



ŞCOALA DOCTORALĂ INTERDISCIPLINARĂ
Facultatea de Matematică și Informatică

Alexandru Codrin IONESCU

Operatori diferențiali pe spații Finsler complexe

Differential operators on complex Finsler spaces

REZUMAT / ABSTRACT

Conducător științific

Prof. dr. Gheorghe MUNTEANU

BRAȘOV, 2018



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE



Investește în oameni!

FONDUL SOCIAL EUROPEAN – Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013
Axa prioritară 1 Educație și formare profesională în sprijinul creșterii economice și dezvoltării societății bazate pe cunoaștere

Domeniul major de intervenție 1.5. Programe doctorale și post-doctorale în sprijinul cercetării

Titlul proiectului: Burse doctorale și postdoctorale pentru cercetare de excelență

Numărul de identificare al contractului: POSDRU/159/1.5/S/134378

Beneficiar: Universitatea *Transilvania* din Brașov

**COMPONENTA
Comisiei de doctorat**

Numită prin ordinul Rectorului Universității *Transilvania* din Brașov
Nr. din

PREȘEDINTE:	Conf. dr. Eugen PĂLTĂNEA Decan, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea <i>Transilvania</i> din Brașov
CONDUCĂTOR ȘTIINȚIFIC:	Prof. dr. Gheorghe MUNTEANU Universitatea <i>Transilvania</i> din Brașov
REFERENȚI:	Prof. dr. Ion MIHAI Universitatea din București Prof. dr. Vladimir BALAN Universitatea <i>Politehnica</i> București Conf. dr. Nicoleta-Codruța ALDEA Universitatea <i>Transilvania</i> din Brașov

Data susținerii publice a tezei de doctorat: 27.06.2018.

Eventualele aprecieri sau observații asupra conținutului lucrării vor fi transmise electronic, în timp util, pe adresa alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro.

Totodată, vă invităm să luați parte la ședința publică de susținere a tezei de doctorat.

Vă mulțumim!



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE

OIPOSDRU



Cuprins

	Pag. teză	Pag. rez.
Introducere	ii	iii
1 Operatorul Laplace pentru funcții olomorfe pe grupuri Lie complexe	1	1
1.1 Operatorul Laplace pe varietăți Finsler complexe	1	1
1.1.1 Operatorul Laplace orizontal pentru funcții	1	1
1.1.2 Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale	2	2
1.2 Grupuri Lie complexe	4	4
1.3 Operatori Laplace pentru funcții olomorfe pe G	7	7
1.4 Ultimii multiplicatori olomorfi pentru câmpuri vectoriale olomorfe pe G	14	11
2 Algebroizi Lie olomorfi	17	13
2.1 Noțiuni introductive	18	14
2.2 Expresii locale	20	16
2.3 Conexiuni liniare	24	18
2.4 Lifturi verticale și complete	27	21
2.5 Semispray-uri și spray-uri ale fibrelor olomorfe ancorate	28	22
3 Conexiuni pe algebroizi Lie olomorfi	34	25
3.1 Geometria spațiului total al algebroidului E	35	26
3.1.1 Fibratul tangent al unui algebroid Lie olomorf	35	26
3.1.2 Structura de algebroid Lie a fibratului $T'E$	38	28
3.1.3 Conexiuni neliniare pe $T'E$	39	29
3.1.4 Conexiuni liniare pe $T'E$	40	31
3.2 Prelungirea unui algebroid Lie olomorf	42	32
3.2.1 Semispray-uri și spray-uri	44	34
3.2.2 Conexiuni neliniare pe $T'E$	45	35
3.3 Structuri Lagrange induse pe algebroizi Lie olomorfi	48	37



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE



4	Structuri Finsler pe algebroizi Lie olomorfi	55	41
	4.1 Fibratul prelungire complexificat al unui algebroid Lie olomorf	55	41
	4.1.1 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$	57	43
	4.2 Structuri Finsler complexe pe un algebroid Lie	59	44
	4.1.1 Conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid	60	45
	4.1.2 Algebroizi Kähler Finsler	67	49
5	Operatori Laplace pe algebroizi Lie Finsler complecși	69	51
	5.1 Derivate covariante pe prelungire	70	51
	5.2 Operatori Laplace verticali și orizontali pentru funcții definite pe E	71	52
	5.3 Operatorul Laplace orizontal pentru forme definite pe $\mathcal{T}E$	76	55
6	Teoreme de anulare pe algebroizi Lie olomorfi	80	59
	6.1 Conexiunile Chern-Finsler și Rund	81	59
	6.2 Teoreme de anulare	83	61
7	Produsul "warped" al algebroizilor Lie olomorfi	87	63
	7.1 Proprietăți ale structurilor Finsler	88	63
	7.2 Produsul "warped" al algebroizilor	90	64
	7.2.1 Fibratul prelungire al fibratului produs "warped" ...	91	65
	7.2.2 Conexiunea Chern-Finsler a produsului "warped" ...	92	66
	7.3 Un model de produs Finsler "warped" pentru gravitație și electromagnetism	95	68
8	Contribuții originale. Diseminarea rezultatelor	99	71
	Bibliografie	102	75
	Anexe	110	81



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE



Contents

	Thesis page	Abs. page
Introduction	ii	iii
1 The Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups	1	1
1.1 The Laplace operator for complex Finsler manifolds	1	1
1.1.1 The horizontal Laplace operator for functions	1	1
1.1.2 The horizontal Laplace operator for horizontal forms	2	2
1.2 Complex Lie groups	4	4
1.3 Laplace operators for functions on G	7	7
1.4 Holomorphic last multipliers for holomorphic vector fields on G	14	11
2 Holomorphic Lie algebroids	17	13
2.1 Basic notions	18	14
2.2 Local expressions	20	16
2.3 Linear connections	24	18
2.4 Vertical and complete lifts	27	21
2.5 Semisprays and sprays of holomorphic anchored vector bundles	28	22
3 Connections on holomorphic Lie algebroids	34	25
3.1 The geometry of the total space of the algebroid E	35	26
3.1.1 The tangent bundle of a holomorphic Lie algebroid	35	26
3.1.2 The Lie algebroid structure of the bundle $T'E$	38	28
3.1.3 Nonlinear connections on $T'E$	39	29
3.1.4 Linear connections on $T'E$	40	31
3.2 The prolongation of a holomorphic Lie algebroid	42	32
3.2.1 Semisprays and sprays	44	34
3.2.2 Nonlinear connections on $\mathcal{T}'E$	45	35
3.3 Induced Lagrange structures on holomorphic Lie algebroids	48	37



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII
ȘTIINȚIFICE



4	Finsler structures on holomorphic Lie algebroids	55	41
4.1	The complexified prolongation bundle of a holomorphic Lie algebroid	55	41
4.1.1	Nonlinear connections on $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$	57	43
4.2	Complex Finsler structures on a Lie algebroid	59	44
4.1.1	The Chern-Finsler connection of an algebroid	60	45
4.1.2	Kähler Finsler algebroids	67	49
5	Laplace operators on complex Lie Finsler algebroids	69	51
5.1	Covariant derivatives on the prolongation bundle	70	51
5.2	Vertical and horizontal Laplace operators for functions defined of E	71	52
5.3	The horizontal Laplace operator for forms on $\mathcal{T}E$	76	55
6	Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids	80	59
6.1	The Chern-Finsler and Rund connections	81	59
6.2	Vanishing theorems	83	61
7	The warped product of holomorphic Lie algebroids	87	63
7.1	Properties of Finsler structures	88	63
7.2	The warped product of algebroids	90	64
7.2.1	The prolongation bundle of the warped product bundle	91	65
7.2.2	The Chern-Finsler connection of the warped product ..	92	66
7.3	A warped Finsler product model for gravitational and electromagnetic theories	95	68
8	Original contributions. Dissemination of results	99	71
	Bibliography	102	75
	Appendices	110	81

Introducere

Geometria spațiilor Finsler își are originile istorice în renumita dizertație a lui P. Finsler din 1918. Pentru o perioadă îndelungată însă, puțini matematicieni, dintre care amintim pe E. Cartan, L. Berwald, S. S. Chern, H. Rund, au avut răbdarea de a studia mai în amănunt geometria Finsler. Abia în anii 1970, se dezvoltă interesul pentru geometria Finsler, o dată cu clarificarea noțiunii de conexiune neliniară, care devine instrumentul esențial pentru studiul acestei geometrii. Unii dintre matematicienii care s-au remarcat în acest domeniu sunt M. Matsumoto din Japonia sau R. Miron din România.

În geometria complexă, noțiunea de metrică Finsler a fost introdusă prin analogie cu cazul real de G. Rizza, dar geometria Finsler complexă începe să prezinte interes mai ales după ce S. Kobayashi găsește un exemplu de astfel de metrică. Alte contribuții importante au fost aduse în acest domeniu de către H. L. Royden, J. Faran, T. Aikou.

Dintre monografiile de referință din domeniul geometriei Finsler complexe trebuie menționate cea a lui M. Abate și G. Patrizio ([A-P], 1994) sau cea a lui G. Munteanu ([MG1], 2004). Primii autori folosesc metode similare geometriei riemanniene pentru a caracteriza metrica lui Kobayashi cu ajutorul geodezicelor complexe ale spațiilor Finsler cu curbura secțională olomorvă negativă. Motivată de numeroasele aplicații din fizica relativistă cuantică, monografia lui G. Munteanu [MG1] extinde geometria Finsler complexă la geometriile Lagrange și Hamilton complexe.

O clasă deosebit de importantă de spații Finsler complexe o constituie algebroizii Lie olomorfi. Studiul acestora a fost realizat de autorul prezentei teze într-o serie de lucrări [IA3, I-M4, IA5, IA6, IA7, I-M8]. Ideea studiului a pornit de la construcțiile din cazul real. Teoria algebroizilor Lie reali a fost intens studiată în ultimele decenii, interesul fiind motivat de aplicațiile speciale din mecanică, datorate proprietății de unificare a fibratelor tangente și algebrelor Lie. Studiul a fost inițiat de Weinstein [WA1, WA2], care a dezvoltat o teorie generalizată a lagrangienilor pe algebroizi Lie și a obținut ecuațiile Euler-Lagrange utilizând structura dualului unui algebroid Lie și

transformări Legendre asociate unui lagrangian regulat. De asemenea, el ridică problema dezvoltării unui formalism similar celui al lui Klein [K] din mecanica lagrangienilor ordinari, fără a face referire la dual.

Un prim răspuns la problema lui Weinstein a fost oferit de E. Martinez [ME1, ME2], care a dezvoltat ideile anterior formulate de Klein folosind prelungiri ale algebroizilor Lie. Aceste construcții au fost introduse sub o altă denumire de Higgins și Mackenzie [H-M]. Abordarea lui Martinez s-a dovedit deosebit de aplicativă, ea fiind utilizată pentru a studia aproape toate aspectele teoriei clasice, spre exemplu condiții vakonomice și neolonomie, teoria Hamilton-Jacobi, teoria controlului, sisteme de ordin superior (a se vedea [dL-M-M, ME3]).

O altă abordare a problemei lui Weinstein utilizează structurile triplet Tulczyjew, iar legătura dintre cele două abordări a fost recent investigată în [J]. Aplicații recente ale algebroizilor au fost date în optimizarea controlului, probleme de interpolare, planificarea traiectoriilor și multe altele, se pot consulta [CL, dL-M-M] și numeroasele referințe ale acestor lucrări.

* * *

În cadrul tezei de doctorat intitulată "OPERATORI DIFERENȚIALI PE SPAȚII FINSLER COMPLEXE", ne propunem să studiem operatori binecunoscuți în geometria diferențială definiți pe anumite clase de spații Finsler complexe. Mai exact, introducem diferențiale și operatori diferențiali complecși de tip Laplace pentru funcții și forme diferențiale definite pe grupuri Lie complexe, pe fibrare vectoriale și algebroizi Lie complecși, studiem geometriile acestor spații și dăm aplicații din geometria complexă și Finsler complexă.

Multiplele aplicații ale construcțiilor geometrice din teoria algebroizilor Lie, prezentate mai sus, vin să motiveze alegerea unuia dintre cadrele geometrice utilizate în prezenta lucrare pentru studiul operatorilor diferențiali, acest cadru fiind reprezentat de algebroizii Lie olomorfi.

Am urmărit în realizarea tezei de doctorat direcțiile de studiu ale școlii românești de geometrie Finsler complexă, inițiată de domnul Prof. dr. Gheorghe Munteanu. Teza este structurată pe șapte capitole, cuprinzând rezultatele obținute de autor.

Capitolul 1

Operatorul Laplace pentru funcții olomorfe pe grupuri Lie complexe

Considerăm în acest prim capitol al tezei cazul grupurilor Lie complexe, pe care definim un operator Laplace pentru funcții olomorfe definite pe un astfel de grup. Obținem caracterizarea locală a acestui operator și exemplificăm o serie de aplicații în teoria multiplicatorilor ultim olomorfi.

1.1 Operatorul Laplace pe varietăți Finsler complexe

Reamintim pe scurt câteva noțiuni și rezultate legate de operatorul Laplace, obținute în cazul varietăților Finsler complexe [Z-Z1, Z-Z2]. Remarcăm că definiții și proprietăți similare sunt prezentate în cazul fibratelor Finsler complexe în [IC2]. Notățiile utilizate sunt cele clasice, din [A-P, AT1, AT4, MG1].

1.1.1 Operatorul Laplace orizontal pentru funcții

Pe o varietate Finsler complexă n -dimensională M cu funcția Finsler F , fie $\widetilde{T'M} = T'M - \{0\}$, cu coordonatele locale (z^k, η^k) , și $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$. Tensorul metric hermitian al varietății $\widetilde{T'M}$ este

$$\widehat{g} = g_{i\bar{j}}(z, \eta) dz^i \otimes d\bar{z}^j + g_{i\bar{j}}(z, \eta) \delta v^i \otimes \delta \bar{v}^j,$$

unde $\{dz^i, d\bar{z}^j, \delta v^i, \delta\bar{v}^j\}$ este un reper dual reperului adaptat $\{\delta_i, \delta_{\bar{i}}, \partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ pe $T'\widetilde{T'M}$. Notăm $g = \det(g_{i\bar{j}})$.

Fie $dV = g^2 dz \wedge d\bar{z} \wedge \delta v \wedge \delta\bar{v}$, unde $dz = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$, $d\bar{z} = d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n$, $\delta v = \delta v^1 \wedge \dots \wedge \delta v^n$, $\delta\bar{v} = \delta\bar{v}^1 \wedge \dots \wedge \delta\bar{v}^n$, forma volum asociată metricii hermitiene \widehat{g} pe $\widetilde{T'M}$, și fie L_X derivata Lie în raport cu $X \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$. Divergența câmpului vectorial $X = X^i \delta_i + \dot{X}^i \dot{\partial}_i \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$ este definită prin ecuația $L_X dV = (\text{div } X) dV$. Aceasta se descompune în $\text{div } X = \text{div}_h X + \text{div}_v X = \text{div } X^h + \text{div } X^v$, cu

$$\text{div}_h X = \nabla_{\delta_i} X^i - X^i P_i, \quad \text{div}_v X = \nabla_{\dot{\partial}_i} \dot{X}^i + \dot{X}^i C_i,$$

unde $P^i = L_{ij}^j - L_{ji}^j$, $C_i = C_{ij}^j = C_{ji}^j$, iar L_{jk}^i și C_{jk}^i sunt coeficienții conexiunii Chern-Finsler ∇ [A-P, MG1].

Gradientul unei funcții $f \in C^\infty(\widetilde{T'M})$ este definit prin $\widehat{g}(X, \text{grad } f) = Xf$, $\forall X \in \Gamma(T'\widetilde{T'M})$, iar acesta se descompune în $\text{grad } f = \text{grad}_h f + \text{grad}_v f$, unde

$$\text{grad}_h f = g^{\bar{j}i} (\delta_{\bar{j}} f) \delta_i, \quad \text{grad}_v f = g^{\bar{j}i} (\dot{\partial}_{\bar{j}} f) \dot{\partial}_i.$$

Definiția operatorului Laplace orizontal pentru funcții este

$$\Delta_h f = \text{div}_h \circ \text{grad}_h f.$$

Expresia locală a acestuia este

$$\Delta_h f = \frac{1}{g} \delta_i [g g^{\bar{j}i} (\delta_{\bar{j}} f)]. \quad (1.1.1)$$

1.1.2 Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale

Fie Ψ și Φ două forme diferențiale orizontale de tip (p, q) cu suport compact pe $\widetilde{T'M}$, exprimate local prin

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{p!q!} \Psi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_q}, \\ \Phi &= \frac{1}{p!q!} \Phi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\bar{j}_q}. \end{aligned}$$

Se definește produsul interior

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{1}{p!q!} \Psi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} \overline{\Phi^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p j_1 \dots j_q}},$$

unde $\Phi^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} = \Phi_{k_1 \dots k_p \bar{l}_1 \dots \bar{l}_q} g^{\bar{l}_1 k_1} \dots g^{\bar{i}_p k_p} g^{\bar{l}_1 \bar{j}_1} \dots g^{\bar{l}_p \bar{j}_p}$. Cu ajutorul acestuia, se poate defini un produs interior global,

$$(\Psi, \Phi) = \int_{\widetilde{T'M}} \langle \Psi, \Phi \rangle dV. \quad (1.1.2)$$

În definiția operatorului Laplace orizontal, sunt necesari adjuncții operatorilor

$$\begin{aligned} (\partial_h \Psi)_{i_1 \dots i_{p+1} \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} &= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \delta_{i_k} \Psi_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1} \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}, \\ (\bar{\partial}_h \Psi)_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q \bar{j}_{q+1}} &= (-1)^p \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k-1} \delta_{\bar{j}_k} \Psi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \widehat{\bar{j}_k} \dots \bar{j}_{q+1}}, \end{aligned}$$

în raport cu produsul interior (1.1.2). Dacă operatorii adjuncți sunt, respectiv,

$$\begin{aligned} \partial_h^* : A^{p,q}(\widetilde{T'M}) &\rightarrow A^{p-1,q}(\widetilde{T'M}), \quad (\partial_h \Psi, \Phi) = (\Psi, \partial_h^* \Phi), \\ \bar{\partial}_h^* : A^{(p,q)}(\widetilde{T'M}) &\rightarrow A^{p,q-1}(\widetilde{T'M}), \quad (\bar{\partial}_h \Psi, \Phi) = (\Psi, \bar{\partial}_h^* \Phi), \end{aligned}$$

atunci expresia operatorului $\bar{\partial}_h^*$ pentru $\Phi \in A^{p,q}(\widetilde{T'M})$, necesar definirii Laplacianului, este:

