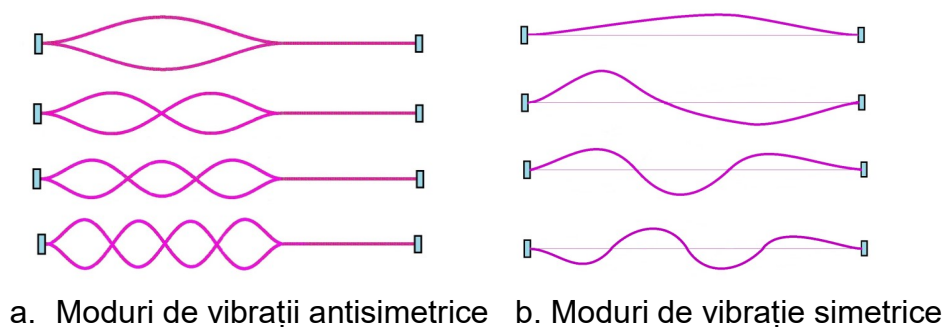


Figura 2.30

2.7 Analiză modală

În acest domeniu prezentarea și descrierea metodei este la momentul de față bine stabilită și cunoscută, dar o trecere în revistă a modalității de rezolvare a vibrațiilor unor astfel de sisteme pentru a răspunde scopului tezei se impune (Radeș 2010, Timoshenko și Zoung 1955, Meirovitch 1996, Guckenheimer și Holmes 1983, Heylen et al 1997, Horn 1985, Parlett 1980 etc).

2.7.1. Introducere

O clasă extrem de largă de probleme în cadrul mecanicii sistemelor elastice, continue sau discrete, conduce, prin linearizarea forțelor care se manifestă între diferitele componente ale sistemului, la ecuații de evoluție (mișcare) de forma (Anosov și Arnold 1988, Deminovici și Maron 1973):

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.7.1.a)$$

Dacă se vor considera și amortizările proporționale care apar în sistem, se va obține forma:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.7.1.b)$$

care reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi cu coeficienți constanți. Există și aplicații în care forma ecuațiilor este cea dată de ec. (2.7.1.b) dar coeficienții matriceali care apar nu mai sunt constanți. Ei pot să conțină timpul explicit sau parametri care pot depinde de configurația sistemului, dependentă, la rândul ei de timp. Pentru aceste situații este posibil să se facă un studiu incremental al sistemului de ecuații obținut, pe intervale de timp pe care se poate considera că acești coeficienți sunt constanți. Capitolul care urmează face o analiză a unor astfel de sisteme considerând coeficienții matriceali constanți.

2.7.2. Moduri de mișcare

O metodă de analiză a sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți este metoda superpoziției modale. Analiza modală pe lângă faptul că

reprezintă un instrument puternic care permite analiza sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți oferă în același timp și un suport intuitiv pentru o bună înțelegere fizică a fenomenelor. În esență metoda constă în transformarea sistemului inițial într-o formă mai simplă, cu ajutorul unei transformări lineare:

$$\{\Delta\} = [\Phi]\{q\} \quad (2.7.2)$$

unde matricea $[\Phi]$ poartă numele de matrice modală. Pentru ecuațiile de mișcare obținute sub forma (2.7.1.a) această transformare există întotdeauna. Pentru ecuațiile (2.7.1.b) matricea amortizărilor proporționale $[C]$ trebuie să îndeplinească anumite condiții pentru a se obține o formă mai simplă, condiții care vor fi menționate. Cu această transformare sistemul inițial (2.7.1.a) sau (2.7.1.b) se transformă (se *sparge*) într-un număr de n ecuații diferențiale independente, de ordinul doi și cu coeficienți constanți. Rezolvarea unei astfel de ecuații nu mai este o problemă.

2.7.2.1. Pulsații proprii

Să considerăm pentru început ecuațiile (2.7.1.a). Noțiunea de pulsație proprie pentru un sistem fizic care poate executa o mișcare de vibrație poate fi introdusă în cazul așa numitelor vibrații libere, adică este cazul în care sistemul nu este excitat din exterior.

Teoria ecuațiilor diferențiale lineare cu coeficienți constanți este bine cunoscută și vom prezenta, pe scurt, metodologia de rezolvare. Pentru sistem se vor cauta soluții de forma:

$$\{\Delta(t)\} = \{X\} \cos(\omega t + \psi) \quad (2.7.4)$$

Valorile proprii depind doar de proprietățile elastice și de distribuția maselor (caracteristicile naturale ale sistemului). Ele nu sunt influențate de valorile inițiale pe care le au pozițiile și vitezele și nici de forțele externe care acționează în sistem. Pentru un sistem cu un număr finit de grade de libertate numărul valorilor proprii va fi același cu numărul gradelor de libertate.

2.7.2.2. Proprietăți generale ale valorilor proprii

P1. Dacă matricea de rigiditate $[K]$ este singulară atunci $\omega^2 = 0$ este o valoare proprie pentru ecuația caracteristică.

Demonstrație: Într-adevăr $P(0) = \det([K] - 0 \cdot [M]) = \det[K] = 0$ deci rezultă că $\omega^2 = 0$ este valoare proprie.

Mai mult, se poate arăta că dacă $\text{rang}([K]) = n-l$ atunci $\omega^2 = 0$ va fi o rădăcină a ecuației caracteristice $P(\omega^2) = 0$ cu ordinul l de multiplicitate.

P2. Dacă $[K]$ și $[M]$ sunt simetrice, valorile proprii vor fi reale. (Acest lucru se întâmplă întotdeauna în sistemele ingineresti studiate în cadrul tezei).

Demonstrație: Dacă ecuația cu coeficienți reali $\det ([K] - \lambda [M]) = 0$ admite pe λ ca rădăcină complexă, atunci o admite și pe conjugata ei $\bar{\lambda}$. Se poate deci scrie:

$$[K]\{\Phi_i\} = \lambda_i [M]\{\Phi_i\} \quad (2.7.13)$$

$$[K]\{\bar{\Phi}_i\} = \bar{\lambda}_i [M]\{\bar{\Phi}_i\} \quad (2.7.14)$$

P3. Dacă matricele $[K]$ și $[M]$ sunt pozitiv definite, valorile proprii sunt și ele pozitive. Pentru sistemele mecanice analizate în studiul nostru această condiție este îndeplinită întotdeauna.

2.7.2.3. Proprietăți de ortogonalitate

Deoarece matricea $[K]$ este o matrice simetrică se poate scrie:

$$\{X_i\}^T [K] \{X_j\} = \{X_j\}^T [K] \{X_i\} \quad (2.7.18)$$

Relația (2.7.18) se demonstrează cu ușurință prin scrierea explicită și calcul direct.

Le fel se întâmplă cu matricea $[M]$:

$$\{X_i\}^T [M] \{X_j\} = \{X_j\}^T [M] \{X_i\} \quad (2.7.19)$$

Să scriem ecuația valorilor proprii sub forma:

$$[K]\{X_i\} - \omega_i^2 [M]\{X_i\} = 0 \quad (2.7.20)$$

Se pot înlocui vectorii proprii $\{X\}$ cu modurile proprii normalizate și se obține:

$$\{\Phi_j\}^T [M] \{\Phi_i\} = 0$$

și:

$$\{\Phi_j\}^T [K] \{\Phi_i\} = 0.$$

Proprietatea arătată se exprimă spunând că modurile proprii sunt ortogonale prin matricea $[M]$ și, respectiv prin $[K]$.

2.7.2.4. Câțul Rayleigh

Dacă în relația:

$$[K]\{X_i\} - \omega_i^2 [M]\{X_i\} = 0 \quad (2.7.26)$$

înmulțim la stânga cu $\{X_i\}^T$, obținem:

$$\{X_i\}^T [K] \{X_i\} - \omega_i^2 \{X_i\}^T [M] \{X_i\} = 0 \quad (2.7.27)$$

de unde:

$$\omega_i^2 = \frac{\{X_i\}^T [K] \{X_i\}}{\{X_i\}^T [M] \{X_i\}} \quad (2.7.28)$$

Relația (2.7.28) poartă numele de câtu lui Rayleigh. Se poate demonstra că, dacă se aleg niște vectori proprii aproximativi (estimați) $\{X_i\}$, valoarea aproximativă obținută pentru ω_i^2 este foarte bună. Din acest motiv câtu lui Rayleigh este utilizat în metodele numerice pentru calculul aproximativ al pulsațiilor proprii. Binețeles, în relația (2.7.8) se poate înlocui $\{X_i\}$ cu $\{\Phi_i\}$.

2.7.2.5. Relații de ortogonalitate generalizate

Să considerăm relația:

$$[K]\{\Phi_j\} - \omega_j^2[M]\{\Phi_j\} = 0 \quad (2.7.29)$$

Utilizând această relație se poate exprima $\{\Phi_j\}$ în două moduri distincte:

$$i) \quad \{\Phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} [M]^{-1}[K]\{\Phi_j\} \quad (2.7.30)$$

$$ii) \quad \{\Phi_j\} = \omega_j^2 [K]^{-1}[M]\{\Phi_j\} = \omega_j^2 ([M]^{-1}[K])^{-1}\{\Phi_j\} \quad (2.7.31)$$

Ținând seama de aceste două relații, proprietățile de ortogonalitate pot fi generalizate în două direcții complementare.

Am obținut două relații (2.7.33) și (2.7.34) care pot fi aranjate într-una singură, care poartă numele de proprietățile de ortogonalitate generalizate:

$$\{\Phi_i\}^T [M] ([M]^{-1}[K])^p \{\Phi_j\} = 0 \quad , \quad p \in Z. \quad (2.7.35)$$

2.7.2.6. Matricea de amortizare

Matricea de amortizare de tip Caughey va fi definită drept o combinație lineară obținută cu matricele ortogonale $[M]([M]^{-1}[K])^p$:

$$[C] = \sum_{r \in Z} \alpha_r [M] ([M]^{-1}[K])^r \quad \text{cu: } \alpha_r \in R. \quad (2.7.36)$$

Dacă se consideră un sistem mecanic cu n grade de libertate combinația lineară va conține doar n termeni independenți, deci seria este finită:

$$[C] = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r [M] ([M]^{-1}[K])^r = [M] \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r ([M]^{-1}[K])^r \quad (2.7.37)$$

Matricea de amortizare Rayleigh, definită anterior, se va obține ca un caz particular al relației (2.7.36), prin reținerea numai a primilor doi termeni:

$$[C] = [C_0] + [C_1] = \alpha_0 [M] + \alpha_1 [K] \quad (2.7.38)$$

2.7.2.7. Normalizarea modurilor de vibrație

Am văzut anterior că soluția sistemului de ecuații lineare care oferă modurile proprii de vibrație este nedeterminată. O soluție a problemei de valori proprii pentru un sistem vibrant linear va consta dintr-un vector unic determinat care conține cele n

valorii proprii și sistemul de n vectori proprii (amplitudinile), odată nedeterminați (determinați până la un factor). Este comod de a lucra numeric cu vectori determinați complet. Eliminarea acestei nedeterminări care este introdusă de un factor de scară poartă numele de normalizare. Există mai multe posibilități de a face această normalizare. Cele mai utilizate sunt prezentate în cele ce urmează:

- se consideră că amplitudinea primului element din vectorul modal este egal cu unitatea. Se obțin în acest caz vectori modali determinați la care, în toate cazurile, primul element din vector este unitatea. Dacă primul element este zero, se face o reordonare în scrierea ecuațiilor de mișcare;
- se consideră amplitudinea maximă pentru fiecare mod de vibrație ca fiind egală cu unitatea. Vectorii modali vor avea elemente mai mici sau egale cu unu;
- se impune ca $\{X_i\}^T [M] \{X_i\} = 1$. Se spune că am definit forma normalizată prin matricea inerțială $[M]$ a modului de vibrație i . Normarea de acest fel poartă numele de normare inerțială;
- se consideră condiția ca $\{X_i\}^T \{X_i\} = 1$. Suma pătratelor amplitudinilor fiecărui mod de vibrație trebuie să fie 1. Vectorii $\{X_i\}$ devin versori pentru direcția definită de modul propriu.

Prin operația de normalizare a modurilor proprii (direcțiile proprii) prezentată mai sus acestea vor deveni unic determinate.