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_h^*)_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} &= (-1)^{p+1} \sum_{k,l=1}^n g^{\bar{l}k} \delta_k (\Phi_{i_1 \dots i_p \bar{l} \bar{j}_2 \dots \bar{j}_q}) \\ &\quad + \text{termeni de ordin zero în } \Phi. \end{aligned}$$

Operatorul Laplace orizontal pentru forme orizontale este

$$\square_h : A^{p,q}(\widetilde{T'M}) \rightarrow A^{p,q}(\widetilde{T'M}), \quad \square_h = \bar{\partial}_h \circ \bar{\partial}_h^* + \bar{\partial}_h^* \circ \bar{\partial}_h. \quad (1.1.3)$$

Expresia acestui operator este dată în

Teorema 1.1.1. [Z-Z1] Dacă (M, F) este o varietate Finsler complexă tare pseudoconvexă, iar Φ este o formă diferențială orizontală de tip (p, q) pe $\widetilde{T'M}$, atunci

$$\begin{aligned} (\square_h \Phi)_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} &= - \sum_{k,l=1}^n g^{\bar{l}k} \{ \delta_k \circ \delta_{\bar{l}} (\Phi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} [\delta_{i_k}, \delta_{\bar{j}_k}] \Phi_{i_1 \dots i_p \bar{l} \bar{j}_1 \dots \widehat{\bar{j}_k} \dots \bar{j}_q} \} \\ &\quad + \text{termeni de ordin } \leq 1. \end{aligned}$$

Pe o varietate Finsler tare Kähler, datorită simetriei coeficienților orizontali ai conexiunii Chern-Finsler, $L_{jk}^i = L_{kj}^i$, rezultatul anterior devine

Teorema 1.1.2. [Z-Z1] *Dacă (M, F) este o varietate Finsler tare Kähler, iar Φ este o formă diferențială orizontală de tip (p, q) pe $\widetilde{T'M}$, atunci*

$$\begin{aligned} (\square_h \Phi)_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} &= - \sum_{k,l=1}^n g^{\bar{l}k} \nabla_{\delta_k} \circ \nabla_{\delta_{\bar{l}}} \Phi_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} \\ &+ \sum_{k,l=1}^n \sum_{m=1}^q g^{\bar{l}k} [\nabla_{\delta_k}, \nabla_{\delta_{\bar{j}_m}}] \Phi_{i_1 \dots i_p \bar{l} \bar{j}_1 \dots \widehat{\bar{j}_m} \dots \bar{j}_q}. \end{aligned}$$

1.2 Grupuri Lie complexe

Un *grup Lie complex* este un grup G care este în același timp varietate complexă, astfel încât operația de înmulțire $\phi : G \times G \rightarrow G$, $\phi(u, v) = u \cdot v$ și inversa $u \in G \mapsto u^{-1} \in G$ sunt olomorfe [WHC].

Fie G un grup Lie complex de dimensiune n . Algebra sa Lie, notată cu \mathfrak{g} , are ca spațiu vectorial de bază spațiul tangent olomorf $T_e^{1,0}G$ în elementul identitate $e \in G$.

Urmărind ideile din [GSI], considerăm $\{E_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, n$ o bază a algebrei Lie \mathfrak{g} și χ^α , $\alpha = 1, \dots, n$, baza duală a 1-formelor Maurer-Cartan, adică $\chi^\alpha(E_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$. E_α sunt câmpuri vectoriale olomorfe, iar χ^α sunt 1-forme olomorfe stâng invariante.

O formă diferențială η se numește *stâng-invariantă* dacă este invariantă la orice translație la stânga $L_a(a \in G)$, adică dacă $L_a^* \eta = \eta$ pentru orice element $a \in G$, unde L_a^* este aplicația cotangentă olomorfă a lui L_a . Rezultă că orice formă stâng invariantă trebuie să fie olomorfă. Pentru un element $U \in \mathfrak{g}$ și un element η în spațiul dual \mathfrak{g}^* , $\eta(U)$ este constant pe G . Dacă $d = \partial + \bar{\partial}$ este descompunerea uzuală a derivatei exterioare, atunci

$$\partial \eta(U, V) = -\eta([U, V]), \quad (1.2.4)$$

unde U, V sunt elemente ale algebrei \mathfrak{g} și η este un element al dualului. Notând

$$[E_\beta, E_\gamma] = C_{\beta\gamma}^\alpha E_\alpha, \quad (1.2.5)$$

relația (1.2.4) implică

$$\partial \chi^\alpha = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \chi^\beta \wedge \chi^\gamma. \quad (1.2.6)$$

Constantele complexe $C_{\beta\gamma}^\alpha$ se numesc *constantele de structură* ale algebrei Lie \mathfrak{g} în raport cu baza olomorfa $\{E_1, \dots, E_n\}$. Aceste constante nu sunt arbitrare, ci trebuie să satisfacă relațiile

$$[E_\alpha, E_\beta] + [E_\beta, E_\alpha] = 0 \quad (1.2.7)$$

și

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + [E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] + [E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = 0 \quad (1.2.8)$$

oricare ar fi $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, adică

$$C_{\beta\gamma}^\alpha + C_{\gamma\beta}^\alpha = 0 \quad (1.2.9)$$

și

$$C_{\alpha\beta}^\rho C_{\gamma\rho}^\delta + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\alpha\rho}^\delta + C_{\gamma\alpha}^\rho C_{\beta\rho}^\delta = 0. \quad (1.2.10)$$

Ecuțiile (1.2.6) se numesc *ecuațiile Maurer-Cartan olomorfe*.

Datorită ecuației (1.2.5), constantele de structură sunt componentele unui tensor olomorf pe $T_e^{1,0}G$ de tip (1, 2). Putem defini un nou tensor olomorf pe $T_e^{1,0}G$ prin

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\sigma}^\rho C_{\rho\beta}^\sigma \quad (1.2.11)$$

în raport cu baza olomorfa stâng-invariantă $\{E_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) a algebrei \mathfrak{g} . Este ușor de verificat faptul că acest tensor olomorf este simetric. De asemenea, se poate arăta că o condiție necesară și suficientă pentru ca grupul Lie complex G să fie semisimplu este ca matricea complexă $(C_{\alpha\beta})_{n \times n}$ să fie inversabilă.

În raport cu un sistem de coordonate locale complexe (u^1, \dots, u^n) pe grupul G , câmpurile vectoriale olomorfe E_α , $\alpha = 1, \dots, n$, pot fi exprimate prin $E_\alpha = \chi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Deoarece grupul Lie G este paralelizabil complex [WHC], matricea de tip $n \times n$ (χ_α^i) are rangul n și prin urmare, notând

$$g^{ij} = \chi_\alpha^i \chi_\beta^j C^{\alpha\beta}, \quad (1.2.12)$$

unde $(C^{\alpha\beta})_{n \times n}$ este matricea inversă matricei $(C_{\alpha\beta})_{n \times n}$, obținem o matrice simetrică și pozitiv definită, $(g^{ij})_{n \times n}$. Așadar, putem defini o *metrică riemanniană olomorfa* g pe G prin intermediul formei pătratice complexe

$$ds^2 = g_{jk} du^j \otimes du^k, \quad (1.2.13)$$

unde $(g_{jk})_{n \times n}$ este matricea inversă matricei $(g^{jk})_{n \times n}$, mai exact, avem $g_{jk} = C_{\beta\gamma}^\alpha \chi_j^\beta \chi_k^\gamma$. Mai mult, această metrică olomorfa este complet determinată de grupul Lie complex G .

Definim n câmpuri vectoriale olomorfe covariante χ^α ($\alpha = 1, \dots, n$) pe G , cu componentele locale χ_i^α ($i = 1, \dots, n$) date de

$$\chi_i^\alpha = C^{\alpha\beta} \chi_\beta^j g_{ij}. \quad (1.2.14)$$

Considerăm de asemenea cele n^2 1-forme liniare olomorfe $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i du^k$ definite local de coeficienții olomorfi

$$\Gamma_{jk}^i = \chi_\alpha^i \frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k}, \quad (1.2.15)$$

care pot fi exprimați de asemenea prin

$$\Gamma_{jk}^i = -\chi_j^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha^i}{\partial u^k}. \quad (1.2.16)$$

Aceștia reprezintă coeficienții locali ai unei conexiuni olomorfe stâng-invariante ∇ a grupului Lie G .

Se poate verifica ușor că pe intersecția $U \cap U'$ a două hărți locale, 1-formele olomorfe ω_j^i se schimbă după regulile

$$\frac{\partial u'^k}{\partial u^j} \omega_k'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k} \omega_j^k - \frac{\partial^2 u'^i}{\partial u^l \partial u^j} du^l.$$

Următorul pas natural este considerarea torsiunii conexiunii definite anterior. Ca în cazul grupurilor Lie reale (vezi [GSI, RH]), tensorul olomorf de curbură se va scrie

$$T_{jk}^i = \frac{1}{2} \chi_\alpha^i \left(\frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k} - \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial u^j} \right) \quad (1.2.17)$$

sau, folosind ecuațiile (1.2.5) și ecuațiile Maurer-Cartan olomorfe (1.2.6),

$$T_{jk}^i = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \chi_\alpha^i \chi_j^\beta \chi_k^\gamma. \quad (1.2.18)$$

Totodată, considerând coeficienții locali ai conexiunii Levi-Civita olomorfe $\overset{\circ}{\nabla}$ în raport cu metrica olomorfă $g = ds^2$ din (1.2.13) a grupului G , aceștia pot fi exprimați ca

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2} \chi_\alpha^i \left(\frac{\partial \chi_j^\alpha}{\partial u^k} + \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial u^j} \right), \quad (1.2.19)$$

de unde rezultă că

$$\Gamma_{jk}^i = \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i + T_{jk}^i. \quad (1.2.20)$$

1.3 Operatori Laplace pentru funcții olomorfe pe G

În această secțiune, introducem un operator Laplace ce acționează asupra funcțiilor olomorfe definite pe grupul Lie complex G , operator ce depinde de tensorul metric olomorf dat pe G .

Notăm $\omega = \chi^1 \wedge \cdots \wedge \chi^n$, unde $\chi^i, i = 1, \dots, n$ sunt elementele bazei 1-formelor olomorfe definite în Secțiunea 1.2. Atunci ω este o n -formă olomorfă stâng-invariantă nicăieri nulă, numită *elementul de volum olomorf*. Aceasta poate fi utilizată pentru a defini *divergența* unui câmp vectorial olomorf $U = U^\alpha E_\alpha$ prin $\text{div}(U)\omega = \partial(i_U\omega)$.

O proprietate utilă a divergenței este

$$\text{div}(fU) = Uf + f \text{div} U$$

pentru un câmp vectorial olomorf U și o funcție olomorfă f definită pe G . Mai notăm că pentru un câmp vectorial olomorf dat $U = U^\alpha E_\alpha$ pe G , avem

$$\text{div} U = E_\alpha(U^\alpha). \quad (1.3.21)$$

Fie acum G un grup Lie complex semisimplu cu metrica riemanniană olomorfă

$$g = g_{ij} du^i \otimes du^j, \quad g_{ij} = C_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta. \quad (1.3.22)$$

Un calcul simplu conduce la $g(E_\alpha, E_\beta) = C_{\alpha\beta}$, iar tensorul metric olomorf g va fi utilizat acum pentru a defini *gradientul* unei funcții olomorfe f definită pe G . Dacă $\text{grad} f = V^\beta E_\beta$ este un câmp vectorial olomorf exprimat într-o hartă locală, atunci definiția clasică $g(U, \text{grad} f) = Uf$ aplicată pentru $U = U^\alpha E_\alpha$ implică $V^\beta = C^{\beta\alpha}(E_\alpha f)$, prin urmare

$$\text{grad} f = C^{\beta\alpha}(E_\alpha f) E_\beta. \quad (1.3.23)$$

Putem defini acum un *operator Laplace pentru funcții olomorfe* pe G prin

$$\Delta f = (\text{div} \circ \text{grad})f = C^{\beta\alpha} E_\beta(E_\alpha f). \quad (1.3.24)$$

În coordonate locale, regăsim acum forma clasică a Laplacianului unei funcții, în cazul grupurilor Lie complexe:

$$\Delta f = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right). \quad (1.3.25)$$

Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} = \nabla_i \nabla_j f,$$

unde ∇_k este derivata covariantă în raport cu conexiunea olomorfa stâng-invariantă ∇ definită în Secțiunea 1.2, aceasta conduce la următoarea formulă pentru operatorul Laplace pentru funcții olomorfe pe G :

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f. \quad (1.3.26)$$

Observația 1.3.1. Dacă grupul G nu este semisimplu, atunci putem defini o metrică riemanniană olomorfa pe G prin

$$h = h_{ij} du^i \otimes du^j, \quad h_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta, \quad (1.3.27)$$

iar calcule similare celor de mai sus conduc la următoarea expresie locală a Laplacianului:

$$\Delta f = E_\alpha^2 f = h^{ij} \nabla_i \nabla_j f. \quad (1.3.28)$$

Observația 1.3.2. Notând cu $\overset{\circ}{\nabla}$ derivata covariantă în raport cu conexiunea Levi-Civita, din înlocuirea relației (1.2.20) în (1.3.25) rezultă

$$\begin{aligned} \Delta f &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \overset{\circ}{\Gamma}_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right) - T_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \\ &= g^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j f - T_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k}, \end{aligned}$$

astfel că o funcție olomorfa armonică f pe G trebuie să satisfacă identitatea

$$T_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} = g^{ij} \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j f. \quad (1.3.29)$$

Să notăm că T_{jk}^i este tensorul olomorf de torsiune al conexiunii olomorfe din (1.2.15).

Vom calcula expresiile locale ale Laplacianului în două cazuri particulare.

Exemplul 1.3.1. Considerăm varietatea complexă standard 4-dimensională \mathbb{C}^4 cu coordonatele olomorfe (z^1, z^2, z^3, z^4) și următoarea regulă multiplicativă:

$$\begin{aligned} (z^1, z^2, z^3, z^4) \cdot (w^1, w^2, w^3, w^4) &= \\ &= \left(z^1 e^{\lambda w^3} + w^1, z^2 e^{-\lambda w^3} + w^2, z^3 + w^3, z^4 + w^4 - \lambda z^1 w^2 e^{\lambda w^3} \right), \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

unde λ este un parametru nenul. Legea multiplicativă anterioară înzestrează varietatea \mathbb{C}^4 cu o structură Lie complexă non-abeliană. Pentru $\lambda = 0$, obținem grupul Lie abelian uzual \mathbb{C}^4 , ca urmare vom considera aici $\lambda \neq 0$. Vom nota cu G grupul Lie complex non-abelian \mathbb{C}^4 înzestrat cu legea de multiplicare (1.3.30).

Este ușor de văzut că următoarele câmpuri vectoriale olomorfe stâng-invariante, date prin

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial z^1}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial z^2} - \lambda z^1 \frac{\partial}{\partial z^4}, \quad Z_3 = \lambda z^1 \frac{\partial}{\partial z^1} - \lambda z^2 \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z^3}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial z^4} \quad (1.3.31)$$

formează o bază a algebrei Lie olomorfe \mathfrak{g} a grupului G . Avem $C_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 4}$, cu următoarele excepții:

$$C_{12}^4 = -\lambda, \quad C_{13}^1 = \lambda, \quad C_{23}^2 = -\lambda.$$

În consecință, câmpul tensorial introdus în (1.2.11) se va anula, adică $C_{\alpha\beta} = 0$ pentru orice $\alpha, \beta = \overline{1, 4}$, ceea ce înseamnă că grupul G nu este semisimplu. Atunci, conform relației (1.3.28), operatorul Laplace Δ ce acționează asupra funcțiilor olomorfe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^4)$ este

$$\Delta f = \sum_{\alpha} Z_{\alpha}^2 f = Z_1^2 f + Z_2^2 f + Z_3^2 f + Z_4^2 f.$$

Astfel, un calcul simplu utilizând câmpurile vectoriale olomorfe din (1.3.31) ne conduce la

$$\begin{aligned} \Delta f &= (1 + \lambda^2(z^1)^2) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^1)^2} + (1 + \lambda^2(z^2)^2) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (z^3)^2} \\ &+ (1 + \lambda^2(z^1)^2) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^4)^2} - 2\lambda^2 z^1 z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^2} + 2\lambda z^1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^3} \\ &- 2\lambda z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2 \partial z^3} - 2\lambda z^1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2 \partial z^4} + \lambda^2 z^1 \frac{\partial f}{\partial z^1} + \lambda^2 z^2 \frac{\partial f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Exemplul 1.3.2. Fie $G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ cu înmulțirea

$$(z^1, z^2) \circ (w^1, w^2) = \left(z^1 w^1, \frac{1}{2} w z^1 w^2 + z^2 (w^1)^2 \right)$$

și fie câmpurile vectoriale $Z_1 = z^1 \frac{\partial}{\partial z^1} + 2z^2 \frac{\partial}{\partial z^2}$, $Z_2 = z^1 \frac{\partial}{\partial z^2}$. Atunci (G, \circ) este un grup Lie complex cu algebra Lie olomorfe $\mathfrak{g} = \text{span}\{Z_1, Z_2\}$. Mai mult, G nu este semisimplu, după cum se poate vedea calculând tensorul $C_{\alpha\beta}$, ca

în exemplul anterior. Avem prin urmare $\Delta f = Z_1^2 f + Z_2^2 f$, din care rezultă următoarea formă a Laplacianului:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (z^1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (z^1)^2} + ((z^1)^2 + 4(z^2)^2) \frac{\partial^2 f}{\partial (z^2)^2} \\ &\quad + 4z^1 z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^1 \partial z^2} + z^1 \frac{\partial f}{\partial z^1} + 4z^2 \frac{\partial f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Propoziția 1.3.1. *Are loc identitatea:*

$$[\Delta, E_\alpha] = 2(h^{ij}\chi_\alpha^k - h^{ik}\chi_\alpha^j)\Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l}, \quad (1.3.32)$$

unde $h^{ij} = \delta^{\alpha\beta}\chi_\alpha^i\chi_\beta^j$, iar Γ_{jk}^l sunt coeficienții locali ai conexiunii olomorfe ∇ .

Vom ilustra această proprietate în cazul grupului Lie complex $GL(n, \mathbb{C})$.

Exemplul 1.3.3. Deoarece $\dim(GL(n, \mathbb{C})) = n^2$, toți indicii din cazul general vor fi înlocuiți cu perechi de indici, de exemplu α devine $\binom{\alpha}{\beta}$, i devine $\binom{i}{m}$, etc. Convenim ca aceste perechi să fie rescrise într-o manieră care va fi clară din cele ce urmează.

Mai întâi, fie $u \in GL(n, \mathbb{C})$ o matrice complexă cu elementele $\{A_i^\alpha\}$, astfel încât un câmp vectorial olomorf stâng-invariant va fi notat prin

$$E_\alpha^\beta := E_{\binom{\alpha}{\beta}} = \chi_{\binom{i}{\beta}}^{\binom{i}{m}} \frac{\partial}{\partial u^{\binom{i}{m}}} =: \chi_{\alpha m}^{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_m^i},$$

unde $\chi_{\alpha m}^{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_m^i} = \delta_\alpha^i A_m^\beta$ (vezi [I-1]). Metrica riemanniană olomorfă este

$$h^{\binom{i}{m}} \binom{j}{n} =: h_{mn}^{ij} = \delta^{\alpha\beta} \delta_{\nu\mu} \chi_{\alpha m}^{i\nu} \chi_{\beta n}^{j\mu}$$

(grupul $GL(n, \mathbb{C})$ nu este semisimplu). Coeficienții locali ai conexiunii olomorfe definite în Secțiunea 1.2 sunt

$$\Gamma_{\binom{j}{n} \binom{k}{p}}^{\binom{i}{q}} =: \Gamma_{jkq}^{lnp} = \chi_{j\tau}^{\varepsilon n} \frac{\partial \chi_{\varepsilon q}^{l\tau}}{\partial u_p^k}.$$

Aceste relații implică, după calcule,

$$\begin{aligned} [\Delta, E_\gamma]f &= 2(h_{mn}^{ij}\chi_{\gamma p}^{k\sigma} - h_{mp}^{ik}\chi_{\gamma n}^{j\sigma})\Gamma_{jkq}^{lnp} \frac{\partial^2 f}{\partial u_m^i \partial u_q^l} \\ &= 2\left(\delta_{\nu\mu} A_m^\nu A_p^\sigma \frac{\partial A_q^\mu}{\partial u_p^k} - \delta_{\nu\mu} A_m^\nu A_p^\mu \frac{\partial A_q^\sigma}{\partial u_p^k}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_m^i \partial u_q^l}. \end{aligned}$$

1.4 Ultim multiplicatori olomorfi pentru câmpuri vectoriale olomorfe pe G

Elementul de volum olomorf ω introdus pe G în Secțiunea 1.3 va fi utilizat acum pentru a introduce noțiunea de ultim multiplicator olomorf. Calculurile sunt similare celor realizate în cazul varietăților diferențiabile de M . Crâșmăreanu [CM1, CM4] sau în cazul varietăților complexe, de M . Crâșmăreanu și C. Ida, [C-I-P2]. Mai exact, considerăm un câmp vectorial olomorf de forma $U = U^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\theta = i_U \omega$ și fie

$$\frac{du^i}{dt} = U^i(u^1(t), \dots, u^n(t)), \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in \mathbb{R}$$

un sistem de ecuații diferențiale complexe pe G definit de câmpul vectorial olomorf U .

Definiția 1.4.1. O funcție olomorfă μ pe G se numește ultim multiplicator olomorf al sistemului de ecuații diferențiale complexe generat de U (sau ultim multiplicator olomorf pentru U) dacă

$$\partial(\mu\theta) := \partial\mu \wedge \theta + \mu \cdot \partial\theta = 0. \quad (1.4.33)$$

Propoziția 1.4.1. O funcție olomorfă μ pe G este un ultim multiplicator olomorf pentru câmpul vectorial olomorf U dacă și numai dacă

$$U(\mu) + \mu \cdot \operatorname{div} U = 0. \quad (1.4.34)$$

Este interesant acum de determinat un ultim multiplicator olomorf al unui câmp vectorial olomorf U de tip divergență, adică $\mu = \operatorname{div} V$ pentru un câmp vectorial olomorf arbitrar V pe G .

Propoziția 1.4.2. Dacă V este un câmp vectorial olomorf care satisface condiția $L_U L_V \omega = 0$, atunci $\mu = \operatorname{div} V$ este un ultim multiplicator olomorf pentru câmpul vectorial olomorf U .

Următorul pas al studiului este investigarea ultim multiplicatorilor olomorfi ai câmpurilor vectoriale olomorfe de tip gradient definite pe grupul Lie complex G înzestrat cu o metrică riemanniană olomorfă (de exemplu, metricile g sau h din Secțiunea 1.3).

Propoziția 1.4.3. Fie G un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g . Dacă f, μ sunt funcții olomorfe pe G astfel încât f este un ultim multiplicator olomorf pentru $\operatorname{grad} \mu$, iar μ este un ultim multiplicator olomorf pentru $\operatorname{grad} f$, atunci $f\alpha$ este o funcție olomorfă armonică pe G .

Corolarul 1.4.1. *Dacă G este un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g , iar f este o funcție olomorfă pe G , atunci μ este un ultim multiplicator olomorf pentru $U = \text{grad } \mu$ dacă și numai dacă μ^2 este o funcție olomorfă armonică pe G .*

Corolarul 1.4.2. *Dacă G este un grup Lie complex înzestrat cu o metrică olomorfă g , iar f este o funcție olomorfă pe G , atunci μ^2 este o funcție olomorfă armonică pe G dacă și numai dacă*

$$\mu\Delta\mu + g(\text{grad } \mu, \text{grad } \mu) = 0.$$

Capitolul 2

Algebroizi Lie olomorfi

Algebroizii Lie reprezintă o generalizare a algebrelor Lie și a distribuțiilor integrabile. Ei sunt fibrare vectoriale ”ancorate” pe fibratul tangent al varietății bază, având un croșet definit pe modulul secțiunilor. Algebroizii Lie oferă un cadru natural pentru dezvoltarea teoriei unor operatori diferențiali precum derivata exterioară a formelor diferențiale sau derivata Lie în raport cu un câmp vectorial. Acest cadru este mai general decât cel al fibrelor tangent și cotangent ale unei varietăți și produsele acestora.

Principalele exemple de algebroizi Lie olomorfi sunt reprezentate de fibratul tangent olomorf $T'M$ al unei varietăți complexe, de fibratul cotangent al unei varietăți Poisson, sau de distribuțiile complexe involutive. Acestea din urmă sunt acele subfibrare olomorfe ale varietăților complexe, care sunt închise în raport cu paranteza Lie (a se vedea [MCM] pentru mai multe detalii în cazul real). Alte exemple pot fi obținute din cele prezentate în [I-P], în cazul varietăților complexe (varietăți Poisson complexe, prelungirea unui algebroid Lie, structuri produs).

Algebroizii Lie sunt un domeniu de cercetare deosebit de activ, cu aplicații în multe ramuri ale matematicii și fizicii. Un exemplu binecunoscut este studiul lui A. Weinstein [WA1] în mecanică. El a dezvoltat o teorie generală a lagrangienilor pe algebroizi Lie și a obținut ecuațiile Euler-Larange folosind dualul unui algebroid Lie și transformări Legendre asociate unui Lagrangian regulat. E. Martinez [ME1, ME2] a dezvoltat formalismul lui Klein pe algebroizi Lie definind noțiunea de prelungire a unui algebroid pentru care a utilizat o aplicație diferențiabilă. El a propus un formalism în care fibratele tangente la E și E^* sunt înlocuite prin prelungirile acestora, $\mathcal{T}E$ și $\mathcal{T}E^*$. Mai recent, algebroizii Lie au fost investigați de M. Anastasiei [AM1, AM2] și L. Popescu [PL1, PL2].

În geometria complexă, câteva proprietăți ale algebroizilor Lie complecși și olomorfi au fost studiate în [I-P], [L-S-X]. Capitolul de față analizează noțiuni specifice din teoria algebroizilor Lie reali în cazul algebroizilor Lie olomorfi, considerând obiecte geometrice olomorfe.

2.1 Noțiuni introductive

Fie M o varietate complexă n -dimensională și E un fibrat vectorial olomorf de rang m peste M . Aceasta înseamnă că schimbările de hărți vectoriale pe E se fac olomorfe. Notăm cu $\pi : E \rightarrow M$ proiecția olomorfă a fibratului, cu $\Gamma(E)$, modulul secțiunilor olomorfe ale lui π și fie $T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ fibratul tangent complexificat al varietății M , descompus în fibratul tangent olomorf și cel antiolomorf.

Pe un fibrat vectorial (E, π, M) , definiția unei legi de derivare este $D : \chi(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, $D_X s$, astfel încât $D_{fX} s = f D_X s$ și $D_X (fs) = f D_X s + X(f)s$. Aceste noțiuni au sens și pe fibrele lui E , dar paranteza Lie $[s_1, s_2]f$, unde $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, nu are semnificație matematică. Aceasta este problema de la care a pornit în definirea noțiunii de algebroid.

Definiția 2.1.1. Fibratul vectorial olomorf E peste M se numește ancorat dacă există un morfism olomorf de fibre vectoriale $\rho : E \rightarrow T'M$, numit aplicație ancoră sau, pe scurt, ancoră.

Notăm cu $\Gamma(T'M)$ modulul secțiunilor olomorfe ale fibratului tangent olomorf $T'M$, adică mulțimea câmpurilor vectoriale olomorfe pe M , și cu $\mathcal{H}(M)$ inelul funcțiilor olomorfe pe M .

Folosind aplicația ancoră, putem defini o paranteză Lie pe E cu ajutorul parantezei Lie de pe $T'M$, prin

$$\rho([s_1, s_2]_E) = [\rho(s_1), \rho(s_2)]_{T'M}, \quad (2.1.1)$$

$s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. Pentru orice $f \in \mathcal{H}(M)$,

$$\begin{aligned} \rho([s_1, f s_2]_E) &= [\rho(s_1), \rho(f s_2)]_{T'M} \\ &= [\rho(s_1), f \rho(s_2)]_{T'M} \\ &= f [\rho(s_1), \rho(s_2)]_{T'M} + \rho(s_1)(f) \rho(s_2). \end{aligned}$$

Definiția 2.1.2. Un algebroid Lie olomorf peste M este un triplet $(E, [\cdot, \cdot]_E, \rho_E)$, unde E este un fibrat vectorial olomorf ancorat peste M , $[\cdot, \cdot]_E$ este o paranteză Lie pe $\Gamma(E)$ și $\rho_E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T'M)$ este omomorfismul de module

complexe indus de ancora ρ astfel încât

$$[s_1, fs_2]_E = f[s_1, s_2]_E + \rho_E(s_1)(f)s_2 \quad (2.1.2)$$

pentru orice $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ și orice $f \in \mathcal{H}(M)$.

Observația 2.1.1. *Ecuația (2.1.1) este o consecință a acestei definiții [MCM] și semnifică faptul că $\rho_E : (\Gamma(E), [\cdot, \cdot]_E) \rightarrow (\Gamma(T'M), [\cdot, \cdot])$ este un omomorfism de algebre Lie complexe.*

Paranteza Lie $[\cdot, \cdot]_E$ satisface identitatea lui Jacobi

$$[s_1, [s_2, s_3]_E]_E + [s_2, [s_3, s_1]_E]_E + [s_3, [s_1, s_2]_E]_E = 0. \quad (2.1.3)$$

Pe un algebroid Lie olomorf E , putem introduce diferențiala $d_E : \Gamma(\wedge^k E^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{k+1} E^*)$ în manieră clasică, prin

$$\begin{aligned} d_E \varphi(s_0, \dots, s_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \rho_E(s_i)(\varphi(s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_k)) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi([s_i, s_j]_E, s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_k), \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

unde $\varphi \in \Gamma(\wedge^k E^*)$ și $s_i \in \Gamma(E)$, $i = \overline{1, k}$.

Exemplul 2.1.1. Un exemplu interesant de algebroid este reprezentat de fibratul proiectiv PM asociat unei varietăți Finsler complexe (M, F) , $\dim M = n$. Pentru o astfel de varietate [MG1], reamintim că $F : T'M \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție omogenă $F(z, \eta)$ ce depinde de poziția $z \in M$ și de direcția $\eta \in T'_z M$, cu proprietatea $F(z, \lambda\eta) = |\lambda|F(z, \eta)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Pentru orice secțiune nenulă $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n) \in T'_z M$, considerăm coordonatele omogene $[\eta]$ care determină $P_z M$, liniile complexe în $T'_z M$ pentru fiecare $z \in M$. Reuniunea tuturor acestor linii constituie fibratul proiectiv $PM = T'M/\mathbb{C}^*$, care are o structură naturală de fibrat vectorial olomorf, cu proiecția naturală $p(z; [\eta]) = z$ și rang $PM = n - 1$. Dacă M este compactă, atunci PM este o varietate complexă compactă de dimensiune $2n - 1$.

Deoarece η este o secțiune nenulă, putem presupune $\eta^n \neq 0$ (sau altă coordonată, în altă hartă locală) și să considerăm aplicația ancoră $\rho_{PM} : PM \rightarrow T'M$ dată local în punctul $z \in M$ prin $\rho_{PM}(z, [\eta]) = l := \frac{1}{F(z, \eta)} \frac{\bar{\eta}^n}{|\eta^n|} \eta$ pentru orice $\eta \in T'_z M$, nenulă. Este ușor de văzut că $\frac{1}{F(z, \eta)} \frac{\bar{\eta}^n}{|\eta^n|} \eta^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ este o secțiune globală a fibratului imagine inversă $p^* T'M$ peste varietatea complexă PM .

Morfismul ρ_{PM} este bine definit, deoarece $\rho_{PM}(z, [\eta]) = \rho_{PM}(z, [\lambda\eta])$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Prin urmare, (PM, ρ_{PM}) este un algebroid Lie olomorf, cu paranteza Lie definită ca o clasă de echivalență după cum urmează. Dacă notăm paranteza Lie cu $\{\cdot, \cdot\}$ pentru a o deosebi de notația pentru clase de echivalență pe PM , atunci putem defini $\{[\eta], [\theta]\}_{PM} = [\{\rho([\eta]), \rho([\theta])\}_{TM}]$ și este ușor de verificat că această paranteză Lie satisface proprietatea (2.1.2).

2.2 Expresii locale

Dacă $(z^k)_{k=\overline{1, n}}$ este un sistem de coordonate locale complexe peste $U \subset M$ și $\{e_\alpha\}_{\alpha=\overline{1, m}}$ este un reper local al secțiunilor fibratului E peste U , atunci (z^k, u^α) sunt coordonatele locale complexe pe $\pi^{-1}(U) \subset E$, unde $e = u^\alpha e_\alpha(z)$ este un element al fibratului E .

Fie $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ funcțiile de tranziție olomorfe ale fibratului olomorf E . În punctul $z \in U \cap V$, funcțiile $g_{UV}(z)$ sunt reprezentate de matricea complexă de funcții olomorfe $(M_\beta^\alpha(z))$, astfel încât, dacă $(\tilde{z}^k, \tilde{u}^\alpha)$ sunt coordonatele locale pe $\pi^{-1}(V)$, atunci acestea se schimbă după regulile

$$\tilde{z}^k = \tilde{z}^k(z), \quad \tilde{u}^\alpha = M_\beta^\alpha(z) u^\beta. \quad (2.2.5)$$

Matricea Jacobi a legilor de transformare (2.2.5) este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} & 0 \\ \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^h} u^\beta & M_\beta^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

Fie (W_α^β) matricea inversă a matricei (M_β^α) și fie $\{e_\alpha\}$ o bază a secțiunilor fibratului E , adică are loc descompunerea $u = u^\alpha e_\alpha$ pentru orice $u \in \Gamma(E)$. Atunci, aceste secțiuni se schimbă după regulile $\tilde{e}_\alpha = W_\alpha^\beta e_\beta$.

Acțiunea ancorei olomorfe ρ_E poate fi descrisă local prin

$$\rho_E(e_\alpha) = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad (2.2.7)$$

iar paranteza Lie $[\cdot, \cdot]_E$ este dată local prin

$$[e_\alpha, e_\beta]_E = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (2.2.8)$$

Funcțiile olomorfe $\rho_\alpha^k = \rho_\alpha^k(z)$ și $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma(z)$ definite pe M se numesc *funcțiile de structură olomorfe* ale algebroidului Lie E . O schimbare de hărți locale pe E implică

$$\tilde{\rho}_\alpha^k = W_\alpha^\beta \rho_\beta^h \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h}. \quad (2.2.9)$$

Deoarece E este un fibrat vectorial olomorf, structura complexă naturală acționează asupra secțiunilor lui E prin $J_E(e_\alpha) = ie_\alpha$ și $J_E(\bar{e}_\alpha) = -i\bar{e}_\alpha$. Ca urmare, fibratul complexificat $E_{\mathbb{C}}$ al lui E poate fi descompus în $E_{\mathbb{C}} = E' \oplus E''$. Baza locală a secțiunilor lui E' este $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,m}$, iar pentru E'' , baza este reprezentată de conjugatele acestora, $\{\bar{e}_\alpha := e_{\bar{\alpha}}\}_{\alpha=1,m}$. Deoarece $\rho_E : E \rightarrow T'M$ este un omomorfism de module complexe, el poate fi extins în mod natural la fibratul complexificat prin $\rho'(e_\alpha) = \rho_E(e_\alpha)$ și $\rho''(e_{\bar{\alpha}}) = \rho_E(e_{\bar{\alpha}})$. Așadar, ancora poate fi descompusă în $\rho_E = \rho' \oplus \rho''$ pe fibratul complexificat, cu $\rho_\alpha^{\bar{k}} = \rho_\alpha^k = 0$ și $\rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} = \overline{\rho_\alpha^k}$. Prin urmare, fibratele ancorate $(E', \rho', T'M)$ și $(E'', \rho'', T''M)$ sunt algebroizi Lie complecși (vezi și [I-P]). Parantezele Lie sunt definite prin

$$[e_\alpha, e_\beta]' = [e_\alpha, e_\beta]_E = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad [e_{\bar{\alpha}}, e_{\bar{\beta}}]'' = \overline{[e_\alpha, e_\beta]_E} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}},$$

unde $\mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \overline{\mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma}$. Pe fibratul complexificat $E_{\mathbb{C}}$, trebuie să luăm în considerare și parantezele Lie

$$[e_\alpha, e_{\bar{\beta}}] = \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma e_\gamma + \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}, \quad [e_{\bar{\alpha}}, e_\beta] = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^\gamma e_\gamma + \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}.$$

Este evident că $\overline{[e_\alpha, e_{\bar{\beta}}]} = [e_{\bar{\alpha}}, e_\beta]$, deci $\overline{\mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}}$ și $\overline{\mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}}} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma$.