2.7.2.8. Decuplarea ecuațiilor de mișcare

Să considerăm sistemul de ecuații diferențiale obținut pentru descrierea unui sistem mecanic linear, cu parametri concentrați:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (2.7.39)$$

Dacă se face transformarea: $\{\Delta\} = [\Phi]\{q\}$, se obține un sistem de ecuații diferențiale în necunoscutele $\{q\}$:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [C][\Phi]\{\dot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{F\} \quad (2.7.40)$$

Să presupunem că matricea amortizărilor vâscoase $[C]$ admite o factorizare de tip Caughey. În acest caz sistemul de ecuații se poate decupla, prin înmulțire la stânga cu transpusa matricei modale $[\Phi]^T$:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (2.7.41)$$

Dacă se ține seama de relațiile de ortogonalitate, utilizând notațiile de mai sus se obține că sistemul de ecuații diferențiale inițial se decuplează într-un set de n ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, de ordinul doi, independente:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 + k_1 q_1 &= F_1 \\ m_2 \ddot{q}_2 + c_2 \dot{q}_2 + k_2 q_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (2.7.44)$$

$$m_n \ddot{q}_n + c_n \dot{q}_n + k_n q_n = F_n$$

Rămân de rezolvat n ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, de ordinul doi, independente. Să scriem una dintre ecuațiile diferențiale din setul de ecuații:

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0_i \quad (2.7.46)$$

Conform teoriei generale a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți, soluția omogenă este:

$$q_{io} = A_i \exp(-i\beta t) \sin(\omega_i t + \psi_i) \quad (2.7.47)$$

La aceasta se va adăuga o soluție particulară q_{ip} .

Soluția sistemului inițial omogen se obține prin suprapunere modală:

$$\{\Delta_o\} = \{\Phi_1\} q_{10} + \{\Phi_2\} q_{20} + \dots + \{\Phi_n\} q_{n0} \quad (2.7.48)$$

2.8 Concluzii

În cadrul acestui capitol s-au prezentat rezultate sintetizate în articole în care sunt folosite simetriile structurale care există în sistemele mecanice reale, utilizate în practică pentru obținerea unor structuri, pentru a ușura calculul valorilor proprii și a modurilor proprii de mișcare pentru aceste sisteme. Sunt analizate mai întâi sistemele discrete, făcându-se analiza unui sistem tehnic real în care găsim două motoare identice care acționează aceeași transmisie. Sunt studiate vibrațiile torsionale care apar în cadrul transmisiei autovehiculului și sunt identificate proprietăți care permit ușurarea calculului. Studiul este extins apoi și în cadrul altor sisteme mecanice discrete cu simetrii, în care au loc vibrații torsionale. Apoi este analizată o a doua categorie de exemple, care privesc sisteme mecanice continue cu elemente sau părți simetrice. Scopul acestei prezentări este de a identifica proprietăți utile pentru a ușura analiza unei astfel de structuri. S-au demonstrat proprietăți ale valorilor proprii și ale modurilor proprii de vibrații care permit ușurarea și simplificarea calculului unei structuri reale. Acest lucru va permite scurțarea timpului și a costului privind calculele necesare. Analiza acestor probleme deja studiate a făcut posibilă fixarea direcției de cercetare în cadrul tezei de doctorat și focusarea pe sistemele continue unde studiile întreprinse sunt doar într-un stadiu incipient.

În finalul capitolului se face o prezentare succintă a Analizei modale aplicate pentru studiul sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Prezentarea introduce principalele noțiuni care vor fi utilizate în cadrul tezei de doctorat.

Capitolul 3.

3. VIBRAȚIILE SISTEMELOR CONTINUE

3.1 Introducere

Întrucât în cadrul tezei ne vom ocupa de studiul sistemelor continue cu bare, în cele ce urmează se va face o prezentare, clasică, a rezultatelor cunoscute în domeniu. Prezentarea din capitolul de față urmărește, în principal, rezultatele din Vlase et al 2017a, 2017b, Nastac et al 2018 pentru barele continue. O bară poate avea vibrații transversale (de încovoiere), vibrații longitudinale (axiale) și vibrații torsionare (de răsucire) (Ivan 1985, Gioncu și Ivan 1983, Gillich 2012, Den Hartog 1960, Douglas 2012).

3.2 Vibrațiile transversale ale barelor

Barele drepte, omogene, prismatice cu un plan de simetrie vor putea vibra în acest plan (Landau și Lifchitz 1967, Vlase 2012, Vlase și Teodorescu 2013). Dacă x este de-a lungul barei, y este axa în care are loc mișcarea iar z este axa neutră a secțiunii atunci avem din literatură (Buzdugan et al 1982, Voinea et al 1976, Silaș 1967, 1968, 1973, Meirovitch 1970, Mangeron 1962) ecuația fibrei medii deformată:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \quad (3.1)$$

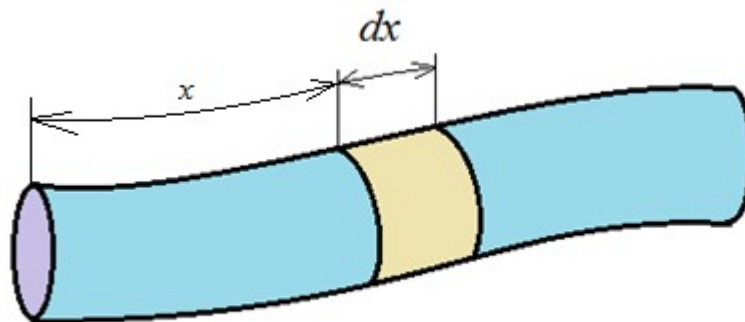


Figura 3.1

În această relație $M(x)$ reprezintă momentul încovoiator în secțiunea x . Mărimea EI_z reprezintă modulul de rigiditate la încovoiere. Forța tăietoare în secțiunea x este:

$$\frac{dM(x)}{d x} = T(x) \quad (3.2)$$

iar distribuția lineară a forțelor pe lungime este dată de:

$$\frac{dT(x)}{d x} = -p(x) \quad (3.3)$$

3.3 Pulsațiile proprii și modurile proprii de mișcare

Conform teoriei generale a ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți se caută o soluție a ecuației diferențiale sub forma:

$$v(x,t) = \Phi(x) \sin(pt + \theta) \quad (3.10)$$

În această relație $\Phi(x)$ este o funcție care reprezintă forma deformată a barei iar p este pulsația vibrației. Dacă se introduce (3.10) în rel. (3.4) considerându-se forța perturbatoare $p_0(x,t)=0$ se obține:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \frac{\rho A}{EI_z} p^2 \Phi(x) = 0 \quad (3.11)$$

care reprezintă o ecuație diferențială de ordinul 4 în x , cu coeficienți constanți. Să facem notația:

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI_z} \quad (3.12)$$

Ecuația (3.11) devine:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \lambda^4 p^2 \Phi(x) = 0 \quad (3.11')$$

și are soluția:

$$\Phi(x) = C_1 \sin(\lambda \sqrt{p} x) + C_2 \cos(\lambda \sqrt{p} x) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda \sqrt{p} x) + C_4 \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{p} x) \quad (3.13)$$

Funcțiile proprii sunt date de relația:

$$\Phi_n(x) = C_1 \sin(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_2 \cos(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_4 \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{p_n} x) \quad (3.23)$$

Modurile proprii de vibrație sunt date de relația:

$$v_n(x,t) = [C_1 \sin(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_2 \cos(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_3 \operatorname{sh}(\lambda \sqrt{p_n} x) + C_4 \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{p_n} x)] \sin(pt + \theta) \quad (3.24)$$

unde constantele C_1, C_2, C_3 și C_4 sunt determinate până la un factor arbitrar.

Funcțiile proprii sunt ortogonale între ele, adică avem:

$$\int_0^l \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = 0 \quad \text{pentru } i \neq j. \quad (3.25)$$

3.4 Vibrațiile longitudinale ale barelor

Să considerăm o bară prismatică de secțiune constantă (Fig.3.2), cu secțiunea A , lungimea l , modulul de elasticitate longitudinal E și densitatea ρ . Se separă un element infinitezimal de lungime dx la distanța x de capăt.

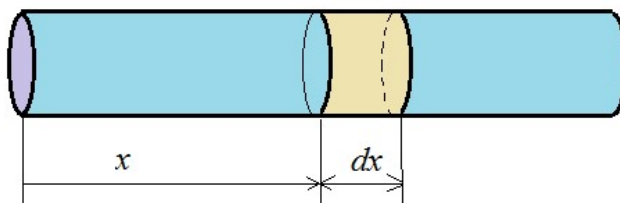


Figura 3.2

Efortul de întindere/compresiune N apărut în secțiunea x este legat de deformația specifică $\frac{\partial u}{\partial x}$ prin relația cunoscută:

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.28)$$

Variația forței de inerție în bară de-a lungul lungimii este:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.29)$$

unde ρ este densitatea materialului.

Variația efortului de întindere/compresiune pe lungime este:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.30)$$

În acest caz ecuația de echilibru dinamic devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.31)$$

Pulsații proprii și funcții proprii la vibrațiile longitudinale

Rezolvarea ecuației diferențiale care descrie mișcarea vibrațiilor torsionale libere ale barei, implică, conform teoriei clasice, căutarea unor soluții de forma:

$$u(x, t) = \Theta(x) \sin(pt + \theta) \quad (3.36)$$

Punând condiția ca această soluție să satisfacă ecuația (3.31) se obține:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \sin(pt + \theta) = -p^2 \frac{\rho}{E} \Theta \sin(pt + \theta) \quad (3.37)$$

sau, după simplificări:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + p^2 \frac{\rho}{E} \Theta = 0 \quad (3.38)$$

Dacă se notează:

$$\alpha^2 = \frac{p^2 \rho}{E} \quad ; \quad \alpha = p \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (3.39)$$

se obține soluția clasică:

$$\Theta(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (3.40)$$

și:

$$\varphi(x, t) = (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \sin(pt + \theta) \quad (3.41)$$

3.5 Vibrațiile torsionale ale barelor

Să considerăm o bară de secțiune circulară constantă (Fig.3.3), care are o rigiditate la răsucire GIp și cu momentul de inerție masic pe unitatea de lungime J . Se separă un element infinitezimal de lungime dx la distanța x de capăt.

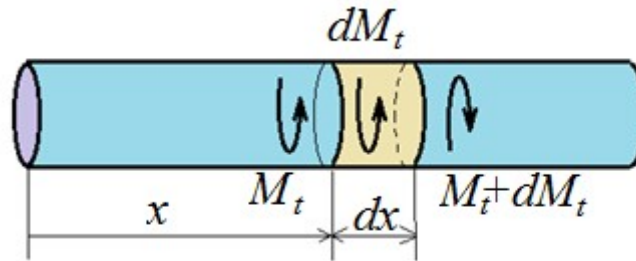


Figura 3.3

Între momentul de torsiune în secțiunea x și unghiul de răsucire φ al secțiunii există relația stabilită:

$$M_t = GI_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.62)$$

Variația momentului în lungul barei devine:

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} = GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

Momentul forțelor de inerție pe unitatea de lungime a barei este, considerând teorema momentului cinetic aplicată pentru elementul infinitezimal:

$$\frac{\partial M^i}{\partial x} = J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.64)$$

Dacă nu există mase concentrate atașate de bară pe lungime, momentul de inerție masic J se calculează cu relația:

$$J = \rho I_p \quad (3.65)$$

unde ρ este densitatea materialului.

În acest caz ecuația de echilibru dinamic devine:

$$GI_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.66)$$

Pulsații proprii și funcții proprii

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale care descrie mișcarea vibrațiilor torsionale libere ale barei, conform teoriei clasice, se caută soluții de forma:

$$\varphi(x, t) = \Psi(x) \sin(pt + \theta) \quad (3.71)$$

Punând condiția ca această soluție să satisfacă ecuația (3.66) se obține:

$$GI_p \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \sin(pt + \theta) = -p^2 J \Psi \sin(pt + \theta) \quad (3.72)$$

sau, după simplificări:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{p^2 J}{GI_p} \Psi = 0 \quad (3.73)$$

și:

$$\varphi(x, t) = (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x) \sin(pt + \theta) \quad (3.76)$$

Capitolul 4

4. PROPRIETĂȚI LA VIBRAȚII ALE SISTEMELOR CONTINUE

4.1 *Introducere*

În practica ingineriască se întâmplă deseori să se utilizeze, la proiectarea și construcția unui sistem mecanic, părți identice, din motive legate de timpul de proiectare, costurile materialelor și timpul de execuție. În statica construcțiilor simetria acestor tipuri de structuri a fost studiată și utilizată pentru ușurarea calculului. În cazul analizei dinamice al unui astfel de sistem, în literatura de specialitate au fost făcute câteva observații cu privire la metodele de calcul ale sistemelor simetrice, însă nu există încă un studiu sistematic; unele cazuri speciale au fost tratate în literatura de specialitate și prezentate în primele capitole ale acestei teze. Proprietățile pe care le prezintă structurile studiate vor reduce timpul și efortul de calcul, ar implica în mod automat costuri de dezvoltare și testare mai mici și ar crește precizia calculului. Din perspectiva analizei dinamice și, în particular, a vibrațiilor pentru sistemele cu elemente elastice, deși unele proprietăți au fost observate mai de mult (vezi Meirovitch (1996)), nu au fost studiate metodic. Cazuri particulare au fost studiate în Mangeron et al. (1991), Vlase and Chiru (2009), Shi and Parker (2013), Paliwal and Pandey (1996), Celep (1978). În ceea ce urmează se prezintă studiul unor noi sisteme structurale cu bare continue. O parte dintre rezultate au fost deja diseminate în Năstac et al. 2018, Vlase et al. 2016,2017,2018.