Propoziția 2.2.1. *Funcțiile de structură ale algebroidului Lie complexificat $(E_{\mathbb{C}}, [\cdot, \cdot], \rho_E)$ satisfac identitățile:*

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial z^j} - \rho_\beta^j \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial z^j} &= \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma, & \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma &= -\rho_{\bar{\beta}}^j \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial \bar{z}^j}, & \rho_{\bar{\gamma}}^i \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} &= \rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_{\bar{\beta}}^i}{\partial z^j}, \\ \rho_{\bar{\alpha}}^j \frac{\partial \rho_{\bar{\beta}}^i}{\partial \bar{z}^j} - \rho_{\bar{\beta}}^j \frac{\partial \rho_{\bar{\alpha}}^i}{\partial \bar{z}^j} &= \rho_{\bar{\gamma}}^i \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}, & \rho_{\bar{\gamma}}^i \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} &= -\rho_\beta^j \frac{\partial \rho_{\bar{\alpha}}^i}{\partial z^j}, & \rho_\gamma^i \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\beta}^\gamma &= \rho_{\bar{\alpha}}^j \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial \bar{z}^j}. \end{aligned}$$

În continuare, considerăm algebroidul dual E^* și complexificatul acestuia $E_{\mathbb{C}}^* = E'^* \oplus E''^*$, corespunzător valorilor proprii $\pm i$ ale structurii complexe duale date de $J_E^*(e^\alpha) = ie^\alpha$ și $J_E^*(e^{\bar{\alpha}}) = -ie^{\bar{\alpha}}$, unde $\{e^\alpha, e^{\bar{\alpha}}\}$ este cobaza duală, adică au loc identitățile $e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, $e^\alpha(e_{\bar{\beta}}) = 0$ și conjugatele acestora. În acest caz, diferențiala din relația (2.1.4) se poate extinde la formele din $\Omega_{\mathbb{C}}(E) = \Gamma(\Omega^{p,q}(E_{\mathbb{C}}))$ prin $d_E = \partial'_E + \partial_E + \bar{\partial}_E + \partial''_E$, unde

$$\begin{aligned} \partial'_E : \Omega^{p,q}(E_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \Omega^{p+2,q-1}(E_{\mathbb{C}}), & \partial_E : \Omega^{p,q}(E_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \Omega^{p+1,q}(E_{\mathbb{C}}), \\ \bar{\partial}_E : \Omega^{p,q}(E_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \Omega^{p,q+1}(E_{\mathbb{C}}), & \partial''_E : \Omega^{p,q}(E_{\mathbb{C}}) &\rightarrow \Omega^{p-1,q+2}(E_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Spațiul total al algebroidului Lie olomorf E are o structură de varietate complexă, deoarece funcțiile de tranziție $M_\beta^\alpha(z)$ sunt olomorfe. Considerăm

fibratul tangent complexificat al lui E , $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$, unde $T'E$ este fibratul tangent olomorf și $T''E = \overline{T'E}$.

Pe $T'E$, un câmp natural de repere este $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right\}$, care, datorită matricei (2.2.6), se schimbă după regulile:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^h} &= \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}^k} + \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^h} u^\beta \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial u^\beta} &= M_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}.\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

Cum E este varietate complexă, rezultă că $\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^\alpha}\right\}$ este o bază în $T''E = \overline{T'E}$ și regulile sale de schimbare se deduc din (2.2.10) prin conjugare.

Ca aplicație între varietăți, ancora olomorfe ρ_E indusă de ρ duce coordonatele locale (z^k, u^α) de pe E în coordonatele (z^k, η^k) pe $T'M$, unde $\eta^k = u^\alpha \rho_\alpha^k(z)$. O schimbare de hărți locale implică maparea noilor coordonate $(\tilde{z}^k, \tilde{u}^\alpha)$ în (z'^k, η'^k) , unde coordonatele locale într-o nouă hartă pe $T'M$ sunt:

$$z'^k = z'^k(z), \quad \eta'^k = u^\gamma \rho_\gamma^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}. \quad (2.2.11)$$

Expresia locală a operatorului diferențial ∂_E pentru $f \in \mathcal{H}(M)$ este

$$\partial_E f = \frac{\partial f}{\partial z^k} \rho_\alpha^k e^\alpha,$$

iar pentru $\omega \in \Gamma(E'^*)$, $\omega = \omega_\alpha e^\alpha$,

$$\partial_E \omega = \left(\frac{\partial \omega_\beta}{\partial z^i} \rho_\alpha^i - \frac{1}{2} \omega_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \right) e^\alpha \wedge e^\beta.$$

În particular, avem

$$\partial_E z^k = \rho_\alpha^k e^\alpha, \quad \partial_E e^\alpha = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \wedge e^\gamma.$$

2.3 Conexiuni liniare

Definiția 2.3.1. O conexiune liniară pe algebroidul Lie olomorf $(E, \rho_E, [\cdot, \cdot]_E)$ este o aplicație $\nabla : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ce satisface proprietățile:

- 1) ∇ este \mathbb{R} -biliniară;
- 2) $\nabla_{fu} v = f \nabla_u v$ pentru orice $f \in C^\infty(M)$ și $u, v \in \Gamma(E)$;

3) $\nabla_u f v = (\rho_E(u)f)v + f\nabla_u v$ pentru orice $f \in C^\infty(M)$ și $u, v \in \Gamma(E)$;

4) $\overline{\nabla_u v} = \nabla_{\bar{u}} \bar{v}$.

O conexiune liniară poate fi interpretată ca o aplicație liniară $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$ dată prin $\nabla : s \mapsto \nabla_s$, $\nabla_s(u) = \nabla_s u$ satisfăcând condițiile 3) și 4). Ca în cazul oricărui fibrat olomorfi, putem considera în raport cu câmpul de repere olomorfi $\{e_\alpha\}$ 1-formele de conexiune $\theta_\alpha^\beta : \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{C}$ date de

$$\nabla_s e_\alpha = \theta_\alpha^\beta(s) e_\beta, \quad \alpha = \overline{1, m}. \quad (2.3.12)$$

Notând $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$, avem $\theta_\beta^\gamma(e_\alpha) = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Pentru $s = s^\alpha e_\alpha$ și $u = u^\beta e_\beta$, acțiunea conexiunii liniare asupra secțiunilor din $\Gamma(E)$ este

$$\nabla_s u = s^\alpha \left\{ \rho_\alpha^k \frac{\partial u^\gamma}{\partial z^k} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u^\beta \right\} e_\gamma, \quad (2.3.13)$$

de unde rezultă expresia 1-formei $u \mapsto \nabla u$, $\nabla u(s) = \nabla_s u$:

$$\nabla u = (\rho \circ d_E u^\gamma + \theta_\beta^\gamma \circ u^\beta) e_\gamma. \quad (2.3.14)$$

Considerând structura complexă naturală pe E , obținem prin \mathbb{C} -liniaritate o conexiune liniară pe $(E_{\mathbb{C}}, \rho_E, [\cdot, \cdot]_E)$ ce acționează asupra secțiunilor din $\Gamma(E')$ și $\Gamma(E'')$ astfel:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_\alpha} e_\beta &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}; & \nabla_{e_\alpha} e_{\bar{\beta}} &= \Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma e_\gamma + \Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}; \\ \nabla_{e_{\bar{\alpha}}} e_\beta &= \Gamma_{\bar{\alpha}\beta}^\gamma e_\gamma + \Gamma_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}; & \nabla_{e_{\bar{\alpha}}} e_{\bar{\beta}} &= \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^\gamma e_\gamma + \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Conexiunea ∇ satisface condiția 4) din definiția anterioară, deci $\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} = \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}$, $\overline{\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, etc.

Formele de conexiune θ_α^β extinse pe $E_{\mathbb{C}}$ se numesc de tip $(1,0)$ dacă $\theta_\alpha^\beta(s) = 0$ pentru orice $s \in \Gamma(E'')$, mai exact au loc identitățile $\nabla_{e_\alpha} e_{\bar{\beta}} = \nabla_{e_{\bar{\alpha}}} e_\beta = 0$.

Vom presupune că ∇ este o *conexiune complexă* [I-P] în raport cu J_E , adică $(\nabla_u J_E)(v) = J_E(\nabla_u v)$. În acest caz, ∇ păstrează distribuțiile $\Gamma(E')$ și $\Gamma(E'')$.

Considerăm în continuare pe $(E, \rho_E, [\cdot, \cdot]_E)$ un produs scalar hermitian $g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow \mathbb{C}$, ceea ce înseamnă că pe lângă liniaritatea în primul termen, acesta satisface egalitatea $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$. Conexiunea ∇ se numește *metrică în raport cu g* dacă $\nabla g = 0$, unde

$$(\nabla_s g)(u, v) = \rho(s)(g(u, v)) - g(\nabla_s u, v) - g(u, \nabla_s v), \quad \forall s, u, v \in \Gamma(E). \quad (2.3.16)$$

La fel ca în cazul fibratelor hermitiene, există și în acest caz o unică conexiune liniară metrică în raport cu g , de tip $(1, 0)$, având componentele

$$\theta_\beta^\delta(e_\alpha) = g^{\bar{\gamma}\delta} \rho_\alpha^k \frac{\partial g_{\beta\bar{\gamma}}}{\partial z^k}. \quad (2.3.17)$$

Torsiunea unei conexiuni liniare complexe ∇ pe algebroidul olomorf E este definită ca de obicei prin $T(u, v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u, v]_E$. Extensia sa la secțiunile din $\Gamma(E_{\mathbb{C}})$ are componentele locale $T_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma := T(e_\alpha, e_\beta)$, etc. date de

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^\gamma &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \\ T_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma &= \Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma \\ T_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} &= \Gamma_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

și conjugatele acestora.

Tot în manieră clasică, curbura conexiunii liniare complexe ∇ este $R(u, v)s = \nabla_u \nabla_v s - \nabla_v \nabla_u s - \nabla_{[u, v]_E} s$, unde $u, v, s \in \Gamma(E)$. Pe fibratul complexificat $E_{\mathbb{C}}$, componentele sale locale sunt $R(e_\alpha, e_\beta)e_\gamma =: R_{\gamma; \alpha\beta}^\delta e_\delta$, $R(e_\alpha, e_\beta)e_{\bar{\gamma}} =: R_{\bar{\gamma}; \alpha\beta}^{\bar{\delta}} e_{\bar{\delta}}$, etc., unde

$$\begin{aligned} R_{\gamma; \alpha\beta}^\delta &= \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\delta + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial z^k} - \rho_\beta^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial z^k}, \\ R_{\bar{\gamma}; \alpha\beta}^{\bar{\delta}} &= \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\alpha\bar{\sigma}}^{\bar{\delta}} - \Gamma_{\alpha\bar{\gamma}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\beta\bar{\sigma}}^{\bar{\delta}} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}}{\partial z^k} - \rho_\beta^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}}{\partial z^k}, \\ R_{\gamma; \alpha\bar{\beta}}^\delta &= \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\delta - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma\gamma}^\delta + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial z^k} - \rho_{\bar{\beta}}^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial z^k}, \\ R_{\bar{\gamma}; \alpha\bar{\beta}}^{\bar{\delta}} &= \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\alpha\bar{\sigma}}^{\bar{\delta}} - \Gamma_{\alpha\bar{\gamma}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\beta\bar{\sigma}}^{\bar{\delta}} - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}} - \mathcal{C}_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}} + \rho_\alpha^k \frac{\partial \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}}{\partial z^k} - \rho_{\bar{\beta}}^k \frac{\partial \Gamma_{\alpha\bar{\gamma}}^{\bar{\delta}}}{\partial z^k}, \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

precum și $R_{\gamma; \alpha\bar{\beta}}^\delta = \overline{R_{\bar{\gamma}; \alpha\beta}^{\bar{\delta}}}$, etc.

Conexiunea liniară complexă ∇ se descompune în

$$\nabla = \nabla' + \nabla'',$$

(conform cu [MG1]), unde $\nabla' : \Omega^{p, q}(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow \Omega^{p+1, q}(E_{\mathbb{C}})$ și $\nabla'' : \Omega^{p, q}(E_{\mathbb{C}}) \rightarrow \Omega^{p, q+1}(E_{\mathbb{C}})$. Descompunerea curburii este

$$R = \nabla' \circ \nabla' + \nabla' \circ \nabla'' + \nabla'' \circ \nabla' + \nabla'' \circ \nabla'',$$

astfel încât formele de conexiune și de curbură pot fi scrise sub forma

$$\theta = \theta^{1,0} + \theta^{0,1}, \quad R = R^{2,0} + R^{1,1} + R^{0,2}.$$

Pentru o secțiune $u \in \Gamma(E_{\mathbb{C}})$ și o funcție $f \in \mathcal{H}(M)$, identitatea (2.3.14) conduce la

$$\nabla'(fu) = \rho(u)\partial_E f + f\nabla' u, \quad \nabla''(fu) = \rho(u)\bar{\partial}_E f + f\nabla'' u,$$

astfel încât, dacă forma de conexiune θ este de tip $(1,0)$, adică $\theta^{0,1} = 0$, atunci ∇ este de tip $(1,0)$ și $\nabla'' = \bar{\partial}_E$. Afirmatia reciprocă este de asemenea adevărată.

2.4 Lifturi verticale și complete

Fie f o funcție olomoră pe M . Liftul său vertical f^v pe E este definit prin $f^v(e) = f(\pi(e))$, $e \in E$. Liftul vertical al unei secțiuni olomorfe $Z \in \Gamma_{hol}(E)$, $Z = Z^\alpha e_\alpha$, este un câmp vectorial pe E dat de

$$Z^v(z, u) = Z^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (2.4.20)$$

În particular, $e_\alpha^v = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$.

Lema 2.4.1. *Dacă Z, W sunt secțiuni olomorfe ale algebroidului E și f este o funcție olomoră pe M , atunci*

$$(Z + W)^v = Z^v + W^v, \quad (fZ)^v = f^v Z^v, \quad Z^v f^v = 0.$$

Liftul complet al unei funcții olomorfe f pe M este funcția olomoră f^c definită pe E prin $f^c(e) = \partial^E f(e) = \rho_E(e)f$. Expresia sa locală este

$$f^c(e) = u^\alpha \rho_\alpha^k \frac{\partial f}{\partial z^k}. \quad (2.4.21)$$

Lema 2.4.2. *Dacă Z este o secțiune olomoră a algebroidului E și f, g sunt funcții olomorfe definite pe M , atunci*

$$(f + g)^c = f^c + g^c, \quad (fg)^c = f^c g^v + f^v g^c, \quad Z^v f^c = (\rho_E(Z)f)^v.$$

Liftul complet Z^c al unei secțiuni olomorfe $Z \in \Gamma_{hol}(E)$ este un câmp vectorial pe E definit prin

$$Z^c(z, u) = Z^\alpha \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \left(\rho_\beta^k \frac{\partial Z^\alpha}{\partial z^k} - Z^\gamma \mathcal{C}_{\gamma\beta}^\alpha \right) u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (2.4.22)$$

În particular, $e_\alpha^c = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\gamma}$.

Lema 2.4.3. *Dacă Z este o secțiune olomorfă a algebroidului E și f este o funcție olomorfă pe M , atunci*

$$Z^c f^c = (\rho_E(Z)f)^c, \quad Z^c f^v = (\rho_E(Z)f)^v.$$

Lema 2.4.4. *Dacă Z și W sunt secțiuni olomorfe pe E , atunci*

$$[Z^c, W^c] = [Z, W]_E^c, \quad [Z^c, W^v] = [Z, W]_E^v, \quad [Z^v, W^v] = 0.$$

2.5 Semispray-uri și spray-uri ale fibratelor olomorfe ancorate

Urmărind construcția din cazul real (descrișă, spre exemplu, în [AM1, AM2]), noțiunea de semispray poate fi introdusă de asemenea în cazul unui fibrat vectorial olomorf ancorat (E, π, M) . Fie ρ_E aplicația ancoră, π_* , aplicația tangentă a proiecției π și $\tau_E : T'E \rightarrow E$, fibratul tangent olomorf al fibratului E .

Definiția 2.5.1. O secțiune olomorfă $S : E \rightarrow T'E$ se numește semispray dacă satisface identitățile:

- 1) $\tau_E \circ S = \text{Id}_E$,
- 2) $\pi_* \circ S = \rho_E$.

Fie $c : I \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$ o curbă complexă pe varietatea bază M și $\tilde{c} : I \rightarrow E$ o curbă complexă pe fibratul E , astfel încât $\pi \circ \tilde{c} = c$. Notăm cu $\dot{\tilde{c}}$ câmpul vectorial tangent la curba \tilde{c} .

Definiția 2.5.2. Câmpul vectorial $\dot{\tilde{c}}$ se numește admisibil dacă

$$\pi_*(\dot{\tilde{c}}) = \rho(\tilde{c}). \quad (2.5.23)$$

Local, avem $c(t) = (z^k(t))$, $\tilde{c} = (z^k(t), u^\alpha(t))$ și $\dot{\tilde{c}} = \frac{dz^k}{dt} \frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{du^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, cu $t \in I$. Atunci, curba \tilde{c} este admisibilă dacă și numai dacă

$$\frac{dz^k}{dt}(t) = \rho_\alpha^k(z(t))u^\alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

Dacă descompunem secțiunea olomorfă S ca $S = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, atunci, folosind definiția, rezultă că S este un semispray dacă și numai dacă

$$Z^k(z, u) = \rho_\alpha^k(z)u^\alpha. \quad (2.5.24)$$

Coeficienții $U^\alpha(z, u)$ sunt nedeterminați, de aceea, pentru facilitarea calculelor, considerăm $U^\alpha = -2G^\alpha$ și obținem

$$S = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} - 2G^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (2.5.25)$$

Regulile de schimbare pentru coeficienții semispray-ului S se obțin utilizând matricea (2.2.6):

$$\tilde{Z}^k = \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} Z^h \quad (2.5.26)$$

și respectiv

$$\tilde{G}^\alpha = M_\beta^\alpha G^\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^k} u^\beta \rho_\gamma^k u^\gamma. \quad (2.5.27)$$

Propoziția 2.5.1. *Un câmp vectorial $S = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} - 2G^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in \Gamma(T'E)$ este un semispray dacă și numai dacă coeficienții G^α verifică regulile de transformare (2.5.27).*

O curbă $c : t \mapsto (z^i(t), u^\alpha(t))$ pe E este o *curbă integrală* a semispray-ului S dacă satisface sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dz^i}{dt} = \rho_\alpha^k(t) u^\alpha, \quad \frac{du^\alpha}{dt} + 2G^\alpha(z, u) = 0. \quad (2.5.28)$$

Propoziția 2.5.2. *Un câmp vectorial pe E este un semispray dacă și numai dacă toate curbele sale integrale sunt admisibile.*

În continuare, dacă $h_\lambda : E \rightarrow E$ este omotetia complexă descrisă de $h_\lambda : e \mapsto \lambda e$, cu $\lambda \in \mathbb{C}$, $e \in E$, atunci un semispray S pe E se numește spray dacă

$$S \circ h_\lambda = \lambda h_{\lambda,*} \circ S, \quad (2.5.29)$$

adică dacă funcțiile G^α sunt complex omogene de grad 2 în variabila u .