4.2 *Cuplarea vibrațiilor transversale și longitudinale în cazul unui sistem mecanic cu două bare identice*

4.2.1. *Descrierea problematicei studiate*

În acest paragraf se vor studia vibrațiile transversale și longitudinale a unui sistem mecanic alcătuit din bare. În continuare se va studia cazul unui sistem mecanic alcătuit din 3 grinzi, considerate în plan, dintre care două sunt identice. Vibrațiile transversale sunt considerate a avea loc în planul definit de structura celor trei grinzi. Vibrațiile longitudinale vor avea loc, de asemenea, în acest plan. Se produce în acest caz o cuplare între vibrațiile longitudinale și transversale, determinată de legătura rigidă dintre grinzi.

4.2.2. Sistem mecanic cu două bare identice

Să considerăm o structură mecanică (Fig.4.1) care constă din două bare identice MP și NP, fixate rigid de o a treia bară PR. Barele pot vibra transversal pe lungimea lor, în planul structurii și, în același timp, au vibrații longitudinale, în lungul axei.

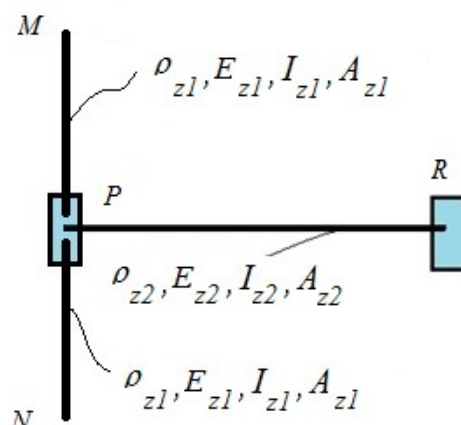


Figura 4.1. Sistemul mecanic cu bare

M și N sunt capete libere motiv pentru care momentul de încovoiere, forța tăietoare și forța longitudinală sunt zero în aceste puncte (șase condiții de capăt). Capătul R al barei PR este încastrat. Atunci săgeata, rotirea și torsiunea în punctul R sunt zero. Condițiile de continuitate în punctul P duc la 9 condiții de contur. În final se obțin 18 condiții de contur care permit determinarea celor 18 constante de integrare.

4.2.3. Ecuațiile vibrațiilor transversale și longitudinale

Se va considera o bară omogenă, de secțiune constantă. Pentru acest caz vibrațiile transversale ale barei sunt descrise, dacă nu există forțe distribuite de-a lungul lungimii barei, de ecuația binecunoscută (vezi Buzdugan et al. (1982), Sharma and Marin (2013), Marin and Lupu (1998), Marin (2010)):

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

În ecuația (4.1) s-a notat cu v – săgeata barei, A – aria secțiunii transversale, ρ – densitatea materialului, E – modulul de elasticitate longitudinal, I_z – momentul de inerție al ariei secțiunii față de axa Cz a secțiunii transversale, C fiind centrul de masă și x – distanța de la capătul din stânga al barei până la secțiunea transversală. Metoda clasică de rezolvare a acestei ecuații este de a căuta o soluție de forma (Tofan și Vlase 1985):

$$v(x,t) = \Phi(x) \sin(pt + \theta) \quad (4.2)$$

4.2.4. Vectori și valori proprii

În cele ce urmează se evidențiază câteva proprietăți pentru vectorii și valorile proprii ale acestui sistem. Să considerăm acum una dintre cele două bare identice (MP

sau NP), liberă în M (sau N) și încastrată în P. Vibrațiile transversale sunt descrise de ecuația diferențială (1), sub forma:



Figura 4.2. Bara MP

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho_1 A_1}{E_1 I_{z1}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.25)$$

care are soluția prezentată anterior:

$$v(x, t) = \Phi(x) \sin(pt + \theta)$$

cu:

$$\Phi_{MP}(x) = \alpha_1 \sin \lambda_1 \sqrt{px} + \alpha_2 \cos \lambda_1 \sqrt{px} + \alpha_3 \operatorname{sh} \lambda_1 \sqrt{px} + \alpha_4 \operatorname{ch} \lambda_1 \sqrt{px} \quad (4.26)$$

Pentru vibrațiile longitudinale, ecuația care le descrie, pentru bara MP (sau NP) este (Buzdugan et al. (1982))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.27)$$

Soluția ecuației (4.27), prezentată anterior (rel. (4.11)) va fi:

$$u(x, t) = \Psi(x) \sin(pt + \theta)$$

$$\Psi_{MP}(x) = \alpha_5 \sin \delta_1 px + \alpha_6 \cos \delta_1 px \quad (4.28)$$

4.3 O metodă semianalitică pentru studiul vibrațiilor sistemelor mecanice cu bare cu o structură cu simetrii

4.3.1. Introducere

În secțiunea de față se prezintă o metodă semianalitică pentru studiul vibrațiilor unui sistem mecanic alcătuit din bare care definește o structură cu simetrii. Metoda are scopul de a ușura obținerea rezultatelor și, mai ales, obținerea unor informații rapide privind comportarea sistemului la vibrații. Metoda elementelor finite, utilizată curent în inginerie, oferă în general rezultate într-o formă standard. În analiza unor astfel de sisteme, în mecanica construcțiilor, de multe ori este necesar să se determine eforturile secționale sau deformațiile și rotațiile într-un anumit punct. Trecerea rezultatelor din forma impusă, dată de metoda elementelor finite la forma solicitată de aplicația pe care o avem de rezolvat poate duce la un timp semnificativ pierdut pentru elaborarea unui soft care să facă acest lucru, relativ simplu, dar cu un cost de timp. Metoda este aplicată pentru sistemele simetrice pe care le studiem în această lucrare. Se va prezenta metoda pe cazul unei structuri care efectuează vibrații perpendiculare pe planul structurii. Metoda permite descreșterea efortului de calcul și oferă, în mod rapid,

informații utile despre comportarea sistemului și despre solicitările care pot apărea. Metoda a apărut ca o necesitate, în analiza pe care am făcut-o în cadrul lucrării.

4.3.2. Prezentarea sistemului

O analiză clasică a comportării la vibrații a unei structuri mecanice cu simetrie impune calculul valorilor proprii și a modurilor proprii de mișcare ale sistemului. Pentru a se obține valorile proprii au fost dezvoltate câteva metode numerice foarte eficiente, pentru anumite modele utilizate. Pasul următor constă în determinarea vectorilor proprii care, în esență, constă în rezolvarea unui sistem linear omogen. Dacă avem sisteme mecanice alcătuite din bare, larg utilizate în construcții, o modelare care să ne ofere ecuația caracteristică este relativ ușor de realizat. Rezolvarea unei astfel de ecuații poate fi foarte dificil de realizat, chiar și pentru cazul, foarte simplu, al unei singure bare.

Ideea de bază în metoda prezentată este de a folosi beneficiile reprezentărilor analitice, care tratează structura ca un mediu continuu și în cadrul căreia avem reprezentări punctuale ale momentelor, forțelor tăietoare, rotațiilor și săgeților. Analiza unei structuri în reprezentare analitică devine mai sugestivă și mai ușor de realizat. În același timp dorim să scăpăm de dificultatea determinării valorilor proprii din reprezentarea analitică. Și atunci, pentru a determina valorile proprii (pulsatiile proprii de vibrație) se va utiliza metoda elementelor finite, care are metode numerice extrem de puternice și bine puse la punct pentru a realiza acest lucru. După aceea se vor determina și modurile proprii de vibrație, operație care constă în rezolvarea unor sisteme lineare simple, lucru care va permite utilizarea, apoi, a reprezentărilor analitice, care ne pot oferi informații bogate și sugestive.

4.3.3. Modelul analitic al sistemului cu bare

Se prezintă metoda pentru un sistem mecanic alcătuit din patru 4 bare dintre care 2 identice (Fig.4.3) care se găsesc într-un plan. Vibrațiile vor avea loc într-un plan perpendicular pe planul barelor. Se iau în considerare și vibrațiile torsionale. Simetria sistemului poate fi utilă pentru a reduce dimensiunea sistemului de ecuații diferențiale care se obține (vezi Mangeron et al. (1991), Vlase and Chiru (2009)). Va apărea un cuplaj între vibrațiile transversale și vibrațiile torsionale.

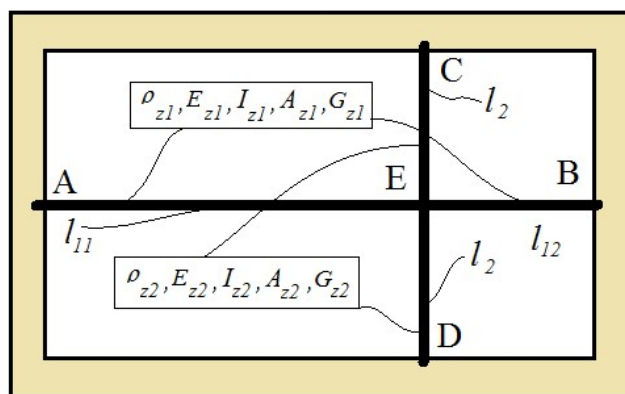


Figura 4.3. Geometria sistemului mecanic cu bare

Să considerăm o structură de bare omogene, de secțiune constantă, ca în (Fig.4.3) alcătuită din patru bare cu geometria și caracteristicile mecanice necesare pentru calcul cunoscute AE, BE, CE și DE. Sistemul este fixat rigid în A, B, C și D. Punctul E este punct comun tuturor barelor din sistem, deci săgețile celor patru bare în E vor fi egale. Barele vor avea vibrații într-un plan perpendicular pe planul structurii. Toate barele vor avea de asemenea vibrații torsionale, de care trebuie să ținem seama, din cauză că rotațiile în urma vibrațiilor transversale a unei bare în E se transformă în torsiune pentru barele perpendiculare.

4.3.4. Ecuațiile vibrațiilor libere transversale și torsionale

În cele ce urmează se consideră o bară omogenă continuă cu secțiune constantă. Pentru această vibrațiile transversale ale barei sunt descrise, dacă nu există forțe distribuite de-a lungul lungimii barei, de ecuațiile bine cunoscute prezentate pentru cazul general în Buzdugan, Fetcu și Radeș (1982), Timoshenko și Gere, (2009):

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_z} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (4.39)$$

În ecuația (4.39) s-a notat: v – săgeata barei, A – aria secțiunii transversale, ρ – densitatea materialului, E – modulul de elasticitate longitudinal, I_z – momentul de inerție al secțiunii transversale în centrul de masă, față de axa z ; x – distanța de la capătul din stânga al barei până la secțiune curentă. .

Metoda clasică de rezolvare a ecuației este de a căuta soluții de forma:

$$v(x, t) = \Phi(x) \sin(pt + \theta) \quad (4.40)$$

Dacă punem condiția ca soluția (4.40) să verifice (4.39), după simplificări se obține:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - p^2 \frac{\rho A}{EI_z} \Phi = 0 \quad (4.41)$$

Vibrațiile torsionale ale unei bare sunt date de:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.45)$$

unde φ este unghiul de torsiune al barei, x este distanța de la capătul din stânga al barei până la secțiunea considerată.