Dorim în continuare să studiem posibilitatea obținerii unui spray din problema variațională. Primul pas în acest sens îl reprezintă exprimarea ecuațiilor Euler-Lagrange pe algebroidul Lie olomorf E . Deoarece

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz^k}{dt} \frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{d\bar{z}^k}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} + \frac{du^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha},$$

din sistemul (2.5.28) rezultă

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\beta} \right) = \rho_\alpha^k u^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial u^\beta} + \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} \bar{u}^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{z}^k \partial u^\beta} - 2G^\alpha g_{\alpha\beta} - 2\bar{G}^\alpha g_{\beta\bar{\alpha}}. \quad (2.5.30)$$

Propunem că ecuațiile Euler-Lagrange ale algebroidului E sunt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\beta} \right) = \rho_\beta^k \frac{\partial L}{\partial z^k} + \rho_\beta^{\bar{k}} \frac{\partial L}{\partial \bar{z}^k} + Q_\beta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + Q_\beta^{\bar{\alpha}} \frac{\partial L}{\partial \bar{u}^\alpha}, \quad (2.5.31)$$

unde $\rho_\beta^{\bar{k}} = 0$ deoarece E este olomorf, iar Q_β^α și $Q_\beta^{\bar{\alpha}}$ trebuie determinați.

Teorema 2.5.1. *Pe un algebroid Lie olomorf E înzestrat cu un Lagrangian regulat $L(z, u)$ și un tensor metric hermitian $g_{\bar{\alpha}\beta}$ cu $\det(g_{\bar{\alpha}\beta}) \neq 0$, un spray complex canonic este dat de*

$$G^\alpha = \frac{1}{2} \left(g^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{u}^\beta} + \frac{1}{2} W_\varepsilon^\alpha \frac{\partial M_\beta^\varepsilon}{\partial z^k} u^\beta \right) \rho_\gamma^k u^\gamma \quad (2.5.32)$$

Observația 2.5.1. *Dacă Lagrangianul este complex omogen pe E , atunci spray-ul este complex omogen de grad 2 în u .*

Capitolul 3

Conexiuni pe algebroizi Lie olomorfi

Capitolul de față prezintă noțiuni specifice geometriei algebroizilor olomorfi. Ca orice fibrat vectorial olomorf, spațiul total al unui algebroid olomorf este o varietate complexă. În acest capitol, prezentăm studiul geometriei spațiului total al unui algebroid olomorf, urmând modelul geometriei Lagrange.

Pentru studiul varietății complexe E , am considerat două abordări. Prima este reprezentată de fibratul tangent olomorf $T'E$ al algebroidului, pe care la rândul său introducem o structură naturală de algebroid Lie. Geometria fibratului tangent olomorf $T'E$ este "liniarizată" folosind o conexiune neliniară pentru care, în raport cu bazele adaptate, studiem de asemenea o conexiune liniară complexă distinsă.

Cea de-a doua abordare o reprezintă prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ a unui algebroid Lie olomorf. Folosind un lift complet, introducem tensorul Liouville și o structură aproape tangentă, pentru a defini un alt tip de conexiune neliniară pentru prelungirea $\mathcal{T}'E$. Teorema 3.2.1 prezintă procedura de obținere a unei conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}'E$ dat fiind un spray pe $\mathcal{T}'E$. Împreună cu Teorema 2.5.1, putem afirma că am rezolvat problema determinării reperelor adaptate, deci a "liniarizării" geometriei unui algebroid olomorf înzestrat cu un Lagrangian regulat L .

În ultima secțiune a capitolului, studiem posibilitatea inducerii unor structuri Lagrange în cazul algebroizilor olomorfi, pornind de la structuri Lagrange pe fibratul tangent olomorf al varietății bază, $T'M$. Analizăm trei cazuri particulare, în funcție de rangul aplicației ancoră și de dimensiunile varietății M și a fibrei E .

3.1 Geometria spațiului total al algebroidului E

În această secțiune descriem două abordări ale fibratului tangent al unui algebroid Lie olomorf E . Prima dintre acestea este studiul clasic al fibratului tangent al lui E , iar cea de-a doua este reprezentată de prelungirea algebroidului E .

3.1.1 Fibratul tangent al unui algebroid Lie olomorf

Reamintim [MG1] că un spațiu Lagrange complex este o pereche (M, L) , unde $L : T'M \rightarrow \mathbb{R}$ este un Lagrangian regulat, definit pe fibratul tangent olomorf al unei varietăți complexe. Obiectele geometrice care acționează pe un astfel de spațiu Lagrange complex sunt secțiuni ale fibratului tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}(T'M) = T'(T'M) \oplus T''(T'M)$.

Fibratul tangent olomorf $T'M$ al varietății complexe M este la rândul său o varietate complexă, cu schimbările de coordonate locale de la (z^h, η^h) la (z'^k, η'^k) date de

$$z'^k = z'^k(z), \quad \eta'^k = \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \eta^h. \quad (3.1.1)$$

Reperul natural $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \right\}$ într-un punct al spațiului $T'_{(z,\eta)}(T'M)$ se schimbă de la (z^h, η^h) la (z'^k, η'^k) după regulile

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^h} &= \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \frac{\partial}{\partial z'^k} + \frac{\partial^2 z'^k}{\partial z^j \partial z^h} \eta^j \frac{\partial}{\partial \eta'^k}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta^h} &= \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \frac{\partial}{\partial \eta'^k}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Considerăm E și $T'M$ ca varietăți și demonstrăm că ancora ρ duce coordonatele locale (z^k, u^α) de pe E , cu schimbările (2.2.5), în coordonatele locale (z^k, η^k) de pe $T'M$, cu schimbările (3.1.1). Mai mult, vom considera aceleași hărți locale pe M pentru E și $T'M$, adică vom avea aceleași schimbări de coordonate $\tilde{z}^k(z) = z'^k(z)$.

Ca aplicație între varietăți, ancora olomorfă ρ duce (z^k, u^α) de pe E în (z^k, η^k) de pe $T'M$, unde coordonatele direcționale sunt date de

$$\eta^k = u^\alpha \rho_\alpha^k(z). \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) definește un sistem de coordonate pe $T'M$. O schimbare de hărți locale implică transformarea $(\tilde{z}^k, \tilde{u}^\alpha)$ în (z'^k, η'^k) , unde $z'^k = \tilde{z}^k(z) = z'^k(z)$ și

$$\eta'^k = \tilde{u}^\alpha \tilde{\rho}_\alpha^k(\tilde{z}) = M_\beta^\alpha u^\beta W_\alpha^\gamma \rho_\gamma^h \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} = u^\gamma \rho_\gamma^h \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} = \eta^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h},$$

adică regulile de schimbare (3.1.1) sunt îndeplinite, deci avem:

$$z'^k = z'^k(z), \quad \eta'^k = u^\gamma \rho_\gamma^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h}.$$

Aceste legi de transformare au următoarea matrice Jacobi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\rho_\gamma^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \right) u^\gamma & \rho_\beta^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

Notăm în continuare cu $\rho_* : T_{\mathbb{C}}E \rightarrow T_{\mathbb{C}}(T'M)$ aplicația tangentă a ancorei $\rho_E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T'M)$ și cu $J_{T'M}^* : T_{\mathbb{C}}(T'M) \rightarrow T_{\mathbb{C}}(T'M)$, structura complexă naturală pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$.

O structură complexă J_E^* pe fibratul tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}E$ este un endomorfism $J_E^* : T_{\mathbb{C}}E \rightarrow T_{\mathbb{C}}E$ dat de

$$\begin{aligned} J_E^* \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) &= i \frac{\partial}{\partial z^k}, & J_E^* \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \\ J_E^* \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) &= i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, & J_E^* \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} \right) &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Structura complexă J_E^* satisface identitățile $J_E^{*2} = -\text{Id}_{T_{\mathbb{C}}E}$ și $J_{T'M}^* \circ \rho_* = \rho_* \circ J_E^*$.

Descompunerea $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$ a fibratului tangent se datorează structurii complexe J_E^* , fibratele tangente olomorf și antiolomorf ale lui E corespunzând valorilor proprii $\pm i$ ale lui J_E^* .

Am arătat că ancora olomorfă ρ duce coordonatele (z^k, u^α) dintr-o hartă locală a varietății E în coordonatele $(z^k, \eta^k = u^\alpha \rho_\alpha^k(z))$ într-o hartă locală pe $\rho(E) \subset T'M$. Matricea Jacobi a morfismului ρ este

$$\begin{pmatrix} \delta_h^k & 0 \\ \frac{\partial \rho_\alpha^k}{\partial z^h} u^\alpha & \rho_\alpha^h \end{pmatrix}$$

Reperul natural pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$ este atunci $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^k} \right\}$, iar acțiunea aplicației tangente ρ_* este descrisă local pe $\rho(E)$ prin

$$\begin{aligned} \rho_* \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) &=: \frac{\partial^*}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} + u^\alpha \frac{\partial \rho_\alpha^h}{\partial z^k} \frac{\partial}{\partial \eta^h}, \\ \rho_* \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right) &=: \frac{\partial^*}{\partial u^\alpha} = \rho_\alpha^h \frac{\partial}{\partial \eta^h} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

și conjugatele acestora. Baza duală a reperului natural $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \right\}$ indusă de ρ_* pe $\rho(E)$ este

$$\begin{aligned} d^* z^k &= dz^k, \\ d^* \eta^k &= u^\alpha \frac{\partial \rho_\alpha^k}{\partial z^h} dz^h + \rho_\alpha^k du^\alpha. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Pentru o schimbare de coordonate pe $T_{\mathbb{C}}(T'M)$, legile de transformare pe $T_{\mathbb{C}}E$ sunt, datorită matricei Jacobi (3.1.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^*}{\partial z^j} &= \frac{\partial z'^k}{\partial z^j} \frac{\partial}{\partial z'^k} + \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\rho_\gamma^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \right) u^\gamma \frac{\partial}{\partial \eta'^k}, \\ \frac{\partial^*}{\partial u^\beta} &= \rho_\beta^h \frac{\partial z'^k}{\partial z^h} \frac{\partial}{\partial \eta'^k} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

și conjugatele.

3.1.2 Structura de algebroid Lie a fibratului $T'E$

Vom demonstra că fibratul tangent olomorf $T'E$ are o structură de algebroid Lie peste varietatea bază M . Fie $p' : T'M \rightarrow M$ proiecția fibratului tangent olomorf al varietății M și $p'_* : T'(T'M) \rightarrow T'M$, aplicația sa tangentă, ce acționează într-un punct (z, η) prin $Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + V^k \frac{\partial}{\partial \eta^k} \xrightarrow{p'_*} Z^k \frac{\partial}{\partial z^k}$. Atunci, diagrama

$$\begin{array}{ccc} T'E & \xrightarrow{\rho_*} & T'(T'M) \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow p'_* \\ E & \xrightarrow{\rho} & T'M \\ \pi \downarrow & & \downarrow p' \\ M & \xrightarrow{\text{Id}_M} & M \end{array}$$

sugerează definirea aplicației $\Upsilon : T'E \rightarrow T'M$ prin $\Upsilon = p'_* \circ \rho_*$, cu scopul de a introduce o structură de algebroid Lie olomorf pe $T'E$. Deoarece $T'M$ și

$T'E$ sunt fibrante olomorfe, din definiția aplicației Υ rezultă că aceasta este un morfism de fibrante vectoriale.

Local, avem $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k} + V^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \xrightarrow{\rho_*} Z^* = Z^k \frac{\partial^*}{\partial z^k} + V^\alpha \frac{\partial^*}{\partial u^\alpha}$. Acțiunea (3.1.6) și definiția lui p'_* conduc la $\Upsilon(Z) = Z^k \frac{\partial}{\partial z^k}$.

Deoarece $T'E$ este un fibrat vectorial peste M , considerând paranteza Lie a două secțiuni, $[Z, W]_{T'E}$ și $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ (deci $\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0$), obținem

$$[Z, fW]_{T'E} = f[Z, W]_{T'E} + \Upsilon(Z)fW. \quad (3.1.9)$$

Teorema 3.1.1. *Fibratul tangent olomorf $T'E$ are o structură de algebroid Lie peste varietatea complexă M , cu aplicația ancoră Υ .*

Folosind definiția aplicației Υ , obținem că aceasta este un omomorfism între algebrele Lie complexe $(\Gamma(T'E), [\cdot, \cdot]_{T'E})$ și $(\Gamma(T'M), [\cdot, \cdot])$, mai exact are loc identitatea

$$\Upsilon([Z, W]_{T'E}) = [\Upsilon(Z), \Upsilon(W)], \quad \forall Z, W \in \Gamma(T'E).$$

3.1.3 Conexiuni neliniare pe $T'E$

După cum am reamintit mai sus, regulile de schimbare ale reperului natural pe $T_{\mathbb{C}}E$ sunt complicate. În geometria Finsler, soluția acestei probleme este metoda conexiunii neliniare [A-P, MG1]. Să considerăm aplicația tangentă π_* a proiecției $\pi : E \rightarrow M$. Atunci, *fibratul tangent olomorf vertical* al lui E poate fi definit prin $VE = \ker \pi_*$. Un reper local pe VE este $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right\}_{\alpha=1, \overline{m}}$, iar dacă $\pi^*(T'M)$ este fibratul imagine inversă al fibratului tangent olomorf al varietății M , atunci obținem următoarea secvență fundamentală exactă (conform [MG1]):

$$0 \rightarrow VE \xrightarrow{i} T'E \xrightarrow{\pi_*} \pi^*(T'M) \rightarrow 0. \quad (3.1.10)$$

Ca de obicei, o scindare $C : T'E \rightarrow VE$ a acestei secvențe se numește *conexiune neliniară complexă* sau *conexiune Ehresmann* (după T. Aikou, [AT4]) pe E . Aceasta determină descompunerea

$$T'E = VE \oplus HE \quad (3.1.11)$$

a fibratului tangent olomorf al algebroidului olomorf E , unde HE este *distribuția orizontală*, izomorfă cu fibratul imagine inversă $\pi^*(T'M)$.

Descompunerea fibratului tangent complexificat $T_{\mathbb{C}}E$ este obținută prin conjugare:

$$T_{\mathbb{C}}E = HE \oplus VE \oplus \overline{HE} \oplus \overline{VE}.$$

Liftul orizontal $l^h : \pi^*(T'M) \rightarrow HE$ determinat de conexiunea neliniară este definit prin

$$l^h \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) = \frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (3.1.12)$$

(conform [MG1]), unde funcțiile $N_k^\alpha(z, u)$ se numesc *coeficienții conexiunii neliniare complexe* pe E . O schimbare de coordonate locale implică următoarele reguli de transformare pentru $\frac{\delta}{\delta z^h}$:

$$\frac{\delta}{\delta z^h} = \frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} \frac{\delta}{\delta \tilde{z}^k}.$$

Folosind și (2.2.10), obținem regulile de schimbare pentru funcțiile N_k^α :

$$\frac{\partial \tilde{z}^k}{\partial z^h} \tilde{N}_k^\alpha = M_\beta^\alpha N_h^\beta - \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial z^h} u^\beta. \quad (3.1.13)$$

Am obținut câmpul de repere $\left\{ \frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right\}$ pe $T'E$, numit *reper adaptat* al conexiunii neliniare complexe.