4.3.5. Vectori și valori proprii

Condițiile de capăt în încastrările A, B, C și D se pot scrie ca:

Pentru bara AE:

$$\Phi_{AE}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi_{AE}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \Psi_{AE}(0) = 0$$

Pentru bara BE

$$\Phi_{BE}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi_{BE}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \Psi_{BE}(0) = 0$$

Pentru bara CE:

$$\Phi_{CE}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi_{CE}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \Psi_{CE}(0) = 0$$

Pentru bara DE:

$$\Phi_{DE}(0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Phi_{DE}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad ; \quad \Psi_{DE}(0) = 0$$

În E rotația barei AE este egală cu rotația barei CE, cu torsiunea lui BE și torsiunea lui DE. Se obține:

$$\begin{aligned} & \lambda \sqrt{p} \left[\alpha_1^{AE} \cos \lambda \sqrt{p} l_{11} - \alpha_2^{AE} \sin \lambda \sqrt{p} l_{11} + \alpha_3^{AE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_{11} + \alpha_4^{AE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_{11} \right] = \\ & = -\lambda \sqrt{p} \left[\alpha_1^{BE} \cos \lambda \sqrt{p} l_{12} - \alpha_2^{BE} \sin \lambda \sqrt{p} l_{12} + \alpha_3^{BE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_{12} + \alpha_4^{BE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_{12} \right] = \\ & = \left(\alpha_5^{CE} \sin \delta p l_2 - \alpha_6^{CE} \cos \delta p l_2 \right) = - \left(\alpha_5^{DE} \sin \delta p l_2 - \alpha_6^{DE} \cos \delta p l_2 \right) \end{aligned}$$

Aceleași condiții se obțin dacă se consideră acum rotirile barelor BE și DE egale cu torsiunile barelor AE și CE. Se obține:

$$\begin{aligned} & \lambda \sqrt{p} \left[\alpha_1^{CE} \cos \lambda \sqrt{p} l_2 - \alpha_2^{CE} \sin \lambda \sqrt{p} l_2 + \alpha_3^{CE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_2 + \alpha_4^{CE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_2 \right] = \\ & = -\lambda \sqrt{p} \left[\alpha_1^{DE} \cos \lambda \sqrt{p} l_2 - \alpha_2^{DE} \sin \lambda \sqrt{p} l_2 + \alpha_3^{DE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_2 + \alpha_4^{DE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_2 \right] = \\ & = \delta p \left(\alpha_5^{AE} \cos \delta p l_{11} - \alpha_6^{AE} \sin \delta p l_{11} \right) = - \delta p \left(\alpha_5^{BE} \cos \delta p l_{12} - \alpha_6^{BE} \sin \delta p l_{12} \right) \end{aligned}$$

Continuitatea momentelor de încovoiere și echilibrul momentelor de încovoiere cu cele de torsiune dau condițiile:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 p \left[-\alpha_1^{AE} \sin \lambda \sqrt{p} l_{11} - \alpha_2^{AE} \cos \lambda \sqrt{p} l_{11} + \alpha_3^{AE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_{11} + \alpha_4^{AE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_{11} \right] = \\ & = \lambda^2 p \left[-\alpha_1^{BE} \sin \lambda \sqrt{p} l_{12} - \alpha_2^{BE} \cos \lambda \sqrt{p} l_{12} + \alpha_3^{BE} \operatorname{sh} \lambda \sqrt{p} l_{12} + \alpha_4^{BE} \operatorname{ch} \lambda \sqrt{p} l_{12} \right] = \\ & = \delta p \left(\alpha_5^{CE} \cos \delta p l_2 - \alpha_6^{CE} \sin \delta p l_2 \right) = \delta p \left(\alpha_5^{DE} \cos \delta p l_2 - \alpha_6^{DE} \sin \delta p l_2 \right) \end{aligned}$$

4.4 Modelul unei structuri cu bare

4.4.1. Modelul mecanic

În cele ce urmează se analizează, din punctul de vedere al proprietăților menționate anterior, o structură reală, menită să susțină un chiller dintr-un ansamblu de construcții (Vasile et al 2018, Teodorescu et al 2018). Structura este alcătuită dintr-o serie de 4 tipuri de grinzi fixate între ele prin sudură (Fig.4.4). Dimensiunile diferitelor părți ale structurii sunt prezentate în Fig.6 și Fig.7. Toată structura are 20 de noduri care asigură legătura între 48 de bare. Planul median al figurii face legătura între două substructuri identice în oglindă.



Figura 4.4. Structura analizată

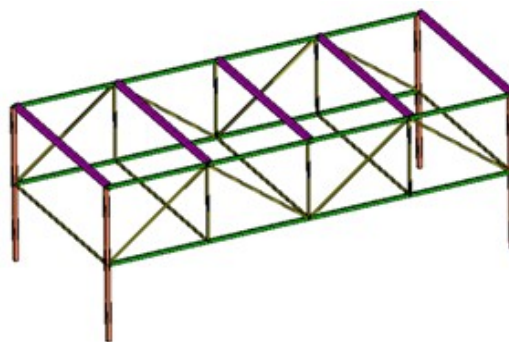


Figura 4.5. Schița structurii

4.4.2. Ecuațiile de mișcare a structurii

Dacă neglijăm amortizarea structurală și alte tipuri de amortizare proporțională care pot apărea, atunci ecuațiile de mișcare ale vibrațiilor libere sunt :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\Delta}_{1s} \\ \ddot{\Delta}_{1d} \\ \ddot{\Delta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{12} \\ 0 & K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1s} \\ \Delta_{1d} \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.57)$$

unde:

M_{11} - matricea inerțială pentru structura din Fig.4.8;

M_{12} - matricea inerțială de cuplaj între cele două părți identice și elementele de legătură;

M_{22} - matricea inerțială pentru porțiunea care asigură legătura între cele două părți identice;

K_{11} - matricea de rigiditate pentru structura din Fig.4.8;

K_{12} - matricea de rigiditate de cuplaj între cele două părți identice și elementele de legătură;

K_{22} - matricea de rigiditate pentru porțiunea care asigură legătura între cele două părți identice;

Δ_{1s} - vectorul coordonatelor independente ale jumătății din stânga a structurii;

Δ_{1d} - vectorul coordonatelor independente ale jumătății din dreapta a structurii;

Δ_2 - vectorul coordonatelor independente ale elementelor de legătură între cele două structuri identice.

Într-o formă prescurtată ecuațiile (4.57) pot fi scrise sub forma:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{0\}$$

Să considerăm acum doar o jumătate de structură, reprezentată în Fig.4.8. Ecuațiile de mișcare pentru această substructură sunt:

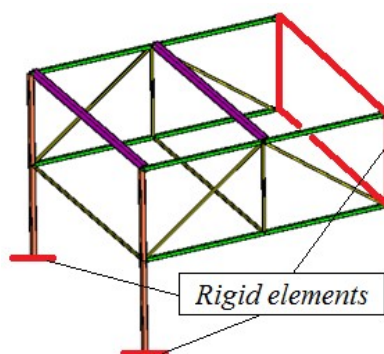


Figura 4.8. Jumătate din structură

$$[M_{11}]\{\ddot{\Delta}_{1s}\} + [K_{11}]\{\Delta_{1s}\} = \{0\}$$

pentru partea din stânga și pentru jumătatea din dreapta ecuațiile sunt:

$$[M_{11}]\{\ddot{\Delta}_{1d}\} + [K_{11}]\{\Delta_{1d}\} = \{0\}$$

Modelarea celor două sisteme am făcut-o utilizând MEF. Programul utilizat pentru calcul a fost ABAQUS.

4.4.3. Rezultate teoretice privind vibrațiile structurii

Pentru întreaga structură a rezolva problema de valori proprii revine la a rezolva ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} K_{11} - p^2 M_{11} & 0 & K_{12} - p^2 M_{12} \\ 0 & K_{11} - p^2 M_{11} & K_{12} - p^2 M_{12} \\ K_{12}^T - p^2 M_{12}^T & K_{12}^T - p^2 M_{12}^T & K_{22} - p^2 M_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Pentru substructura din Fig.4.8, problema de valori proprii revine la a rezolva ecuația caracteristică:

$$\det([K_{11}] - p^2[M_{11}]) = \{0\}$$

Dacă se consideră notațiile făcute, există următorul rezultat:

Să considerăm matricea formată din matricele cu coeficienți complecși, de

dimensiune n , notate $A, B, C, L, Z=O_n$ și matricea $M = \begin{pmatrix} A & Z & B \\ Z & A & B \\ L & L & C \end{pmatrix}$.

atunci $\det(M)$ este divizibil prin $\det(A)$.

Demonstrația este prezentată în lucrarea Vlase S., Păun M. (2015). Din acest rezultat se obțin imediat următoarele concluzii:

P1. Valorile proprii pentru o jumătate de structură sunt și valori proprii pentru întreaga structură.

P2. Pentru valorile proprii identice pentru jumătate de structură și pentru întreaga structură modurile proprii sunt de forma:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ -\Phi_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(componentele modurilor proprii corespunzând părților identice sunt antisimetrice).

P3. Pentru celălalt valorile proprii, vectorii proprii sunt de forma:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

(componentele corespunzând părților identice sunt identice).

În Tabelul 1 sunt prezentate valorile proprii pentru structura din Fig.4.5 pe a doua coloană iar în coloana a patra sunt prezentate aceste valori pentru Fig. 4.8. Analizând cele două tabele se poate constata că se regăsesc proprietățile prezentate în lucrările [19], [21], [63], [64].

În Fig.4.9.- 4.16 sunt prezentate în poaralel, pentru comparație, modurile proprii pentru structura din Fig.4.5 și modurile proprii pentru structura din Fig.4.8.

Se observă că valorile proprii pentru jumătate din structură sunt (în limita unor erori de calcul) apropiate de valorile proprii pentru întreaga structură.

Tabelul 1

Structura întreagă		Substructura componentă	
Nr. mod	Frecvența (Hz)	Nr. mod	Frecvența
1	3,72		
2	6,39	1	9,02
9	19,74	2	20,74
10	21,92	5	57,10
11	22,63	6	60,13
13	26,98	3	30,49
15	55,35	4	52,89
19	159,84	7	158,38
20	160,04	8	158,58

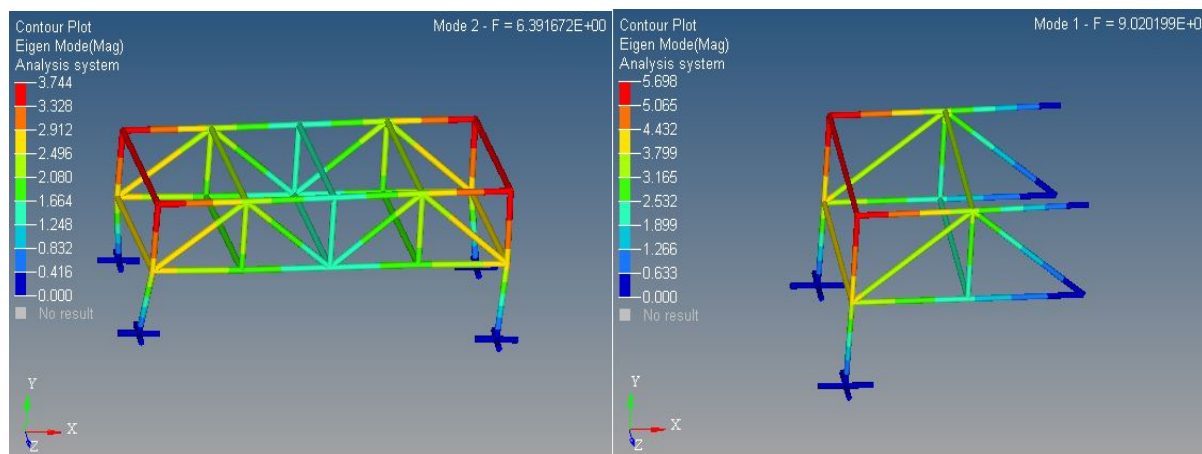


Fig.4.9.a

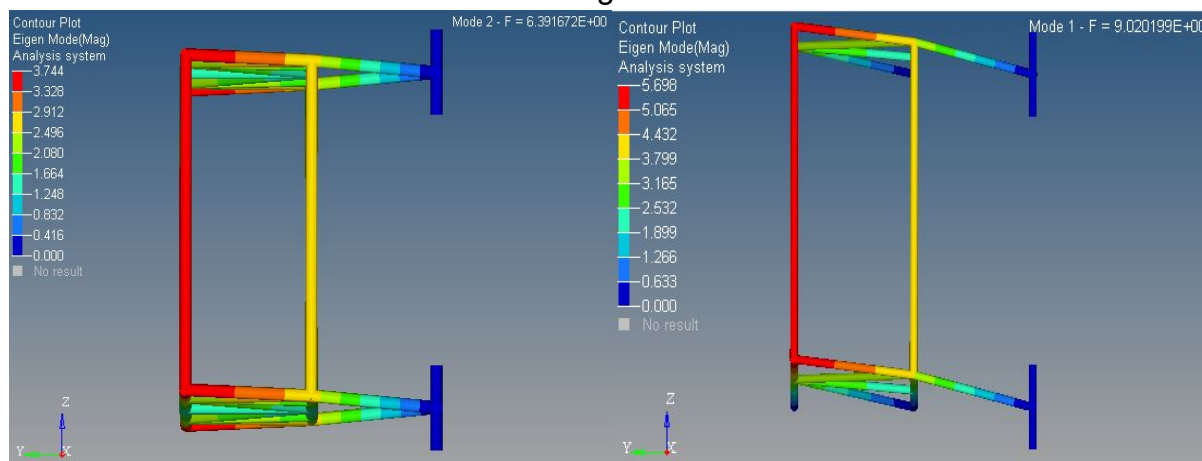


Fig.4.9.b.