Propoziția 3.1.1. *Parantezele Lie ale reperului adaptat pe $T'E$ sunt:*

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\delta}{\delta z^h} \right]_{T'E} &= \left(\frac{\partial N_k^\alpha}{\partial z^h} - \frac{\partial N_h^\alpha}{\partial z^k} \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}; \\ \left[\frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right]_{T'E} &= \left[\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right]_{T'E} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Baza duală reperului adaptat este $\{dz^k, \delta u^\alpha\}$, unde

$$\delta u^\alpha = du^\alpha + N_h^\alpha dz^h. \quad (3.1.15)$$

Un caz particular este cel în care algebroidul E este chiar fibratul tangent olomorf $T'M$. Fie $\left\{ \frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial \eta^k} \right\}$ reperul adaptat al unei conexiuni neliniare pe $T'T'M$, unde

$$\frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^h \frac{\partial}{\partial \eta^h} \quad (3.1.16)$$

și fie $\{dz^k, \delta \eta^k\}$ baza duală, cu

$$\delta \eta^k = d\eta^k + N_h^k dz^h. \quad (3.1.17)$$

Coeficienții conexiunii neliniare complexe se schimbă (conform [MG1]) după regulile:

$$N_h^{lj} \frac{\partial z'^h}{\partial z^k} = \frac{\partial z'^j}{\partial z^h} N_k^h - \frac{\partial^2 z'^j}{\partial z^h \partial z^k} \eta^h. \quad (3.1.18)$$

Vom utiliza frecvent în continuare, acolo unde nu există pericol de confuzii, următoarele abrevieri uzuale:

$$\delta_k = \frac{\delta}{\delta z^k}, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad \dot{\partial}_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

3.1.4 Conexiuni liniare pe $T'E$

Definiția 3.1.1. O conexiune liniară complexă pe $T'E$ este o aplicație

$$D : \Gamma(T'E) \times \Gamma(T'E) \rightarrow \Gamma(T'E), \quad (Z, W) \mapsto D_Z W,$$

astfel încât

$$D_Z(fW) = (\Upsilon(Z)f)W + fD_Z W, \quad \forall f \in \mathcal{H}(M), \forall Z, W \in \Gamma(T'E). \quad (3.1.19)$$

Local, o secțiune $Z \in \Gamma(T'E)$ se poate descompune în reperul adaptat $\{\delta_k, \partial_\alpha\}$ al unei conexiuni neliniare, pe care am descris-o anterior. O conexiune liniară complexă distinsă D pe $T'E$ (care conservă distribuțiile din (3.1.11)) are următorii coeficienți:

$$D_{\delta_k} \delta_j = L_{jk}^i \delta_i, \quad D_{\dot{\partial}_\gamma} \delta_j = C_{j\gamma}^i \delta_i, \quad D_{\delta_k} \dot{\partial}_\beta = L_{\beta k}^\alpha \dot{\partial}_\alpha, \quad D_{\dot{\partial}_\gamma} \dot{\partial}_\beta = C_{\beta\gamma}^\alpha \dot{\partial}_\alpha. \quad (3.1.20)$$

Torsiunea unei conexiuni liniare complexe distinse pe $T'E$ este

$$T(Z, W) = D_Z W - D_W Z - [Z, W]. \quad (3.1.21)$$

Coeficienții săi sunt notați cu $T(\delta_h, \delta_k) = T_{hk}^i \delta_i + T_{hk}^\alpha \dot{\partial}_\alpha$, etc. și sunt dați de

$$\begin{aligned} T_{hk}^i &= L_{kh}^i - L_{hk}^i, \\ T_{hk}^\alpha &= \partial_k N_h^\alpha - \partial_h N_k^\alpha, \\ T_{h\alpha}^i &= -C_{h\alpha}^i, \\ T_{h\alpha}^\beta &= L_{\alpha h}^\beta, \\ T_{\alpha\beta}^\gamma &= C_{\alpha\beta}^\gamma - C_{\beta\alpha}^\gamma. \end{aligned}$$

Curbura unei conexiuni liniare complexe distinse pe $T'E$ este definită prin

$$R(Z, W) = D_Z D_W - D_W D_Z - D_{[Z, W]}. \quad (3.1.22)$$

În reperul adaptat, coeficienții curburii sunt:

$$\begin{aligned}
R_{jkh}^i &= \partial_k L_{jh}^i - \partial_h L_{jk}^i + L_{jh}^l L_{lk}^i - L_{jk}^l L_{lh}^i - (\partial_h N_k^\alpha - \partial_k N_h^\alpha) C_{j\alpha}^i, \\
R_{\beta kh}^\alpha &= \partial_k L_{\beta h}^\alpha - \partial_h L_{\beta k}^\alpha + L_{\beta h}^\gamma L_{\gamma k}^\alpha - L_{\beta k}^\gamma L_{\gamma h}^\alpha - (\partial_h N_k^\gamma - \partial_k N_h^\gamma) C_{\beta\gamma}^\alpha, \\
R_{jk\beta}^i &= \partial_k C_{j\beta}^i + C_{j\beta}^l L_{lk}^i - L_{jk}^l C_{l\beta}^i, \\
R_{\gamma k\beta}^\alpha &= \partial_k C_{\gamma\beta}^\alpha + C_{\gamma\beta}^\varepsilon L_{\varepsilon k}^\alpha - L_{\gamma k}^\varepsilon C_{\varepsilon\beta}^\alpha, \\
R_{j\gamma\beta}^i &= C_{j\beta}^l C_{l\gamma}^i - C_{j\gamma}^l C_{l\beta}^i, \\
R_{\varepsilon\gamma\beta}^\alpha &= C_{\varepsilon\beta}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\alpha - C_{\varepsilon\gamma}^\sigma C_{\sigma\beta}^\alpha.
\end{aligned}$$

3.2 Prelungirea unui algebroid Lie olomorf

Vom introduce noțiunea de prelungire a unui algebroid Lie olomorf E peste o varietate complexă M , folosind aplicația tangentă $\pi_* : T'E \rightarrow T'M$ și ancora olomorfă $\rho : E \rightarrow T'M$. Definim submulțimea $\mathcal{T}'E$ a produsului $E \times T'E$ prin

$$\mathcal{T}'E = \{(e, v) \in E \times T'E \mid \rho(e) = \pi_*(v)\} \quad (3.2.23)$$

și aplicația $\pi_{\mathcal{T}'} : \mathcal{T}'E \rightarrow E$, dată prin $\pi_{\mathcal{T}'}(e, v) = \pi_E(v)$, unde $\pi_E : T'E \rightarrow E$ este proiecția tangentă. Atunci $(\mathcal{T}'E, \pi_{\mathcal{T}'}, E)$ este un fibrat vectorial olomorf peste E , de rang $2m$. Mai mult, este ușor de verificat că proiecția pe al doilea factor, $\rho_{\mathcal{T}'} : \mathcal{T}'E \rightarrow T'E$, $\rho_{\mathcal{T}'}(e, v) = v$, este ancora unui nou algebroid Lie olomorf peste varietatea complexă E .

Principalele avantaje ale construcției de mai sus sunt constituite de similaritățile pe care le comportă studiul geometriei fibratului prelungire cu studiul geometriei fibratului $T'T'M$ al unei varietăți complexe M , fiind o generalizare a acestuia. În acest studiu, un rol esențial este jucat de noțiunea de fibrat vertical. Definim fibratul vertical al prelungirii folosind proiecția pe primul factor $\tau_1 : \mathcal{T}'E \rightarrow E$, $\tau_1(e, v) = e$, prin

$$V\mathcal{T}'E = \ker \tau_1 = \{(e, v) \in \mathcal{T}'E \mid \tau_1(e, v) = 0\}.$$

Din construcția de mai sus, rezultă că elementele fibratului vertical $V\mathcal{T}'E$ sunt de forma $(0, v) \in E \times \mathcal{T}'E$, cu $\pi_*(v) = 0$. Atunci, elementele verticale $(0, v) \in V\mathcal{T}'E$ au proprietatea $v \in \ker \pi_*$ și v este un vector vertical pe E .

Coordonatele locale pe $\mathcal{T}'E$ sunt $(z^k, u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha)$, obținute din coordonatele locale (z^k, u^α) ale lui e folosind identitatea $\rho(e) = \pi_*(v)$, din care rezultă că vectorul v are forma

$$v = \rho_\alpha^k v^\alpha \frac{\partial}{\partial z^k} + w^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Dacă $\{e_\alpha\}_{\overline{1,m}}$ este baza secțiunilor olomorfe pe E , atunci baza locală a secțiunilor olomorfe în $\Gamma(\mathcal{T}'E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, definită prin

$$\mathcal{Z}_\alpha(e) = \left(e_\alpha(\pi(e)), \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} \Big|_e \right), \quad \mathcal{V}_\alpha(e) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \Big|_e \right),$$

unde $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right\}$ este reperul natural pe $T'E$.

Dacă W este o secțiune olomorfă a fibratului prelungire $\mathcal{T}'E$, atunci descompunerea sa în baza $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ este

$$W = Z^\alpha \mathcal{Z}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha,$$

unde Z^α și V^α sunt funcții olomorfe ce depind de z și u .

Câmpul vectorial olomorf $\rho_{\mathcal{T}}(W) \in \Gamma(T'E)$ poate fi scris ca

$$\rho_{\mathcal{T}}(W) = \rho_\alpha^k Z^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial z^k} \Big|_{(z,u)} + V^\alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \Big|_{(z,u)}.$$

O secțiune $Z \in \Gamma(E)$ poate fi liftată la secțiuni ale fibratului prelungire $\mathcal{T}'E$ considerând lifturile sale vertical și complet, Z^V și respectiv Z^C , definite în Capitolul 2. Pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$, lifturile sunt definite prin

$$Z^V(e) = (0, Z^v(e)), \quad Z^C(e) = (Z(\pi(e)), Z^c(e)), \quad e \in E.$$

În coordonate locale, dacă $Z = Z^\alpha e_\alpha$, atunci expresiile lifturilor Z^V și Z^C sunt, respectiv,

$$Z^V = Z^\alpha \mathcal{V}_\alpha, \quad Z^C = Z^\alpha \mathcal{Z}_\alpha + \left(\rho_\beta^k \frac{\partial Z^\alpha}{\partial z^k} - Z^\gamma \mathcal{C}_{\gamma\beta}^\alpha \right) u^\beta \mathcal{V}_\alpha.$$

În particular, avem $e_\alpha^V = \mathcal{V}_\alpha$ și $e_\alpha^C = \mathcal{Z}_\alpha - \mathcal{C}_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma \mathcal{V}_\beta$.

Paranteza Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$ satisface identitățile

$$[Z^V, W^V]_{\mathcal{T}} = 0, \quad [Z^V, W^C]_{\mathcal{T}} = [Z, W]_E^V, \quad [Z^C, W^C]_{\mathcal{T}} = [Z, W]_E^C$$

pentru $Z, W \in \Gamma(E)$. Structura de algebroid Lie olomorf a fibratului vectorial $(\mathcal{T}'E, \pi_{\mathcal{T}}, E)$ este așadar dată de $([\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}}, \rho_{\mathcal{T}})$. Acțiunea ancorei $\rho_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$ este descrisă local de

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_\alpha) = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Lema 3.2.1. *Parantezele Lie ale bazei $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ sunt:*

$$[\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{Z}_\beta]_{\mathcal{T}} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{Z}_\gamma, \quad [\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0, \quad [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} = 0.$$

Analog cazului real [ME1], putem defini un operator diferențial $\partial_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}'E$. Notând cu $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ baza duală bazei $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, avem

$$\partial_{\mathcal{T}} z^k = \rho_\alpha^k \mathcal{Z}^\alpha, \quad \partial_{\mathcal{T}} u^\alpha = \mathcal{V}^\alpha$$

și

$$\partial_{\mathcal{T}} \mathcal{Z}^\alpha = -\frac{1}{2} \mathcal{C}_{\beta\gamma}^\alpha \mathcal{Z}^\beta \wedge \mathcal{Z}^\gamma, \quad \partial_{\mathcal{T}} \mathcal{V}^\alpha = 0.$$

3.2.1 Semispray-uri și spray-uri

În cazul fibratului tangent olomorf $T'M$, se știe că un spray determină o conexiune neliniară, însă acest lucru nu este valabil pentru un fibrat vectorial arbitrar E . Vom rezolva această problemă folosind noțiunea de prelungire a unui algebroid.

Un semispray poate fi considerat și pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ a algebroidului Lie olomorf E . Fie \mathcal{L} secțiunea Liouville complexă pe $\mathcal{T}'E$, definită prin

$$\mathcal{L}(e) = (0, e_e^V), \quad e \in E. \quad (3.2.24)$$

Expresia în coordonate a secțiunii \mathcal{L} este

$$\mathcal{L} = u^\alpha \mathcal{V}_\alpha. \quad (3.2.25)$$

De asemenea, fie T structura tangentă (numită și endomorfism vertical) definită pe $\mathcal{T}'E$ prin

$$T(\mathcal{Z}^C) = \mathcal{Z}^V, \quad T(\mathcal{Z}^V) = 0. \quad (3.2.26)$$

În coordonate locale, avem $T = \mathcal{V}_\alpha \otimes \mathcal{Z}^\alpha$, de unde rezultă

$$T(\mathcal{Z}_\alpha) = \mathcal{V}_\alpha, \quad T(\mathcal{V}_\alpha) = 0. \quad (3.2.27)$$

Lema 3.2.2. *Dacă T este structura tangentă complexă pe $\mathcal{T}'E$ și \mathcal{L} este secțiunea Liouville complexă, atunci*

$$T^2 = 0, \quad \text{Im } T = \ker T = V\mathcal{T}'E, \quad [\mathcal{L}, T]_{\mathcal{T}} = -T. \quad (3.2.28)$$

Definiția 3.2.1. O secțiune \mathcal{S} a algebroidului Lie olomorf $\mathcal{T}'E$ se numește semispray complex dacă

$$T(\mathcal{S}) = \mathcal{L}.$$

Expresia locală a unui semispray pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}'E$ este

$$\mathcal{S} = u^\alpha \mathcal{Z}_\alpha - 2G^\alpha(z, u)\mathcal{V}_\alpha.$$

Dacă, în plus, $[\mathcal{L}, \mathcal{S}]_{\mathcal{T}} = \mathcal{S}$, atunci \mathcal{S} se numește *spray*, iar G^α sunt funcții omogene de grad 2.

3.2.2 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}'E$

Vom studia în această secțiune metoda conexiunii neliniare, aplicate anterior pe fibratul tangent olomorf $T'E$, în cazul prelungirii olomorfe $\mathcal{T}'E$ a algebroidului Lie olomorf E . O conexiune neliniară complexă pe $\mathcal{T}'E$ este dată de un subfibrat vectorial complex $H\mathcal{T}'E$ al fibratului $\mathcal{T}'E$ astfel încât acesta din urmă se descompune în $\mathcal{T}'E = H\mathcal{T}'E \oplus V\mathcal{T}'E$. Expresiile liftului orizontal l^h de la $\mathcal{T}'E$ la $H\mathcal{T}'E$ sunt:

$$l^h(\mathcal{Z}_\alpha) = \mathcal{Z}_\alpha - N_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta, \quad l^h(\mathcal{V}_\alpha) = 0,$$

unde $N_\alpha^\beta = N_\alpha^\beta(z, u)$ sunt funcții definite pe E , numite coeficienții conexiunii neliniare pe prelungirea $\mathcal{T}'E$.

Notăm cu

$$\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{Z}_\alpha - N_\alpha^\beta \mathcal{V}_\beta \tag{3.2.29}$$

pentru a obține un câmp local de repere $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ pe $\mathcal{T}'E$, numit *reper adaptat* în raport cu conexiunea neliniară complexă de pe $\mathcal{T}'E$. Atunci, avem

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_\alpha) = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} - N_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \quad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{3.2.30}$$

Dualul reperului adaptat este $\{\mathcal{Z}^\alpha, \delta\mathcal{V}^\alpha\}$, unde

$$\delta\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{V}^\alpha + N_\beta^\alpha \mathcal{Z}^\beta,$$

iar $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ este baza duală bazei $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$.

Propoziția 3.2.1. *Parantezele Lie ale reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ sunt:*

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]_{\mathcal{T}} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma + \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, \\ [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= \frac{\partial N_\alpha^\gamma}{\partial u^\beta} \mathcal{V}_\gamma, \\ [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= 0, \end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\alpha\beta}^{\varepsilon} N_{\varepsilon}^{\gamma} + \rho_{\beta}^k \frac{\partial N_{\alpha}^{\gamma}}{\partial z^k} - \rho_{\alpha}^k \frac{\partial N_{\beta}^{\gamma}}{\partial z^k} - N_{\beta}^{\varepsilon} \frac{\partial N_{\alpha}^{\gamma}}{\partial u^{\varepsilon}} + N_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{\partial N_{\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\varepsilon}}.$$

Să considerăm acum conexiunea neliniară complexă de pe fibratul tangent olomorf $T'E$ dată de (3.1.12). Coeficienții săi, $N_k^{\alpha}(z, u)$, se schimbă după regulile (3.1.13), iar reperul adaptat este $\left\{ \frac{\delta}{\delta z^k}, \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \right\}$, unde

$$\frac{\delta}{\delta z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k} - N_k^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}.$$

Este evident interesantă relația dintre cele două conexiuni neliniare de pe $T'E$ și respectiv $\mathcal{T}'E$. Prima relație din (3.2.30) ne sugerează să considerăm un alt reper adaptat pe $T'E$, definit prin

$$\delta_{\alpha} = \rho_{\alpha}^k \frac{\partial}{\partial z^k} - N_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial u^{\beta}}, \quad (3.2.31)$$

și să impunem ca el să respecte regulile de schimbare

$$\delta_{\alpha} = M_{\alpha}^{\beta} \tilde{\delta}_{\beta} \quad (3.2.32)$$

sau, folosind (3.1.13) și (2.2.10),

$$M_{\alpha}^{\beta} \tilde{N}_{\beta}^{\gamma} = M_{\beta}^{\gamma} N_{\alpha}^{\beta} - \rho_{\alpha}^k \frac{\partial M_{\beta}^{\gamma}}{\partial z^k} u^{\beta}. \quad (3.2.33)$$

Observăm că aceste reguli de schimbare pot fi obținute din (3.1.13) contractând cu ρ_{α}^k și notând

$$N_{\alpha}^{\beta} = \rho_{\alpha}^k N_k^{\beta}. \quad (3.2.34)$$

Propoziția 3.2.2. *O conexiune neliniară complexă pe fibratul tangent olomorf $T'E$, având coeficienții N_k^{β} , induce o conexiune neliniară complexă pe fibratul prelungire olomorf $\mathcal{T}'E$, având coeficienții N_{α}^{β} dați de relația (3.2.34). Mai mult, relațiile dintre reperele adaptate de pe $T'E$ și $\mathcal{T}'E$ sunt*

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_{\alpha}) = \rho_{\alpha}^k \frac{\delta}{\delta z^k}. \quad (3.2.35)$$

Acest rezultat arată că reperul adaptat (3.2.31) poate fi interpretat ca definind o nouă conexiune neliniară complexă pe E . Această conexiune are o proprietate interesantă, și anume faptul că poate fi derivată dintr-un spray. Mai exact, are loc

Teorema 3.2.1. *Dacă G^α sunt coeficienții unui spray complex pe $T'E$, definiți de (2.5.27), atunci funcțiile*

$$N_\alpha^\beta = \frac{\partial G^\beta}{\partial u^\alpha} + P_\alpha^\beta \quad (3.2.36)$$

definesc o conexiune neliniară complexă pe $T'E$, unde

$$P_\alpha^\beta = \frac{1}{4} W_\gamma^\beta \left(\rho_\alpha^k \frac{\partial M_\delta^\gamma}{\partial z^k} u^\delta - \frac{\partial M_\alpha^\gamma}{\partial z^k} \rho_\delta^k u^\delta \right). \quad (3.2.37)$$

3.3 Structuri Lagrange induse pe algebroizi Lie olomorfi

O întrebare naturală ce apare în studiul geometriei algebroizilor Lie olomorfi se referă la investigarea legăturii dintre două conexiuni neliniare pe E și respectiv pe $T'M$.