Fig.4.9. Modul propriu 2 de vibrație al structurii și modul 1 al substructurii

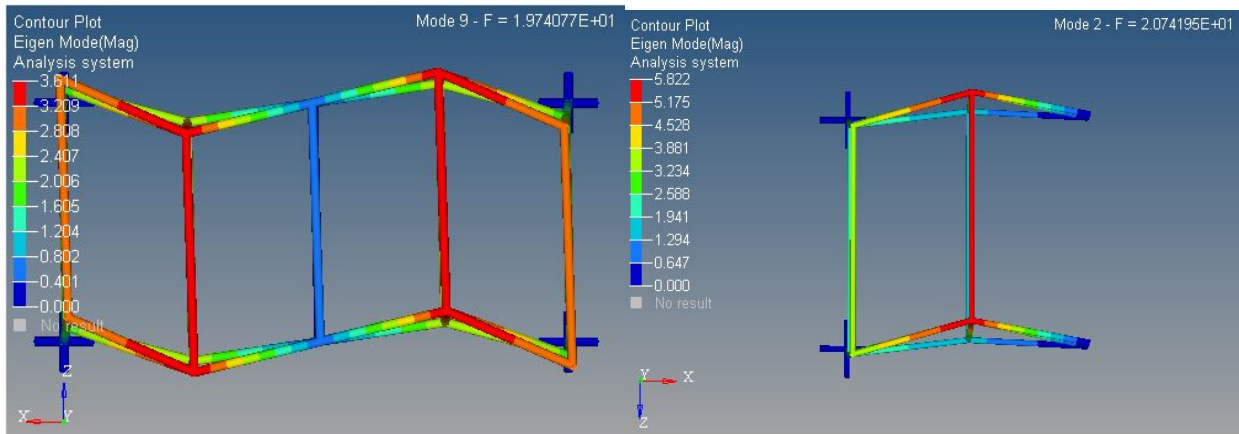


Fig.4.10.a

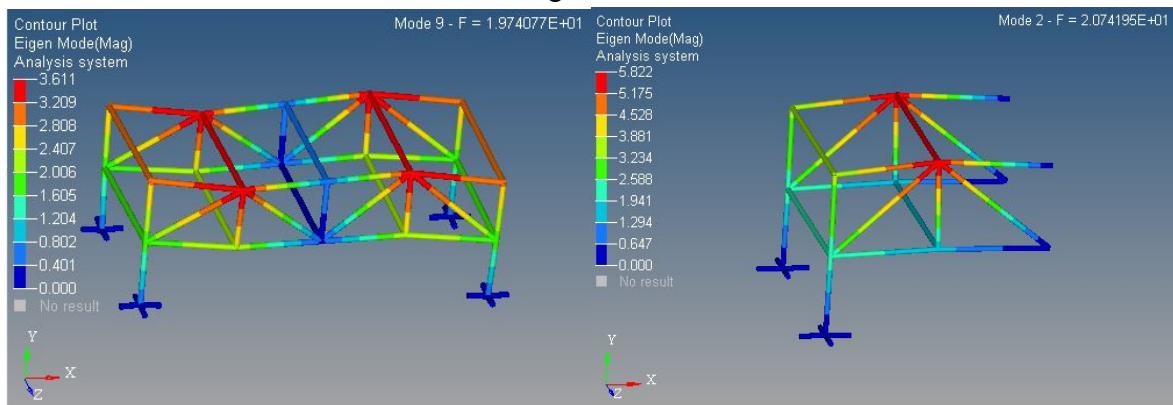


Fig.4.10.b

Fig.4.10. Modul 9 de vibrație al structurii și modul 2 al substructurii

4.5 Concluzii

Din rațiuni legate de timpul de proiectare, costurile de material și timpul de execuție a unor structuri mecanice utilizarea în cadrul proiectelor a unor elemente identice este des folosită. În acest mod un utilaj sau o mașină pot fi executate mai repede și mai ieftin. Studiul unor structuri cu elemente repetitive a constituit subiectul acestui paragraf. S-a studiat cazul unor structuri alcătuite din bare, cu vibrații în planul structurii. Proprietățile demonstrate pot aduce beneficii privind proiectarea și construcția unui astfel de sistem, atât din punct de vedere al timpului de calcul necesar cât și al costurilor.

În cadrul acestei secțiuni a fost propusă o metodă semianalitică pentru studiul vibrațiilor structurilor cu bare, cu aplicație la structurile cu simetrii, care reprezintă subiectul lucrării. Utilizarea metodei este justificată de nevoile de a obține mai multe informații decât cele oferite sub o formă standard de programele comerciale de element finit, lucru care poate conduce la necesitatea elaborării unui soft specific pentru fiecare problemă. În cadrul secțiunii este aplicată metoda pe o structură cu simetrii, cu o anumită simplitate, dar metoda poate fi aplicată pe orice fel de structură. Determinarea informațiilor utile într-o astfel de problemă, necesare unui proces de proiectare, se poate face în acest mod mult mai simplu și mai repede. Se scade în acest mod timpul de proiectare deci, în final, costul acestei acțiuni.

Capitolul 5

5. VALIDARE EXPERIMENTALĂ

5.1 Modelul analizat

Majoritatea clădirilor civile publice comerciale sau industriale care se proiectează în prezent sunt echipate cu instalații de climatizare sau frig industrial. În aceste aplicații răcirea se poate face cu agregate de tip evaporator sau chiller, în cele mai multe situații, datorită limitărilor pe care le are soluția cu evaporator și din cauza sarcinilor de răcire mari se folosesc agregate de tip chiller, care sunt în două variante constructive:

- Răcite cu aer (cu capacități uzuale între 0 și 2.000 kW);
- Răcite cu apă (cu capacități uzuale între 200 și peste 10.000 kW).

În această lucrare a fost studiată comportarea structurilor metalice cu simetrii folosite la montarea utilajelor de climatizare care produc vibrații, în acest sens a fost proiectată și executată o structură metalică formată din două grinzi cu zabrele cu talpi paralele pe care s-au amplasat la partea superioară traverse metalice pentru sprijinirea unui agregat de tip VOYAGER 304 STD cu puterea nominală de 309,1 kW, cu dimensiunile $L=3810$ mm; $l=2105$ mm, $h=2203$ mm și greutatea de 2639 kg, care are în componență patru compresoare de tip scroll și șase ventilatoare axiale pentru răcire.

În Fig. 5.3 este prezentată structura metalică în faza de proiect de execuție, iar în Fig. 5.4 este reprezentată structura metalică finalizată, în laboratorul în care s-au făcut măsurătorile.

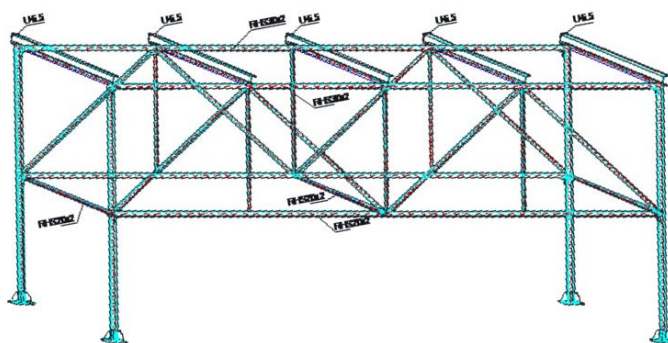


Figura 5.3. Vedere de ansamblu a structurii metalice proiectate



Figura 5.4. Vedere de ansamblu a structurii metalice executate

5.2 Calculul modurilor proprii de vibrație

Se utilizează MEF pentru a determina frecvențele proprii și a modurilor proprii de vibrație (Bathe și Wilson 1976). Modelul utilizat pentru introducerea rezultatelor este prezentat în Fig.5.5. Sistemul mecanic este un sistem alcătuit din bare legate rigid între ele prin sudură. Structura conține 4 tipuri de grindă standardizate, cu lungimile indicate în figură. Pentru acest sistem se face un calcul al frecvențelor proprii de vibrație și a modurilor proprii de vibrație. Rezultatele obținute sunt prezentate în Fig.5.6-5.25. Cele două tipuri de moduri se datoresc simetriei sistemului, așa cum a fost arătat în capitolul de contribuții. În figurile prezentate s-au prezentat, pentru fiecare frecvență proprie determinată, două vederi ale structurii pentru a putea observa mai bine modurile proprii corespunzătoare.

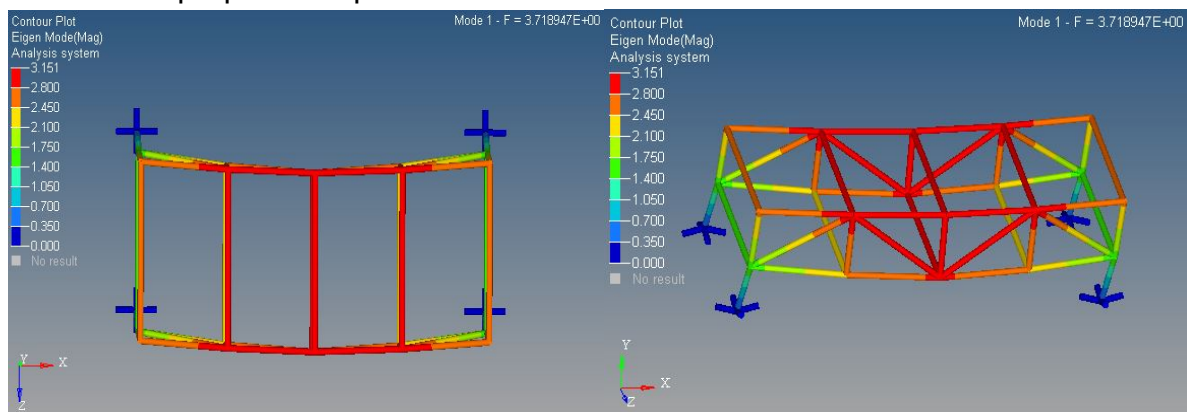


Figura 5.6. Modul 1

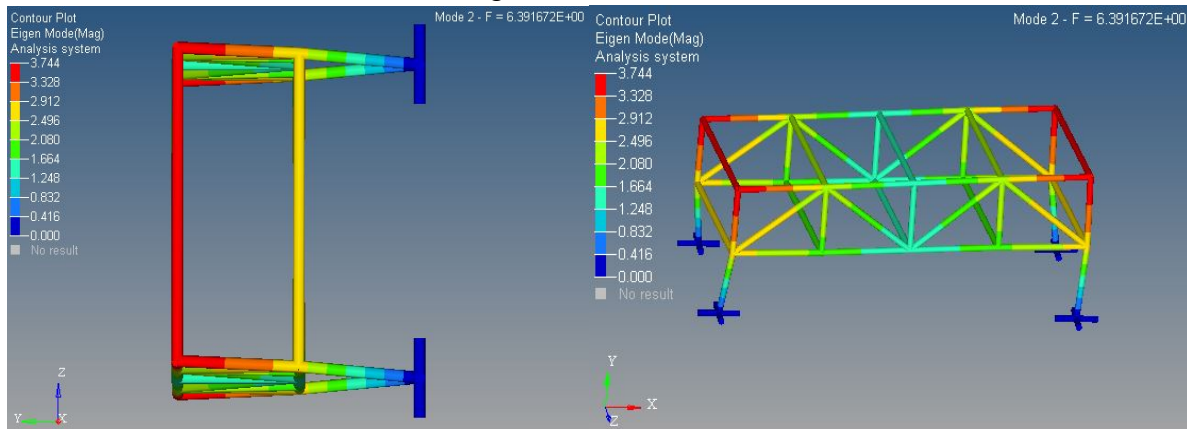


Figura 5.7. Modul 2

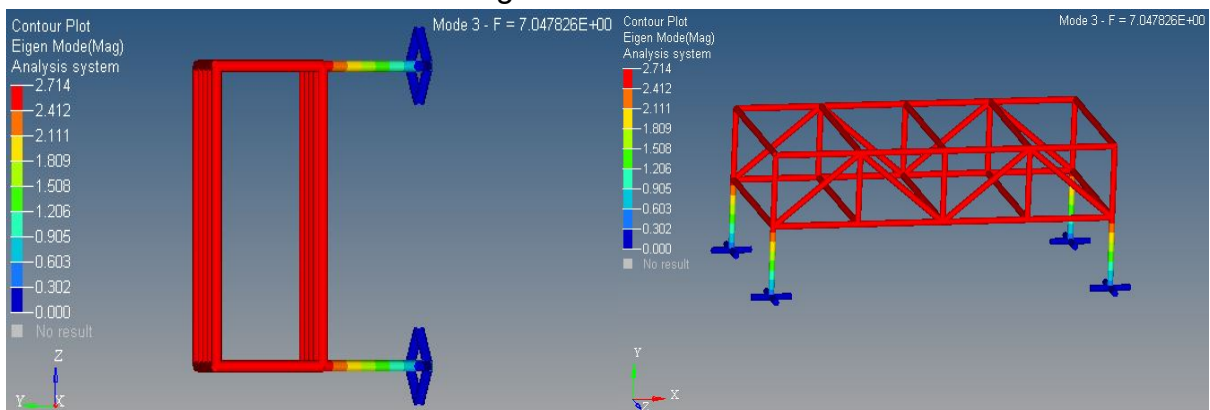


Figura 5.8. Modul 3

Aplicarea accelerometrelor. Pentru efectuarea măsurătorilor s-au utilizat metodele clasice cunoscute (Bratu et al 2017, Ciuncanu și Chiroiu 2016, Mocanu et al. 1977). Pentru a determina experimental spectrul de vibrații al structurii s-au aplicat accelerometre în diferite puncte, prezentate în Fig. 5.26-5.27.



Figura 5.26. Plasarea accelerometrelor

S-au aplicat semnale tip impuls cu ajutorul unui ciocan excitator și s-a cules semnalul care a dat răspunsul structurii la excitație. Rezultatele au fost înregistrate în punctele în care au fost așezate accelerometrele.



Figura 5.28. Culegerea datelor măsurătorilor

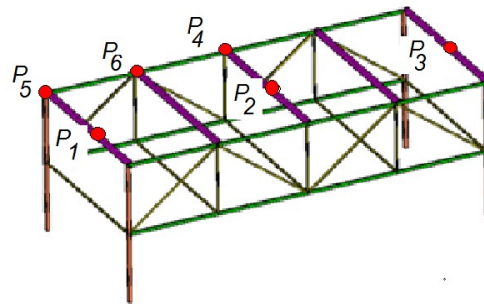


Figura 5.29

Poziționarea schematică a accelerometrelor este indicată în Fig.5.29. S-au ales 6 puncte de plasare a accelerometrelor. În aceste puncte s-a determinat răspunsul în frecvență al structurii. O comparație între valorile calculate și cele măsurate este prezentată în Tabelul 5.1

Tabelul 5.1

Frecvențele Eigen Calculate		Frecvențele Eigen Măsurate	
Mode No.	Frequency (Hz)	Mode No.	Frequency (Hz)
1	3,71	1	3,65
3	7,04	3	7,42
5	12,52	5	13,18
7	15,51	7	nedetctat
9	19,74	9	19,07
11	22,63	11	22,60
13	26,98	13	26,97

5.3 Influența sudurilor asupra pulsațiilor proprii

Pentru a realiza structura utilizată pentru experimentări barele au fost unite prin sudură. S-a pus problema ce influență au sudurile asupra pulsațiilor proprii, dacă pot influența într-un mod semnificativ rezultatele obținute, întrucât modelele cu element finit au utilizat modele continue cu proprietăți constante pe lungime. Pentru aceasta s-a considerat ca 10% din lungimea barei își dublează rigiditatea. Acest caz este mult exagerat față de ceea ce se întâmplă în realitate, unde cordonul de sudură are o lungime de cca 5 ori mai mică decât cea considerată de noi. De asemenea nici rigiditatea materialului nu se modifica de două ori așa cum am considerat în această simulare. În acest caz extrem, când s-a considerat o singură bară, s-au obținut rezultatele din tabelul Tabelul 5.5.

Tabelul 5.5

	Model 1	Model 2	Diferența
Mode	Frecvența [Hz]		%
1	11,67	12,72	8,2547
3	32,15	34,76	7,5086
5	62,97	67,58	6,8215
7	103,98	110,78	6,1383
9	155,11	164,11	5,4841
11	216,22	227,32	4,883
13	287,15	300,21	4,3503
15	325,53	341,77	4,7517
17	367,60	382,56	3,9105
19	457,14	474,11	3,5793

Valorile pentru primele pulsații proprii par semnificative dar în realitate nu se întâmplă acest lucru pentru ca:

1. Rigiditatea sudurilor este semnificativ mai mică decât cea considerată în simulare;
2. Lungimea pe care am considerat sudura este de câteva ori mai mare decât cea reală;
3. Structura, în ansamblu, are o rigiditate de zeci de ori mai mică decât o singură bară și ca urmare pulsațiile proprii scad dramatic față de tabelul prezentat iar influența sudurilor în rigiditatea totală devine nesemnificativă.

Spre exemplu, dacă o bară își dublează lungimea, eroarea scade de 1,41 ori.

Putem concluziona că sudurile nu vor avea o influență semnificativă asupra vibrațiilor proprii ale structurii. Un studiu al influenței sudurilor asupra pulsațiilor proprii ar putea constitui un subiect de dezvoltare ulterior.

5.4 Concluzii

În cadrul capitolului s-a utilizat MEF pentru calculul frecvențelor proprii și a modurilor proprii de vibrație pentru o structură reală, a unei instalații de răcire, realizate în fizic și încercată în cadrul Institutului de Cercetare al Universității Transilvania. Sistemul mecanic studiat este un sistem alcătuit din patru tipuri de bare standardizate legate rigid între ele prin sudură. Pentru sistemul prezentat și realizat fizic s-a făcut un calcul al frecvențelor proprii de vibrație și a modurilor proprii de vibrație. Rezultatele care s-au obținut au fost prezentate grafic în Fig.5.6-5.25. În figurile prezentate se poate constata că avem de-a face cu două tipuri de moduri de vibrație: moduri simetrice și moduri antisimetrice. Cele două tipuri de moduri sunt în conformitate cu proprietățile prezentate în cadrul lucrării de doctorat. S-au prezentat, pentru fiecare frecvență proprie determinată, două vederi ale structurii pentru a putea observa mai bine modurile proprii corespunzătoare.

S-au făcut apoi verificări experimentale pentru structura studiată pentru a vedea dacă valorile obținute coincid cu cele măsurate. S-au determinat frecvențele proprii după excitarea structurii printr-un ciocan de impact, prin lovirea în diferite puncte. Măsurătorile accelerațiilor s-au făcut cu accelerometre plasate pe barele structurii. S-au făcut mai multe seturi de măsurători pentru a crește încrederea în rezultatele obținute. Rezultatele obținute în final au dat valori apropiate de valorile calculate, modelul utilizat dovedindu-se suficient de precis pentru obținerea unor rezultate corespunzătoare. Rezultă că rezultatele obținute în cadrul capitolului 4 sunt suficient de precise pentru a justifica concluziile obținute.

Capitolul 6

6. CONTRIBUȚII ORIGINALE, CONCLUZII, VALORIFICAREA REZULTATELOR ȘI DIRECȚII VIITOARE DE CERCETARE

6.1 Contribuții originale

Prezenta teza de doctorat își propune să aducă contribuții în domeniul construcțiilor civile dar și al industriei constructoare de mașini în general. Ambele domenii sunt în plină dezvoltare în cadrul mai larg al ingineriei. Ca direcție principală de studiu în această teză a fost identificarea unor proprietăți pe care le au la vibrații structurile alcătuite din bare, legate rigid între ele. Rezultatele acestor cercetări vor putea fi folosite în procesul de proiectare dar ar determina scăderea costurilor legate de realizarea și întreținerea unor astfel de structuri.

Problematika abordată în lucrare a fost puțin studiată unele lucrări în domeniu există iar importanța existenței elementelor repetitive sau a simetriilor în efectuarea unor calcule de rezistență a fost observată de multă vreme. Rezultatele obținute în cadrul tezei de doctorat sunt originale și se adaugă altor cercetări în acest domeniu.

În continuare punctez principalele contribuții originale pe care le-am adus în cadrul studiului de față:

1. Am făcut o analiză critică a cercetărilor în domeniu studiat și am identificat stadiul actual al cercetărilor. Domeniul este interdisciplinar și asta a făcut necesară studierea unor lucrări și a literaturii de specialitate din mecanică, analiza structurilor civile, matematică, metode numerice, metoda elementelor finite, încercări mecanice etc. În bibliografie am menționat literatura considerată mai sugestivă pentru tematica lucrării, aleasă dintr-o multitudine de lucrări, existente mai ales în domeniile conexe;
2. Am identificat direcții de cercetare noi în cadrul domeniului, care au fost apoi dezvoltate în cadrul lucrării, cuprinzând noi tipuri de structuri care nu au mai fost analizate în trecut în acest context;
3. După o atentă analiză a literaturii am ales cele mai potrivite metode pentru scrierea ecuațiilor de mișcare pentru sisteme cu simetrie pentru sistemele continue, s-au căutat metodele numerice cele mai potrivite de rezolvare a lor și de interpretarea calitativă;
4. Pentru problematica identificată în lucrare am identificat cele mai potrivite metode de calcul numeric pentru rezolvarea acestei problematice;
5. Am modelat matematic sistemele mecanice continue utilizând modele teoretice continue, utilizabile la sistemele mecanice cu bare legate rigid între ele;
6. Am făcut o modelare utilizând Metoda Elementelor Finite pentru o structură reală studiată, pentru a putea face o analiză numerică a stării de tensiune și deformații din structurile analizate;

7. Am studiat teoretic sistemele mecanice continue cu bare și am determinat unele proprietăți caracteristice;
8. Am analizat teoretic și experimental un sistem structural real, am realizat modelul matematic, calculul la vibrații și verificarea proprietăților evidențiate anterior în cadrul lucrării de doctorat;
9. Am proiectat experimental pentru sistemul structural real studiat pentru validarea rezultatelor teoretice obținute și determinarea pulsațiilor proprii;
10. Rezultatele obținute au fost diseminate prin publicarea rezultatelor în reviste indexate ISI și prin participarea la conferințe științifice naționale și internaționale;
11. Am identificat posibile viitoare direcții de cercetare și de dezvoltare a subiectului;
12. Au fost formulate concluzii și indicații pentru proiectanții de structuri mecanice.

6.2 Valorificarea și diseminarea rezultatelor

Pe parcursul pregătirii tezei de față au fost publicate 6 lucrări în tematica strictă a tezei, dintre care:

Lucrări indexate **ISI** (4 lucrări):

1. Vlase, S., **Năstac, C.**, Marin, M., Mihălcică, M., A Method for the Study of the Vibration of Mechanical Bars Systems with Symmetries. ACTA TECHNICA NAPOCENSIS, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue IV, November, 2017, p.539-545 (Vlase et al 2017)
2. Vlase, S., Itu, C., Vasile, O., **Năstac, C.**, Stanciu, M.D., Scutaru, M.L., Vibration Analysis of a Mechanical System Composed by Two Identical Parts, RJAV nr.1, 2018 (în curs de apariție) (Vlase et al.)
3. Vasile O., Vlase S., **Năstac C.**, Scutaru M.L., Experimental Analysis of a Mechanical System Composed by Two identical Parts. ACTA TECHNICA NAPOCENSIS. Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering, Vol. 61, Issue 2, June, 2018 (în curs de apariție) (Vasile et al 2018)
4. **Cristi NĂSTAC**, Arina MODREA, Adrian GLIGOR, Use of the Symmetries in Civil Engineering. An Overview. 12th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2018, Tirgu-Mures, Romania, Procedia Manufacturing (în curs de apariție 2018).(Năstac et al 2018)

Lucrări indexate **Scopus** (1 lucrare)

5. Vlase S. et al. (2018) Dynamic Analysis of the Reaction Chamber for the ELIADE Array. In: Herisanu N., Marinca V. (eds) Acoustics and Vibration of Mechanical Structures—AVMS-2017. Springer Proceedings in Physics, vol 198. Springer, Cham (Vlase et al 2018)

Articole **BDI** (1 lucrare)

6. Vlase, S., Mihălcică, M., Scutaru, M.L., **Năstac, C.**, COUPLED TRANSVERSAL AND LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A PLANE MECHANICAL SYSTEM WITH TWO IDENTICAL BEAMS. Ro. J. Techn. Sci. – Appl. Mechanics, Vol. 61, N° 3, pp. 271–284, Bucharest, 2016 (Vlase et al 2016)

În domeniul INGINERIE MECANICĂ, domeniu în cadrul căruia este elaborată teza de doctorat, în această perioadă au fost publicate următoarele lucrări:

Lucrări indexate ISI (5 lucrări)

1. Brezeanu A.I., Dragomir G., Horneț M., **Năstac C.D.**, Iordan N.F., Boeriu L., The Usage of Earth's Natural Potential for Cooling and Heating in Industrial Building. Capitol in Sustainable Energy in the Built Environment - Steps Towards nZEB; Springer International Publishing ISBN: 978-3-319-09706-0 (2014) (Brezeanu et al 2014)
2. Horneț M., **Năstac C.D.**, Dragomir G., Bolocan S.I., Iordan N.F., Boeriu L., Valorification of Renewable Ground Energy in a Building Heating. Capitol in Sustainable Energy in the Built Environment - Steps Towards nZEB; Springer International Publishing ISBN: 978-3-319-09706-0 (2014) (Horneț et al 2014)
3. **Năstac C.D.**, Iordan N.F., Horneț M., Modeling air change rate in a naturally ventilated building. 17 International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2017 – Energy and Clean Technologies, Issue 42. (Năstac et al 2017)
4. Iordan N.F., **Năstac, C.D.**, Horneț M., Rainwater today, from source of disasters to recovered value. 17 International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2017 – Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining, Issue 12. (Iordan et al 2017)
5. Horatiu Teodorescu-Draghicescu, Daniel Scarlatescu, Sorin Vlase, Maria Luminita Scutaru, **Cristian Nastac**, Advanced high-density polyethylene used in pipelines networks. 11th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2017, 5-6 October 2017, Tirgu-Mures, Romania, Procedia Manufacturing, p 27-34 (2018) (Teodorescu-Drăghicescu et al. 2018).