Geometria fibratului tangent olomorf $T'M$ înzestrat cu o funcție Lagrange complexă $L(z, \eta)$, unde

$$g_{i\bar{j}}(z, \eta) = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j} \quad (3.3.38)$$

definește o metrică nedegenerată, este binecunoscută. Perechea (M, L) se numește *spațiu Lagrange complex* [MG1]. Pentru a o deosebi de E , vom nota în continuare această pereche cu $(T'M, L)$.

O conexiune neliniară remarcabilă pe $T'M$ este

$$N_k^i = g^{\bar{j}i} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{\eta}^j}, \quad (3.3.39)$$

numită conexiune neliniară complexă Chern-Lagrange. Dacă L este complex omogen în variabila η , adică avem $L(z, \lambda\eta) = \lambda\bar{\lambda}L(z, \eta)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci (M, L) se numește *spațiu Finsler complex* și în acest caz particular (3.3.39) definește o conexiune neliniară complexă pe $T'M$, numită conexiunea neliniară Chern-Finsler.

I) Cazul $m = n = \text{rang } \rho$.

În acest caz rezultatul este predictibil. Reamintim că pe varietatea E avem drept coordonate într-o hartă locală (z^k, u^α) , în timp ce pe $T'M$ avem (z^k, η^k) , unde $\eta^k = u^\alpha \rho_\alpha^k(z)$, după cum am arătat mai sus. Toți indicii $\alpha, \beta, \dots, i, j, \dots$ iau valorile $\bar{1}, n$.

Deoarece $n = \text{rang } \rho$, rezultă că ρ este un difeomorfism, având inversa $\rho^{-1} = [\rho_k^\alpha]$, astfel încât $\rho_\alpha^k \rho_k^\beta = \delta_\alpha^\beta$ și $u^a = \rho_k^\alpha \eta^k$.

Dacă $(T'M, L)$ este un spațiu Lagrange (Finsler) complex cu funcția Lagrange $L(z, \eta)$, atunci, conform relației (3.1.3), aceasta induce pe $\rho(E)$ o altă funcție Lagrange, $L^*(z, u) = L(z, \eta(u))$, bine definită datorită relațiilor (3.1.1), (2.2.5) și (2.2.9). Tensorul metric este

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z, u) := \frac{\partial^2 L^*}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^\beta} = \rho_\alpha^i \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}.$$

Deoarece ρ este difeomorfism, $\text{rang } g_{\alpha\bar{\beta}} = n = m$, iar L^* poate fi considerat ca funcție Lagrange pe E .

Numim perechea (E, L^*) *structură Lagrange* pe algebroidul Lie E . Notăm că dacă L este omogenă, atunci $L^*(z, \lambda u) = \lambda \bar{\lambda} L^*(z, u)$, caz în care pe E este indusă o *structură Finsler*.

În cazul în care $m = n = \text{rang } \rho$, difeomorfismul ρ_* duce descompunerea $T'E = VE \oplus HE$ în $T'T'M = VT'M \oplus HT'M$ păstrând distribuțiile, iar ρ_*^{-1} are rolul reciproc.

Propoziția 3.3.1. *Dacă $(T'M, L)$ este un spațiu Lagrange (Finsler) complex și (3.3.39) este o conexiune neliniară complexă asociată, atunci*

$$N_k^* = g^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial^2 L^*}{\partial z^k \partial \bar{u}^\beta} \quad (3.3.40)$$

este conexiunea neliniară indusă pe algebroidul Lie E , numită conexiunea Chern-Lagrange (Chern-Finsler) a algebroidului.

II) Cazul $\text{rang } \rho = m < n$.

În acest caz, morfismul ρ duce E în $\rho(E)$, care este o subvarietate scufundată a lui $T'M$.

Ca în primul caz, vom induce pe E o structură Lagrange bine definită, indusă de o structură Lagrange $(T'M, L)$.

Fie $g_{i\bar{j}}(z, \eta) = \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^i \partial \bar{\eta}^j}$ tensorul metric definit de Lagrangianul regulat $L : T'M \rightarrow \mathbb{R}$. Ca în primul caz, considerăm funcția Lagrange indusă pe $\rho(E)$ dată de $L^*(z, u) = L(z, \eta(u))$, cu tensorul metric

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z, u) := \frac{\partial^2 L^*}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^\beta} = \rho_\alpha^i \rho_{\bar{\beta}}^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}.$$

Deoarece $\text{rang } \rho = m$ și $\text{rang}[g_{i\bar{j}}] = n > m$, rezultă că $\text{rang}[g_{\alpha\bar{\beta}}] = m$.

Fie $X_\alpha = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} \in \chi(M)$, $\alpha = \overline{1, m}$, câmpuri vectoriale pe varietatea bază M . Din rang $\rho = m$ obținem că $\{X_\alpha\}$ sunt liniar independente și pot fi liftate pe $\rho(E)$ prin $\left\{X_\alpha^* := \frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}_{\alpha=\overline{1, m}}$, care definește o subdistribuție m -dimensională $V\rho(E)$ a distribuției n -dimensionale $VT'M$.

Să fixăm o conexiune neliniară complexă $N_k^h(z, \eta)$ pe $T'M$, în particular putem alege conexiunea Chern-Lagrange, și considerăm bazele și bazele duale adaptate. Căutăm o conexiune neliniară $N_k^{\alpha}(z, \eta(u))$ indusă de $N_k^h(z, \eta)$ ca imaginea prin ρ a unei conexiuni neliniare $N_k^\alpha(z, u)$ pe E .

Notăm cu $G = g_{i\bar{j}} \delta \eta^i \otimes \delta \bar{\eta}^j$ structura metrică pe $VT'M$. Completăm $\{X_\alpha^*\}_{\alpha=\overline{1, m}}$ cu $\{Y_a\}_{a=\overline{1, n-m}}$, câmpuri vectoriale normale la $V\rho(E)$ în raport cu G . Mai mult, presupunem că acești vectori sunt ortonormali. Scriind $Y_a = Y_a^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}$, condițiile de ortogonalitate conduc la $g_{i\bar{j}} Y_a^i \rho_\alpha^{\bar{j}} = g_{i\bar{j}} \rho_\alpha^i Y_a^{\bar{j}} = 0$, iar cele de normalitate dau $g_{i\bar{j}} Y_a^i Y_b^{\bar{j}} = \delta_{ab}$.

Am obținut astfel $\mathcal{R}^* = \{X_\alpha^*, Y_a\}$, un reper pe $VT'M$ cu matricea $R = [\rho_\alpha^i; Y_a^i]$ de schimbare de la reperul natural $\left\{\frac{\partial}{\partial \eta^k}\right\}$. Fie $R^{-1} = [\rho_i^\alpha; Y_i^a]^t$ matricea sa inversă, astfel încât

$$\rho_i^\alpha \rho_\beta^i = \delta_\beta^\alpha; \quad \rho_i^\alpha Y_a^i = 0; \quad Y_i^a Y_b^i = 0; \quad \rho_\alpha^j \rho_i^\alpha + Y_a^j Y_i^a = \delta_i^j. \quad (3.3.41)$$

Fie $N_k^h(z, \eta)$ o conexiune neliniară complexă pe $T'M$ și $N_k^\alpha(z, u)$ o conexiune neliniară pe E , cu bazele duale adaptate $\{dz^k, \delta u^\alpha = du^\alpha + N_h^\alpha dz^h\}$ și respectiv $\{dz^k, \delta \eta^k = d\eta^k + N_h^k dz^h\}$. Identitățile (3.1.7) sugerează considerarea bazei duale $\delta^* \eta^k$ ca reperul de forme $\delta^* \eta^k = d^* \eta^k + N_h^k d^* z^h$ indus pe $\rho(E)$, unde $N_h^k = N_h^k(z, \eta)$ cu $\eta^k = \rho_a^k u^\alpha$. Dintre acestea, numai m sunt liniar independente. În continuare, vom identifica $N_h^k = N_h^k$.

Definiția 3.3.1. Funcțiile N_k^α sunt coeficienții unei conexiuni neliniare numite conexiune indusă pe E de către conexiunea N_k^h de pe $T'M$ dacă

$$\delta u^\alpha = \rho_k^\alpha \delta^* \eta^k. \quad (3.3.42)$$

Propoziția 3.3.2. Dacă $N_h^\alpha(z, u)$ este conexiunea neliniară indusă pe E de conexiunea neliniară $N_h^k(z, \eta)$ pe $T'M$, atunci

$$\text{i) } dz^k = d^* z^k; \quad \delta^* \eta^k = \rho_\alpha^k \delta u^\alpha + Y_a^k Y_j^a H_h^j dz^h, \quad \text{unde } H_h^j = N_h^j + u^\beta \frac{\partial \rho_\beta^j}{\partial z^h}.$$

$$\text{ii) } \frac{\delta^*}{\delta z^k} = \frac{\delta}{\delta z^k} + Y_k^a Y_a^h H_h^j \frac{\partial}{\partial \eta^j}; \quad \frac{\partial^*}{\partial u^\alpha} = \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial \eta^k}.$$

Să considerăm acum pe $T'M$ conexiunea Chern-Lagrange, $N_k^i = g^{\bar{j}i} \frac{\partial^2 L}{\partial z^k \partial \bar{u}^{\bar{j}}}$, iar pe $\rho(E)$ considerăm o conexiune neliniară de tip Chern-Lagrange,

$$N_k^\alpha = g^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial^2 L^*}{\partial^* z^k \partial^* \bar{u}^{\bar{\beta}}}. \quad (3.3.43)$$

Propoziția 3.3.3. *Conexiunea neliniară indusă pe E de conexiunea Chern-Lagrange dată de (3.3.39) pe $T'M$ coincide cu (3.3.43).*

III) Cazul rang $\rho = n < m$.

În acest caz, ρ este o submersie și $\rho(E)$ poate fi identificată cu $T'M$. Nu putem obține aici o structură Lagrange complexă pe E indusă de una de pe $T'M$, dar invers, o structură Lagrange pe $T'M$ indusă de una definită pe E poate fi obținută impunând anumite condiții suplimentare.

Fie $L(z, u)$ o funcție Lagrange pe E cu tensorul metric $g_{\alpha\bar{\beta}}(z, u) = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^{\bar{\beta}}}$, având $\det[g_{\alpha\bar{\beta}}] \neq 0$, astfel încât $\text{rang}[g_{\alpha\bar{\beta}}] = m$. Fie $g^{\bar{\beta}\alpha}$ inversul tensorului metric, adică $g^{\bar{\beta}\alpha} g_{\gamma\bar{\beta}} = \delta_\gamma^\alpha$.

Pe $T'M$ avem reperul indus (3.1.6) și dualul acestuia, (3.1.7). Lagrangianul $L(z, u)$ nu poate fi transformat oricum de ρ în $L^*(z, \eta^k = \rho_\alpha^k u^\alpha)$. De exemplu, fie $z \in M$ un punct fix și $u_1 \neq u_2$ două secțiuni ale fibrei E_z ; se poate să avem $\rho(u_1) = \rho(u_2)$ și $L(z, u_1) \neq L(z, u_2)$. Atunci $L^*(z, \eta)$ ia două valori diferite, așadar nu este bine definit. Presupunerea că L este constant pe fibre nu convine, datorită tensorului $g_{\alpha\bar{\beta}}$. O altă posibilitate ar fi să considerăm restricția lui L la un subfibrat E_{\neq} al lui E pentru care ρ este injectivă. În această situație, obținem cazul **I**) pentru algebroidul Lie (E_{\neq}, ρ) . Problema conexiunii neliniare induse pe $T'M$ este așadar mult mai complicată în acest ultim caz.

Capitolul 4

Structuri Finsler pe algebroizi Lie olomorfi

Structurile Finsler complexe pe fibrate vectoriale olomorfe au fost introduse și studiate în principal de T. Aikou [AT2, AT3, AT4]. În acest capitol, introducem structuri Finsler, conexiuni parțiale și Chern-Finsler în cazul unui algebroid Lie olomorf. Cadrul geometric al studiului îl reprezintă fibratul tangent complexificat al algebroidului și prelungirea complexificată a acestuia.

4.1 Fibratul prelungire complexificat al unui algebroid Lie olomorf

Algebroidul Lie olomorf E are o structură de fibrat vectorial olomorf în raport cu structura complexă J_E . Fie $E_{\mathbb{C}}$ fibratul complexificat al lui E și $T_{\mathbb{C}}E = T'E \oplus T''E$, fibratul tangent complexificat. Definim în continuare prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ a algebroidului E astfel. Extindem liniar peste \mathbb{C} aplicația tangentă $\pi'_* : T'E \rightarrow T'M$ și ancora $\rho : E \rightarrow T'M$ pentru a obține $\pi_{*,\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}E \rightarrow T_{\mathbb{C}}M$ și respectiv $\rho_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow T_{\mathbb{C}}M$. Dacă $\pi_{E,\mathbb{C}} : T_{\mathbb{C}}E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ este extinderea proiecției tangente la spațiile complexificate, atunci putem defini submulțimea $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ a produsului $E_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}}E$ prin

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = \{(e, v) \in E_{\mathbb{C}} \times T_{\mathbb{C}}E \mid \rho_{\mathbb{C}}(e) = \pi_{*,\mathbb{C}}(v)\}$$

și aplicația $\pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ prin $\pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}}(e, v) = \pi_{E,\mathbb{C}}(v)$. Astfel, am obținut un fibrat vectorial complex $(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E, \pi_{\mathcal{T},\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ peste $E_{\mathbb{C}}$. Mai mult, proiecția pe

al doilea factor,

$$\rho_{\mathcal{T},\mathbb{C}} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \rightarrow T_{\mathbb{C}}E, \quad \rho_{\mathcal{T},\mathbb{C}}(e, v) = v,$$

este ancora unui algebroid Lie complex peste $E_{\mathbb{C}}$, numit *prelungirea complexificată* a lui E . Aceasta coincide cu complexificarea prelungirii $\mathcal{T}'E$ (privită ca varietate complexă), adică $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = \mathcal{T}'E \oplus \mathcal{T}''E$, unde $\mathcal{T}''E = \overline{\mathcal{T}'E} = E'' \times T''E$, cu restricțiile necesare, $\rho'(e) = \pi'_*(v)$ și conjugata acesteia.

Reamintim că fibratul vertical al prelungirii olomorfe este definit folosind proiecția pe primul factor, $\tau_1 : \mathcal{T}'E \rightarrow E$, $\tau_1(e, v) = e$, prin $V\mathcal{T}'E = \ker \tau_1 = \{(e, v) \in \mathcal{T}'E \mid \tau_1(e, v) = 0\}$. Elementele verticale $(0, v) \in V\mathcal{T}'E$ au proprietatea $v \in \ker \pi'_*$. Prin conjugare, obținem $V\mathcal{T}''E$ și subfibratul vertical complexificat al prelungirii $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ este $V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = V\mathcal{T}'E \oplus V\mathcal{T}''E$.

Coordonatele locale pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ sunt $(z^k, u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha, \bar{z}^k, \bar{u}^\alpha, \bar{v}^\alpha, \bar{w}^\alpha)$. Reamintim că baza locală a secțiunilor olomorfe în $\Gamma(\mathcal{T}'E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$, definită prin

$$\mathcal{Z}_\alpha(u) = \left(e_\alpha(\pi(u)), \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial z^k} \Big|_u \right), \quad \mathcal{V}_\alpha(u) = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \Big|_u \right),$$

unde $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right\}$ este reperul natural pe $T'E$. Ca urmare, o bază locală a secțiunilor în $\Gamma(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E)$ este $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$, unde $\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}$ sunt obținute prin conjugare, adică

$$\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}(u) = \left(e_{\bar{\alpha}}(\pi(u)), \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{k}}} \Big|_u \right), \quad \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}(u) = \left(0, \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} \Big|_u \right).$$

La o schimbare de hărți locale pe E , regulile pentru coordonatele pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ sunt:

$$\begin{aligned} \tilde{z}^k &= \tilde{z}^k(z), \\ \tilde{u}^\alpha &= M_\beta^\alpha u^\beta, \\ \tilde{v}^\alpha &= M_\beta^\alpha v^\beta, \\ \tilde{w}^\alpha &= M_\beta^\alpha w^\beta + \rho_\beta^k v^\beta \frac{\partial M_\gamma^\alpha}{\partial z^k} u^\gamma \end{aligned}$$

și conjugatele acestora. Folosind acestea, obținem regulile de schimbare ale bazei locale a secțiunilor $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ din $\Gamma(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}_\beta &= W_\beta^\alpha \left(\mathcal{Z}_\alpha - \rho_\alpha^h \frac{\partial M_\epsilon^\gamma}{\partial z^h} W_\gamma^\tau u^\epsilon \mathcal{V}_\tau \right), \\ \tilde{\mathcal{V}}_\beta &= W_\beta^\alpha \mathcal{V}_\alpha, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

împreună cu conjugatele.

Acțiunea aplicației ancoră $\rho_{\mathcal{T}}$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ este descrisă local prin:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_{\alpha}) &= \rho_{\alpha}^k \partial_k =: \partial_{\alpha}, & \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_{\alpha}) &= \dot{\partial}_{\alpha}, \\ \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}) &= \rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} \partial_{\bar{k}} =: \partial_{\bar{\alpha}}, & \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}) &= \dot{\partial}_{\bar{\alpha}},\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

unde $\partial_{\bar{k}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, $\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\alpha}}$.

Propoziția 4.1.1. *Parantezele Lie ale bazei $\{\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ sunt*

$$\begin{aligned}[\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{Z}_{\beta}]_{\mathcal{T}} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{Z}_{\gamma}, & [\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\beta}]_{\mathcal{T}} &= 0, & [\mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\beta}]_{\mathcal{T}} &= 0, \\ [\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{Z}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= 0, & [\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= 0, & [\mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= 0\end{aligned}$$

și conjugatele acestora, de exemplu $[\mathcal{Z}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{Z}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} = \overline{[\mathcal{Z}_{\alpha}, \mathcal{Z}_{\beta}]_{\mathcal{T}}} = \mathcal{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \mathcal{Z}_{\bar{\gamma}}$, etc.

4.1.1 Conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$

Reamintim că dacă pe $T'E$ este dată o conexiune neliniară având coeficienții N_k^{β} , iar $\{\delta_k, \dot{\partial}_{\alpha}\}$ este reperul adaptat pe $T'E$, cu $\delta_k = \partial_k - N_k^{\beta} \dot{\partial}_{\beta}$, notând $\delta_{\alpha} = \rho_{\alpha}^k \delta_k$ și $N_{\alpha}^{\beta} = \rho_{\alpha}^k N_k^{\beta}$, atunci aceștia din urmă sunt coeficienții unei conexiuni neliniare pe prelungirea $\mathcal{T}'E$.