Articole BDI (2 lucrări)

6. Horneț M., Todor R.D., Iordan N.F., Drăghici M., **Năstac C.D.**, Mizgan, P., Thermo-aerulic simulation of mono fațade natural ventilation. EBUILT-2016, Iași, Advanced Engineering Forum Vol.21 – februarie 2017 (Horneț et al 2017a).
7. Horneț M., Todor R.D., Iordan N.F., Drăghici M., **Năstac C.D.**, Mizgan, P., The Thermal and Optical Behavior of Multilayer Low-e Solar Control Glass Surfaces. EBUILT-2016, Iași, Advanced Engineering Forum Vol.21 – februarie 2017. (Horneț et al 2017b).

Testele și analizele efectuate în această perioadă au beneficiat de coordonare din partea unor specialiști în domeniu de la Universitatea TRANSILVANIA din Braşov și de la ICECON SA București, faptul acesta crescând calitatea rezultatelor obținute.

6.3 Direcții viitoare de cercetare

Lucrarea reprezintă o bază de plecare pentru viitoare cercetări ulterioare privind structurile mecanice cu simetrii utilizate în cadrul construcțiilor industriale. Pot fi luate în considerare și alte tipuri de simetrii precum și alte soluții constructive utilizate la construcții. Pentru o determinare mai precisă a pulsațiilor proprii și a modurilor proprii de mișcare se poate face un studiu ținând seama și de influența operațiunilor de sudare asupra caracteristicilor mecanice. Sudarea nu va influența în nici un fel rezultatele calitative și toate proprietățile menționate și demonstrate anterior rămând valabile chiar și în cazul modificării dramatice a unor caracteristici mecanice iar cercetările în acest domeniu vor putea doar să ofere rezultate mai precise calitativ, în cazul unor cazuri concrete și singulare.

În cazul vibrațiilor forțate ale unor astfel de sisteme, puțin studiate în cadrul acestei lucrări, se constată că anumiți termeni ai ecuațiilor de mișcare se anulează. Ar fi interesant de studiat modul în care acest lucru ar putea determina scăderea solicitărilor în structură și, ca o aplicație importantă, dacă aceste soluții constructive vor scădea, în mod natural, solicitările mecanice în cazul unor evenimente cum ar fi de exemplu cutremurele.

Dezvoltarea cercetărilor experimentale ar putea valida rezultatele obținute în urma cercetărilor teoretice și ar putea crește încrederea în soluțiile propuse.

7. BIBLIOGRAFIE

1. Ambrus C. (2014) Analiza dinamică a solicitărilor din ansamblul motor-transmisie al instalațiilor mobile de foraj de mare putere. Teză de doctorat, Universitatea TRANSILVANIA din Braşov.
2. Anosov, D.V., Arnold, V.I. (1988) Dynamical Systems I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
3. Arnold, V.I. (1973) Ecuații diferențiale ordinare. Ed. Științifică și Enciclopedică, București.
4. Bathe, K.-J., Wilson, E.L. (1976) Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
5. Bellman, R. (1969) Introducere în analiza matriceală. Ed. Tehnică, Buc.
6. Bratu, P., Vibrațiile sistemelor elastice, Ed. Tehnică, 2000.
7. Bratu, P., Stuparu, A., Popa, S., Iacob, N., Voicu, O. (2017) The assessment of the dynamic response to seismic excitation for constructions equipped with base isolation systems according to the Newton-Voigt-Kelvin model. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue IV, November, 2017, p.459.
8. Bratu, P., Drăgan, N. (2002) Modelarea dinamică a rigidului cu legături vâscoelastice lineare în regim forțat stabilizat. CNMS XXVI 2002, Brăila, p.221-226.
9. Brezeanu, A.I., Dragomir, G., Hornet, M., Năstac, D.C., Iordan, N.F., Boeriu, L. (2014) The Usage of Earth's Natural Potential for Cooling and Heating in Industrial Building. Capitol in Sustainable Energy in the Built Environment - Steps Towards nZEB; Springer International Publishing ISBN: 978-3-319-09706-0.
10. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Rades, M. (1982) Vibrații mecanice. Ed. Did. și Ped., Bucharest, 1982.
11. Celep, Z. (1978) On the axially symmetric vibration of thick circular plates. Ingenieur-Archiv, Volume 47, Issue 6, p 411-420.
12. Ciuncanu, M., Chiroiu, V., On the post-earthquake damage detection of structures. Ro. J. Techn. Sci. Appl. Mechanics, Vol. 61, Nr. 3, p. 189, Bucharest, 2016.
13. Chen, Y., Feng, J. (2012) Generalized Eigenvalue Analysis of Symmetric Prestressed Structures Using Group Theory. Journal of Computing in Civil Engineering. Vol 26, Issue 4, pp.488-497, DOI 10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000151, ISSN 0887-3801.
14. Chiru, A., Vlase, S., Ambrus, C., Nicoara, D., Pirna, I., Stanciu, A. (2009), Vibrations Analysis of a Heavy Truck with Two Identical Engines. Proceedings of the International Conference ModTech Pages: 143-146.
15. Demidovici, B., Maron, I. (1973) Elements de calcul numerique. Editions Moscou.
16. Den Hartog, J.P. (1960) Vibrations mecaniques, Paris, Dunod.
17. Douglas, Th. (2012) Structural Dynamics and Vibrations in Practice: An Engineering Handbook, CRC Press.
18. Gillich, G.-R., Praisach, Z.-I., Iavornic, C.M. (2012) Reliable method to detect and assess damages in beams based on frequency changes. ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. p. 129-137.
19. Gioncu, V., Ivan, M. (1983) Bazele calculului structurilor la stabilitate. Ed. Facla, Timișoara.
20. Goia, I., Vlase, S. (1987) Schwingungen symmetrischer mechanischer Systeme mit endlicher Anzahl von Freiheitsgraden. Buletinul Univ. din Brasov, Vol. XXIX-A, p.1-8.
21. Goia, I., Vlase, S. (1988) Absorbitori dinamici pentru sisteme ramificate cu simetrie. Bul. CIT, Brasov, p.151-156.

22. Goia, I., Mihalcica, V., Vlase, S.(1988) Die Schwingungen der U Motoren Kurbelwellen. A VI-a Conferința de vibrații mecanice, Timisoara, p.164-174.
23. Guckenheimer, J., Holmes, Ph.(1983) Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
24. Henderson, J., Luca, R. (2016) Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equations: Positive Solutions. Elsevier.
25. Heylen, W., Lammens, S., Sasa, P.(1997) Modal Analysis Theory and Testing, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
26. Holm, DD, Stoica C, Ellis, DCP (2009) Geometric Mechanics and Symmetry. Oxford University Press.
27. Horn, RA, Johnson, ChR (1985) Matrix Analysis, Cambridge University Press.
28. Horneț, M., Năstac, D.C., Dragomir, G., Bolocan, S.I., Iordan, N.F., Boeriu, L. (2014) Valorification of Renewable Ground Energy in a Building Heating. Capitol in Sustainable Energy in the Built Environment - Steps Towards nZEB; Springer International Publishing ISBN: 978-3-319-09706-0.
29. Horneț, M., Todor, R.D., Iordan, N.F., Drăghici, M., Năstac, D.C., Mizgan, P. (2017a) Thermo-aerodynamic simulation of mono façade natural ventilation. EBUILT-2016, Iași, Advanced Engineering Forum Vol.21 – februarie 2017.
30. Horneț, M., Todor, R.D., Iordan, N.F., Drăghici, M., Năstac, D.C., Mizgan, P. (2017b) The Thermal and Optical Behavior of Multilayer Low-e Solar Control Glass Surfaces. EBUILT-2016, Iași, Advanced Engineering Forum Vol.21 – februarie 2017.
31. Iordan, N.F., Năstac, D.C., Horneț, M. (2017) Rainwater today, from source of disasters to recovered value. 17 International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2017 – Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining, Issue 12.
32. Ivan, M. (1985) Bazele calculului liniar al structurilor. Ed. Facla, Timișoara.
33. Landau, L., Lifchitz, E. (1967) Théorie de l'élasticité. Editions Mir, Moscou.
34. Mangeron, D. (1962) Mecanica vibrațiilor, în Fundamentele mecanicii. Ed. Academiei, București.
35. Mangeron, D., Goia, I., Vlase, S., Symmetrical Branched Systems Vibrations. Scientific Memoirs of the Romanian Academy, Bucharest, Serie IV, Tom XII, Nr.1, 1991, p.232-236.
36. Marsden, JE, Ratiu, TS (2003) Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. 586 p., ISBN-13: 978-0387986432, Springer.
37. Meirovitch, L., Principles and Techniques of Vibrations. Pearson (1996).
38. Meirovitch, L (1986) Elements of Vibration Analysis. 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
39. Mocanu, R.D., ș.a. (1977) Analiza experimentală a tensiunilor. Vol.I,II, Editura Tehnică, București.
40. Myint-U, T (1977) Ordinary differential equations, Elsevier.
41. Năstac, D.C., Modrea, A., Gligor, A., Use of the Symmetries in Civil Engineering. An Overview. 12th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2018, Tirgu-Mures, Romania, Procedia Manufacturing (in curs de apariție 2018).
42. Năstac, D.C., Iordan, N.F., Horneț, M. (2017) Modeling air change rate in a naturally ventilated building. 17 International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2017 – Energy and Clean Technologies, Issue 42.
43. Negrean, I. (2017a) Advanced notions in analytical dynamics of systems. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue IV, November, 2017, p. 491.
44. Negrean, I. (2017b) Mass distribution in analytical dynamics of systems. Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering Vol. 60, Issue II, June, 2017, p.175.

45. Paliwal, D.N., Pandey, R.K. (1996) Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Volume 69, Issue 1, p. 79-89
46. Parlett, B.N. (1980) *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
47. Rades, M. (2010) *Mechanical Vibrations*, II. Ed. PRINTECH.
48. Radeş, M. (1979) *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*. Ed. Academiei
49. Rădoi, M., Deciu, E. (1981) *Mecanica*. Ed. Didactică și Pedagogică, Buc.
50. Ripianu, A. (1960) Determinarea pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a arborilor cotiți. *St. Cerc. Mec. Apl.*, Buc., 1960, nr.4.
51. Shi, C.Z., Parker, R.G. (2013) Modal structure of centrifugal pendulum vibration absorber systems with multiple cyclically symmetric groups of absorbers. *Journal of Sound and Vibration*. ISSN 0022-460X, DOI 10.1016/j.jsv.2013.03.009.
52. Singer, S.F. (2004) *Symmetry in Mechanics*, ISBN 978-1-4612-0189-2, Springer.
53. Silaș, Gh. (1968) *Mecanica: Vibrații mecanice*. Editura didactică și pedagogică, București.
54. Silaș, Gh., ș.a. (1967, 1973) *Culegere de probleme de vibrații mecanice*. Buc., Ed. Tehnică, vol.I, 1967, vol.II., 1973.
55. Șabac, I.Gh. (1981) *Matematici speciale*, Ed. Didactică și Pedagogică, București.
56. Teodorescu-Draghicescu, H., Scarlatescu, D., Vlase, S., Scutaru, M.L. Năstac, D.C., (2018) Advanced high-density polyethylene used in pipelines networks. 11th International Conference Interdisciplinarity in Engineering, INTER-ENG 2017, 5-6 October 2017, Tirgu-Mures, Romania, *Procedia Manufacturing*, p 27-34.
57. Teodorescu-Draghicescu, H., Vlase, S., Scutaru, M.L., Motoc, D.L., Guiman, V. (2009) Some Advanced Symmetric Composite Laminates Subjected to Off-Axis Loading Systems. A Stiffness Evaluation. *MODTECH 2009, Proceedings of the International Conference ModTech Pages: 647-650, Published: 2009.*
58. Teodorescu, P.P. (1972) *Dinamica corpurilor liniar elastice*. Ed. Academiei.
59. Timoshenko, S., Zoung, D.H. (1955) *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand Company.
60. Timoshenko, PS, Gere, JM (2009) *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, New York, London, 2nd Edition.
61. Tofan, M., Vlase, S. (1985), *Vibrații sistemelor mecanice*. Ed. Universității Transilvania.
62. Vasile, O., Vlase, S., Năstac, D.C., Scutaru, M.L. (2018) Experimental Analysis of a Mechanical System Composed by Two identical Parts. *ACTA TECHNICA NAPOCENSIS*. Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering, Vol. 61, Issue 3, Septembrie, 2018 (în curs de apariție).
63. Vâlcovici, V., Bălan, St., Voinea, R. (1963) *Mecanică teoretică*. Ed. Tehnică, București.
64. Vlase, S (1987a) A Method of Eliminating Lagrangean Multipliers from the Equation of Motion of Interconnected Mechanical System. *ASME Transaction. Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, p.235-236.
65. Vlase, S (1987b) Elimination of Lagrangean Multipliers. *Mech. Research Communications*, Vol. 14, p.17-20.
66. Vlase, S. (2003) The Vibration of the Mechanical Systems showing Certain Symmetries. *The Annals of the Oradea University*, vol. II (XII), p.37, mai, 2003, ISSN - 1583 - 0691.
67. Vlase, S., Goia, I., Modrea, A., Use of the Symmetries for Vibrational Analysis of the ROMAN 8135 Truck. *Annual Session of Scientific Papers, IMT-Oradea, 27-28 mai, 2004*, în *Analele Universității din Oradea*.
68. Vlase, S. (2005) Some properties of the Eigenvalues and Eigenvectors of the Elastic Systems with Three Identical Parts. *Proceeding of the ASVM Conference*, ISBN 973-625-238-8, Timișoara, p.227-231, 2005.

69. Vlase, S. (2012) Dynamical response of a multibody system with flexible elements with a general three-dimensional motion. *Romanian Journal of Physics*, VL 57,IS 3-4, p676-693,2012.
70. Vlase, S., Căndea, I., Mihălcică, V., Ambruș, C. (2009) Vibration of the transmission of a truck with two identical engines. *Proceedings of the 3rd International Conference EpsMsO, Athens, Greece, 8-11 July*.
71. Vlase, S., Chiru, A. (2009) Symmetry in the study of the vibration of some engineering mechanical systems. *Proceedings of the 3rd International Conference 3rd International Conference EpsMsO, Athens, Greece, 8-11 July, 2009*.
72. S. Vlase, Gh. Deliu, Modrea, A., M. Deliu, Some Properties of Symmetric Flexible Multi-Body Systems. *5-th Euromech Solid Mechanics Conference, ESMC, Thessaloniki, 17-22 august, 2003, Grecia, p.398. ISSN 0997-7538*.
73. Vlase, S., Itu, C., Vasile, O., Năstac, D.C., Stanciu, M.D., Scutaru, M.L. (2018b) *Vibration Analysis of a Mechanical System Composed by Two Identical Parts*, RJAV nr.1, 2018 (în curs de apariție).
74. Vlase, S, Păun, M (2015) *Vibration analysis of a mechanical system consisting of two identical parts*, *Ro. J. Techn. Sci. - Appl. Mechanics*, 60, 3, pp. 216-230, Bucharest.
75. Vlase, S., Marin, M., Oechsner, A. (2017a) *Considerations of the transverse vibration of a mechanical system with two identical bars*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part L: Journals of Materials: Design and Applications*, november, 2017, doi.org/10.1177/ 1464420717745109
76. S. Vlase, M. Marin, M. L. Scutaru, and R. Munteanu (2017b) *Coupled transverse and torsional vibrations in a mechanical system with two identical beams*. *AIP Advances* 7, 065301 (2017); doi: 10.1063/1.4985271.
77. Vlase, S., Mihălcică, M., Scutaru, M.L., Năstac, D.C. (2016) *Coupled transversal and longitudinal vibrations of a plane mechanical system with two identical beams*, *Ro. J. Techn. Sci. Appl. Mechanics*, Vol. 61, Nr. 3, p. 276.
78. Vlase, S., Năstac, D.C., Marin, M., Mihălcică, M. (2017c) *A method for the study of the vibration of mechanical bars systems with symmetries*. *Acta Technical Napocensis, Series: Applied Mathematics, Mechanics, and Engineering* Vol. 60, Issue IV, November, p.539.
79. Vlase, S., Teodorescu, P. P. (2013) *Elasto-dynamics of a solid with a general "rigid" motion using FEM model. Part I. Theoretical approach*. *Romanian Journal of Physics*, VL 58,IS 7-8, p.872-881, 2013.
80. Vlase, S., Borza, P.N., Suliman, G., Petcu, C., Scutaru, M.L., Ghițescu, M., Năstac, D.C, (2018) *Dynamic Analysis of the Reaction Chamber for the ELIADE Array*. In: Herisanu N., Marinca V. (eds) *Acoustics and Vibration of Mechanical Structures - AVMS-2017*. Springer Proceedings in Physics, vol 198. Springer, Cham.
81. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. (1976) *Elasticitate și plasticitate*, I.P. București.
82. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. (1984) *Mecanica*. Ed. Didactică și Pedagogică, Buc.
83. Voinea, P.R., Stroe, V.I. (2000), *Introducere în teoria sistemelor dinamice*. Ed. Academiei Romane, Bucuresti.
84. Wilkinson, J.H.(1965) *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford.
85. Zingoni, A (2005a) *On the symmetries and vibration modes of layered space grids*. *Engineering Structures* 27:629–638
86. Zingoni, A (2005b) *A group-theoretic formulation for symmetric finite elements*. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41: 615 – 635.
87. Zingoni, A (2012a) *A group-theoretic finite-difference formulation for plate eigenvalue problems*. *Computers and Structures*. 94–95, 34–44.

88. Zingoni, A (2012b) Symmetry recognition in group-theoretic computational schemes for complex structural systems. Computers & Structures, Vol. 94–95, pp 34-44.
89. Zingoni, A (2012c), Group-theoretic exploitations of symmetry in computational solid and structural mechanics. Int. J. Numer. Meth. Engng.2009, 79:253–289.
90. Zingoni, A (2014) Group-theoretic insights on the vibration of symmetric structures in engineering. Phil. Trans. R. Soc. A, Mathematica, Physical and Engineering Science, vol.372
91. *** https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_Gate_Bridge
92. *** <http://onthreelegs.com/2012/03/19/happy-birthday-sydney-harbour-bridge>
93. *** <https://www.youtube.com/watch?v=8A8oa8hyLew>
94. *** <https://imgur.com/gallery/yREBnAu>
95. ***<https://rockartfashion.net/2016/09/25/elmgreen-dragset-present-la-gallerie-perrotin-at-grand-palais-paris>
96. ***<https://www.libertatea.ro/stiri/alesii-vor-un-nou-drapel-national-pe-palatul-parlamentului-1955187>
97. ***<https://www.osengines.com/engines-airplane/osmg1307/index.html>
98. ***<https://playtech.ro/2018/avion-prabusit-rusia>
99. *** Mechanics and symmetry in europe: the geometry and dynamics of deformable systems. Project. HPRN-CT-2000-00113, Funded under: FP5-HUMAN POTENTIAL, University of Surrey, United Kingdom, Centre National de la Reserche Scientifique, France, Instituto Superior Tecnico, Portugal, Swiss Federeal Institute of Technology of Nottingham, Switzerland, Universita degli studi di Padova, Italy, University of Nottingham, United Kingdom, Universite du Litoral, France, Utrecht University, Netherlands.
100. *** "Civil Engineering and Symmetry" – 2018, A special issue of Symmetry (ISSN 2073-8994).
101. *** Ganghoffer, J-F, Mladenov,I (organizers), Similarity, Symmetry and Group Theoretical Methods in Mechanics, September 7, 2015 — September 11, 2015. Lectures at the International Centre for Mechanical Sciences

REZUMAT SCURT / ABSTRACT

Obiectivul general al tezei îl constituie identificarea și prezentarea unor proprietăți la vibrații ale sistemelor continue cu bare, proprietăți care pot face ca procesul de proiectare, calcul și realizare a unor astfel de structuri să se ușureze. Câmpul principal de aplicabilitate al acestor proprietăți este în domeniul construcțiilor civile dar, la fel de bine, există aplicații în toate lucrările ingineresti. În cadrul acestui obiectiv general teza își propune:

- *studiul proprietăților la vibrații a unor sisteme încă nestudiate și anume la structuri cu diferite simetrii utilizate în cadrul construcțiilor civile;*
- *verificarea metodei la calculul unei structuri reale prin realizarea structurii reale și validarea experimentală a rezultatelor obținute teoretic în acest caz;*
- *propunerea unor proceduri care să ajute proiectanții de astfel de structuri să economisească timpul de proiectare și care vor avea ca rezultat și scăderea costurilor cu realizarea practică a structurii.*
- *analiza și identificarea celor mai potrivite metode de calcul numeric pentru rezolvarea problemelor speciale impuse de tematică;*
- *modelarea sistemelor mecanice continue prin modele teoretice continue, utilizabile la sistemele mecanice cu bare legate rigid;*
- *modelarea sistemelor studiate utilizând Metoda Elementelor Finite;*
- *studiul teoretic al unor astfel de sisteme și determinarea unor proprietăți caracteristice;*
- *analiza unui sistem structural real, modelarea, calculul la vibrații și verificarea teoretică a proprietăților enunțate anterior;*
- *analiza experimentală a sistemului structural real pentru validarea modelului;*
- *analiza critică a rezultatelor teoretice obținute, concluzii și propuneri de valorificare a cercetărilor;*

The general objective of the thesis is the identification and presentation of vibration properties of continuous systems with bars, properties that can make the process of design, calculation and realization of such structures easier. The main field of application of these properties is in the field of civil engineering, but equally well there are applications in all engineering works. Within this general objective the thesis proposes:

- *the study of vibration properties of still unstudied systems, namely structures with different symmetries used in civil engineering;*
- *verification of the method in calculating a real structure by realizing the actual structure and experimental validation of the theoretical results obtained in this case;*
- *proposing procedures to help designers of such structures to save design time and resulting in lower cost of building the structure.*
- *analysis and identification of the most suitable numerical methods for solving the special problems imposed by the subject;*
- *modeling of continuous mechanical systems by continuous theoretical models, usable in rigid mechanical systems;*
- *modeling the systems studied using the Finite Elements Method;*
- *the theoretical study of such systems and the determination of characteristic properties;*
- *analysis of a real structural system, modeling, calculation to vibrations and theoretical verification of the above mentioned properties;*
- *experimental analysis of the real structural system for model validation;*
- *critical analysis of the obtained theoretical results, conclusions and proposals for capitalizing on the researches;*

CURRICULUM VITAE

1. Nume: Năstac
2. Prenume: Dorin Cristian
3. Data și locul nașterii:
4. Cetățenie: Română
5. Studii
Universitare/postuniversitare/doctorat

Instituția	Universitatea Transilvania din Braşov		Universitatea Transilvania din Braşov
Perioada: de la (anul) până la (anul)	1999 - 2004		01.10.2015 – până în prezent
Grade sau diplome obținute	Diplomă de inginer		În curs de finalizare

6. Alte specializări și calificări: nu este cazul

7. Titlul științific: doctorand

8. Experiența profesională și didactică

Funcția	Asistent Universitar	Asistent Universitar	Inginer Sef	Administrator	Director
Perioada	2016 - prezent	2004 - 2015	2013 - 2015	2005 - prezent	2015 -prezent
Instituția	Universitatea Transilvania din Braşov	Universitatea Transilvania din Braşov	S.C. TETKRON S.R.L.	SC N.D.C. Proiect S.R.L. Braşov	S.C. SUCO SITE MANAGER S.R.L.
Locul	Braşov	Braşov	Braşov	Braşov	Braşov

9. Locul de muncă actual: Universitatea Transilvania din Braşov, Facultatea de Construcții.

10. Vechime la locul de muncă actual: 12 ani (01.10.2004 – 30.09.2015; 01.10.2016 - prezent).

11. Limbi străine cunoscute:

- engleză (avansat)

12. Membru în asociații profesionale și științifice:

- Asociația Inginerilor de Instalații din România (AIIR) - Filiala Braşov.

13. Experiența managerială:

- din 2004 - prezent: Administrator al S.C. N.D.C. Proiect S.R.L.;

- între 2013 și 2015 – Inginer Sef Constructii al S.C. Tetkron S.R.L.

Data: 12.07.2018

ing. Crisitan Dorin Năstac

CURRICULUM VITAE

1. Name: Năstac
2. First name: Dorin Cristian
3. Date and place of birth:
4. Citizenship: Română

5. Education

Undergraduate / postgraduate / PhD

Institution	Transilvania University from Brasov		Transilvania University from Brasov
Period: from (year) to (year)	1999 - 2004		01.10.2015 – to date
Degrees or diplomas obtained	bachelor degree in engineering		Under completion

6. Other specializations and qualifications: not applicable

7. Scientific title: PhD student

8. Professional and didactic experience

Function	Lecturer	Lecturer	Chief Engineer	Manager	Director
Period	2016 - prezent	2004 - 2015	2013 - 2015	2005 – to date	2015 - to date
Institution	Transilvania University from Brasov	Transilvania University from Brasov	S.C. TETKRON S.R.L.	SC N.D.C. Proiect S.R.L. Braşov	S.C. SUCO SITE MANAGER S.R.L.
Place	Braşov	Braşov	Braşov	Braşov	Braşov

9. Current job: Transilvania University of Brasov, Faculty of Civil Engineering.

10. Age at the current job: 12 years (01.10.2004 - 30.09.2015, 01.10.2016 - present).

11. Foreign languages:

- English (advanced)

12. Member of professional and scientific associations:

- Association of Installations Engineers of Romania (AIIR) - Branch Brasov.

13. Managerial experience:

- from 2004 – to date: Manager of S.C. N.D.C. Project S.R.L.;
- between 2013 and 2015 - Chief Engineer of S.C. Tetkron S.R.L.

Date: 12.07.2018

ing. Crisitan Dorin Năstac