Cu notația

$$\mathcal{X}_{\alpha} = \mathcal{Z}_{\alpha} - N_{\alpha}^{\beta} \mathcal{V}_{\beta},$$

obținem un alt reper local, $\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}\}$ pe $\mathcal{T}'E$, numit *reper adaptat* în raport cu conexiunea neliniară complexă indusă pe $\mathcal{T}'E$. Avem

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{Z}_{\alpha}) = \partial_{\alpha}, \quad \rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{V}_{\alpha}) = \dot{\partial}_{\alpha},$$

deci

$$\rho_{\mathcal{T}}(\mathcal{X}_{\alpha}) = \delta_{\alpha}.$$

La o schimbare de hărți locale pe E , regulile de schimbare ale reperului adaptat $\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}\}$ sunt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_{\alpha} &= W_{\alpha}^{\beta} \mathcal{X}_{\beta}, \\ \tilde{\mathcal{V}}_{\alpha} &= W_{\alpha}^{\beta} \mathcal{V}_{\beta}.\end{aligned}\quad (4.1.3)$$

Evident, pe fibratul prelungire complexificat, o conexiune neliniară complexă determină descompunerea

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E = H\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \oplus V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \oplus \overline{H\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E} \oplus \overline{V\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E}, \quad (4.1.4)$$

cu reperul adaptat $\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ în raport cu conexiunea neliniară complexă.

Propoziția 4.1.2. Parantezele Lie ale reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ sunt

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]_{\mathcal{T}} &= \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma + \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, \\ [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= (\delta_{\bar{\beta}} N_\alpha^\gamma) \mathcal{V}_\gamma - (\delta_\alpha N_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}) \mathcal{V}_{\bar{\gamma}}, \\ [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= (\dot{\partial}_\beta N_\alpha^\gamma) \mathcal{V}_\gamma, \\ [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= (\dot{\partial}_{\bar{\beta}} N_\alpha^\gamma) \mathcal{V}_\gamma, \\ [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta]_{\mathcal{T}} &= 0, \\ [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}]_{\mathcal{T}} &= 0, \end{aligned}$$

unde

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta}^\gamma = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\varepsilon N_\varepsilon^\gamma - \delta_\alpha N_\beta^\gamma + \delta_\beta N_\alpha^\gamma.$$

4.2 Structuri Finsler complexe pe un algebroid Lie

Introducem structura Finsler ca o funcție definită pe fibratul algebroid E , din dorința de a obține proprietăți similare cazului fibratului tangent olomorf $T'M$ ([AT1, MG1]). Notăm cu \tilde{E} subvarietatea deschisă a secțiunilor nenule ale algebroidului E .

Definiția 4.2.1. O structură Finsler F pe E este o funcție cu valori reale $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:

- 1) F este de clasă C^∞ pe \tilde{E} ;
- 2) $F(z, u) \geq 0$ și $F(z, u) = 0$ dacă și numai dacă $u = 0$;
- 3) $F(z, \lambda u) = |\lambda|^2 F(z, u)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vom spune că o structură Finsler F este *pseudoconvexă* dacă matricea hermitiană definită în cazul nostru prin

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = \dot{\partial}_\alpha \dot{\partial}_{\bar{\beta}} F \tag{4.2.5}$$

este pozitiv definită. În continuare, vom presupune că F este pseudoconvexă.

Definiția 4.2.2. Perechea (E, F) se numește algebroid Finsler Lie complex.

Tensorul $h_{\alpha\bar{\beta}}$ definește o metrică hermitiană G pe subfibratul vertical $VT_{\mathbb{C}}E$ prin $G(Z, W) = h_{\alpha\bar{\beta}}Z^{\alpha}W^{\bar{\beta}}$, unde $h_{\alpha\bar{\beta}} = G(\dot{\partial}_{\alpha}, \dot{\partial}_{\bar{\beta}})$.

Propoziția 4.2.1. *Funcția Finsler F pe algebroidul E satisface relațiile:*

- i) $(\dot{\partial}_{\alpha}F)u^{\alpha} = F$, $(\dot{\partial}_{\bar{\alpha}}F)\bar{u}^{\alpha} = F$;
- ii) $h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\alpha} = \dot{\partial}_{\bar{\beta}}F$, $h_{\alpha\bar{\beta}}\bar{u}^{\beta} = \dot{\partial}_{\alpha}F$, $F = h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\alpha}\bar{u}^{\beta}$;
- iii) $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})u^{\gamma} = 0$, $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})u^{\alpha} = 0$, $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})\bar{u}^{\gamma} = 0$;
- iv) $h_{\alpha\bar{\beta}}u^{\alpha} = 0$, $(\dot{\partial}_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}})\bar{u}^{\beta} = h_{\alpha\gamma}$, unde $h_{\alpha\beta} = \dot{\partial}_{\alpha}\dot{\partial}_{\beta}F$.

4.2.1 Conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid

Cea mai cunoscută și utilizată conexiune în geometria Finsler este conexiunea Chern-Finsler. În această secțiune, vom introduce o astfel de conexiune pe algebroidul Finsler Lie E .

În cazul unui fibrat vectorial complex, noțiunea de conexiune liniară complexă normală nu are sens, din cauza faptului că regulile de schimbare ale coeficienților unei conexiuni liniare distinse nu coincid în perechi, cum se întâmplă în cazul fibratului $T'M$ [MG1]. Însă conexiunea clasică Chern-Finsler este o conexiune liniară complexă normală; din acest motiv, vom induce o conexiune liniară Chern-Finsler pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ pornind de la o conexiune verticală pe E .

Ca în cazul fibratelor Finsler complexe [AT2, AT3, AT4, MG1], considerăm funcțiile $N_k^{\beta}(z, u)$ ce definesc pe E o conexiune neliniară complexă,

$$N_k^{\beta} = h^{\bar{\sigma}\beta} \partial_k \dot{\partial}_{\bar{\sigma}} F. \quad (4.2.6)$$

Apoi, folosind (3.2.34) și (4.1.2), obținem

$$N_{\alpha}^{\beta} = h^{\bar{\sigma}\beta} \rho_{\alpha}^k \partial_k \dot{\partial}_{\bar{\sigma}} F = h^{\bar{\sigma}\beta} \partial_{\alpha} \dot{\partial}_{\bar{\sigma}} F, \quad (4.2.7)$$

coeficienții unei conexiuni neliniare pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$.

Propoziția 4.2.2. *Funcțiile $N_{\alpha}^{\beta}(z, u)$ definite de (4.2.7) determină o conexiune neliniară pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, numită conexiunea neliniară Chern-Finsler a prelungirii algebroidului Lie E .*

Considerăm acum o conexiune liniară parțială pe subfibratul vertical al lui E , $\mathcal{D} : T_{\mathbb{C}}E \times VT_{\mathbb{C}}E \rightarrow VT_{\mathbb{C}}E$, care păstrează distribuțiile $VT_{\mathbb{C}}E$ și $\overline{VT_{\mathbb{C}}E}$ și comută cu conjugarea. Coeficienții săi locali sunt:

$$\begin{aligned} D_{\delta_k} \dot{\partial}_\alpha &= L_{\alpha k}^\gamma \dot{\partial}_\gamma, & D_{\dot{\partial}_\beta} \dot{\partial}_\alpha &= C_{\alpha\beta}^\gamma \dot{\partial}_\gamma, \\ D_{\delta_k} \dot{\partial}_{\bar{\alpha}} &= L_{\bar{\alpha}k}^{\bar{\gamma}} \dot{\partial}_{\bar{\gamma}}, & D_{\dot{\partial}_{\bar{\beta}}} \dot{\partial}_{\bar{\alpha}} &= C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \dot{\partial}_{\bar{\gamma}} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

și conjugatele lor. Regulile de schimbare ale coeficienților sunt:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\alpha k}^\tau &= M_\gamma^\tau \frac{\partial z^h}{\partial \bar{z}^k} \left[\frac{\partial W_\alpha^\gamma}{\partial z^h} + W_\alpha^\theta L_{\theta h}^\gamma \right], \\ \tilde{C}_{\alpha\beta}^\tau &= M_\gamma^\tau W_\beta^\sigma W_\alpha^\theta C_{\theta\sigma}^\gamma, \\ \tilde{L}_{\bar{\alpha}k}^{\bar{\tau}} &= \frac{\partial z^h}{\partial \bar{z}^k} M_{\bar{\gamma}}^{\bar{\tau}} W_{\bar{\alpha}}^{\bar{\theta}} L_{\theta h}^{\bar{\gamma}}, \\ \tilde{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\tau}} &= M_{\bar{\gamma}}^{\bar{\tau}} W_{\bar{\beta}}^\sigma W_{\bar{\alpha}}^{\bar{\theta}} C_{\theta\sigma}^{\bar{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Ca în cazul unui fibrat vectorial complex, putem considera

$$L_{\alpha k}^\gamma = h^{\bar{\sigma}\gamma} \delta_k h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C_{\alpha\beta}^\gamma = h^{\bar{\sigma}\gamma} \dot{\partial}_{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\sigma}} \quad (4.2.10)$$

și $L_{\bar{\alpha}k}^{\bar{\gamma}} = C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = 0$, împreună cu conjugatele acestora. Este ușor de verificat că aceste funcții satisfac regulile de schimbare (4.2.9).

Propoziția 4.2.3. *Are loc identitatea:*

$$L_{\alpha k}^\gamma = \dot{\partial}_\alpha N_k^\gamma. \quad (4.2.11)$$

Vom introduce acum o N -conexiune liniară complexă pe prelungirea complexificată a lui E , mai exact $\mathcal{D} : \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \times \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, prin

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta} \mathcal{V}_\alpha &= L_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta} \mathcal{V}_\alpha &= C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{V}_\gamma, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta} \mathcal{V}_{\bar{\alpha}} &= L_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} \mathcal{V}_{\bar{\gamma}}, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta} \mathcal{V}_{\bar{\alpha}} &= C_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} \mathcal{V}_{\bar{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Deoarece \mathcal{D} este o conexiune normală, trebuie să păstreze distribuțiile, adică avem și

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta} \mathcal{X}_\alpha &= L_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta} \mathcal{X}_\alpha &= C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{X}_\beta} \mathcal{X}_{\bar{\alpha}} &= L_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta} \mathcal{X}_{\bar{\alpha}} &= C_{\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\gamma}} \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Propoziția 4.2.4. *Regulile de schimbare ale coeficienților conexiunii \mathcal{D} pe prelungirea complexificată sunt:*

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\alpha\beta}^{\tau} &= M_{\gamma}^{\tau} W_{\beta}^{\sigma} [\rho_{\sigma}^k (\partial_k W_{\alpha}^{\gamma}) + W_{\alpha}^{\theta} L_{\theta\sigma}^{\gamma}], \\ \tilde{C}_{\alpha\beta}^{\tau} &= M_{\gamma}^{\tau} W_{\beta}^{\sigma} W_{\alpha}^{\theta} C_{\theta\sigma}^{\gamma} \\ \tilde{L}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\tau}} &= M_{\bar{\gamma}}^{\bar{\tau}} W_{\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} W_{\bar{\alpha}}^{\bar{\theta}} L_{\bar{\theta}\bar{\sigma}}^{\bar{\gamma}}, \\ \tilde{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\tau}} &= M_{\bar{\gamma}}^{\bar{\tau}} W_{\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} W_{\bar{\alpha}}^{\bar{\theta}} C_{\bar{\theta}\bar{\sigma}}^{\bar{\gamma}}.\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

Lema 4.2.1. *Funcțiile $L_{\alpha\beta}^{\gamma}$ date de*

$$L_{\alpha\beta}^{\gamma} = \rho_{\beta}^k L_{\alpha k}^{\gamma}\tag{4.2.14}$$

sunt coeficienții unei conexiuni liniare complexe normale pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$.

Impunem ca \mathcal{D} să fie de tip $(1, 0)$, adică $L_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = 0$, și considerăm funcțiile $L_{\alpha k}^{\gamma}$ date de (4.2.10). Folosind (4.2.14), obținem următorul rezultat important.

Teorema 4.2.1. *Funcțiile $L_{\alpha\beta}^{\gamma}$ date de*

$$L_{\alpha\beta}^{\gamma} = \rho_{\beta}^k L_{\alpha k}^{\gamma} = h^{\bar{\sigma}\gamma} \delta_{\beta} h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C_{\alpha\beta}^{\gamma} = h^{\bar{\sigma}\gamma} \dot{\partial}_{\beta} h_{\alpha\bar{\sigma}}\tag{4.2.15}$$

sunt coeficienții unei conexiuni liniare de tip $(1, 0)$ pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$, numită conexiunea Chern-Finsler a algebroidului E . Ea este indusă de conexiunea verticală definită de (4.2.10).

În concluzie, conexiunea Chern-Finsler a algebroidului Finsler Lie E este dată de

$$N_{\alpha}^{\beta} = h^{\bar{\sigma}\beta} \partial_{\alpha} \dot{\partial}_{\bar{\sigma}} F, \quad L_{\alpha\beta}^{\gamma} = h^{\bar{\sigma}\gamma} \delta_{\beta} h_{\alpha\bar{\sigma}}, \quad C_{\alpha\beta}^{\gamma} = h^{\bar{\sigma}\gamma} \dot{\partial}_{\beta} h_{\alpha\bar{\sigma}}\tag{4.2.16}$$

și $L_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = 0$. De asemenea, remarcăm că

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}\tag{4.2.17}$$

și, datorită relațiilor (4.2.14) și (4.2.11), avem și

$$L_{\alpha\beta}^{\gamma} = \dot{\partial}_{\alpha} N_{\beta}^{\gamma}.\tag{4.2.18}$$

Mai mult, dacă notăm $h = \det(h_{\alpha\bar{\beta}})$, atunci un calcul similar celui din cazul varietăților Finsler complexe [Z-Z1] ne conduce la identitățile

$$L_{\beta\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}(\ln h), \quad C_{\beta\alpha}^{\beta} = \dot{\partial}_{\alpha}(\ln h).\tag{4.2.19}$$

Propoziția 4.2.5. *Reperul adaptat corespunzător conexiunii Chern-Finsler (4.2.7) satisface identitatea*

$$\rho_{\mathcal{T}}([\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta]) = 0. \quad (4.2.20)$$

Folosind definiția uzuală a torsiunii și relațiile (4.2.18) și (4.2.17), obținem următoarele componente ale torsiunii conexiunii Chern-Finsler pe $\mathcal{T}E$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta) &= (L_{\beta\alpha}^\gamma - L_{\alpha\beta}^\gamma - \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\gamma)\mathcal{X}_\gamma - \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\gamma\mathcal{V}_\gamma, \\ \mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}) &= -(\delta_{\bar{\beta}}N_\alpha^\gamma)\mathcal{V}_\gamma + (\delta_\alpha N_{\bar{\beta}}^\gamma)\mathcal{V}_\gamma, \\ \mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta) &= -C_{\alpha\beta}^\gamma\mathcal{X}_\gamma, \\ \mathcal{T}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}) &= -(\dot{\partial}_{\bar{\beta}}N_\alpha^\gamma)\mathcal{V}_\gamma, \\ \mathcal{T}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta) &= 0, \\ \mathcal{T}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}) &= 0. \end{aligned}$$

Componentele nenule ale curburii conexiunii Chern-Finsler sunt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= [\delta_\alpha L_{\gamma\beta}^\tau - \delta_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + L_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma L_{\sigma\beta}^\tau - C_{\alpha\beta}^\sigma L_{\gamma\sigma}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}})\mathcal{X}_\gamma &= [-\delta_{\bar{\beta}}L_{\gamma\alpha}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\bar{\beta}}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= [\delta_{\bar{\alpha}}L_{\gamma\beta}^\tau - \mathcal{R}_{\bar{\alpha}\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= [\delta_\alpha L_{\gamma\beta}^\tau - \delta_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + L_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma L_{\sigma\beta}^\tau - C_{\alpha\beta}^\sigma L_{\gamma\sigma}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= [-\delta_{\bar{\beta}}L_{\gamma\alpha}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\bar{\beta}}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= [\delta_{\bar{\alpha}}L_{\gamma\beta}^\tau - \mathcal{R}_{\bar{\alpha}\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= [\delta_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot{\partial}_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau - L_{\beta\alpha}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= [-\dot{\partial}_{\bar{\beta}}L_{\gamma\alpha}^\tau - (\dot{\partial}_{\bar{\beta}}N_\alpha^\sigma)C_{\gamma\sigma}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= (\delta_{\bar{\alpha}}C_{\gamma\beta}^\tau)\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= [\dot{\partial}_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot{\partial}_\beta C_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau - C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau]\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{X}_\gamma &= (-\dot{\partial}_{\bar{\beta}}C_{\gamma\alpha}^\tau)\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= (\dot{\partial}_{\bar{\alpha}}C_{\gamma\beta}^\tau)\mathcal{X}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= [\dot{\partial}_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot{\partial}_\beta C_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau - C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau]\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= (-\dot{\partial}_{\bar{\beta}}C_{\gamma\alpha}^\tau)\mathcal{V}_\tau, \\ \mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= (\dot{\partial}_{\bar{\alpha}}C_{\gamma\beta}^\tau)\mathcal{V}_\tau. \end{aligned}$$

Studiem acum dualul reperului adaptat $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ pe $\mathcal{T}E$. Notăm reperul dual prin $\{\mathcal{Z}^\alpha, \delta\mathcal{V}^\alpha\}$, unde $\{\mathcal{Z}^\alpha, \mathcal{V}^\alpha\}$ este dualul lui $\{\mathcal{Z}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha\}$ și $\delta\mathcal{V}^\alpha = \mathcal{V}^\alpha +$

$N_{\beta}^{\alpha} \mathcal{Z}^{\beta}$. Deoarece reperul dual $\{\mathcal{Z}^{\alpha}, \mathcal{V}^{\alpha}\}$ se schimbă după regulile

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Z}}^{\alpha} &= M_{\beta}^{\alpha} \mathcal{Z}^{\beta}, \\ \tilde{\mathcal{V}}^{\alpha} &= M_{\beta}^{\alpha} \mathcal{V}^{\beta} + \rho_{\beta}^k \frac{\partial M_{\gamma}^{\alpha}}{\partial z^k} u^{\gamma} \mathcal{Z}^{\beta},\end{aligned}$$

obținem

$$\widetilde{\delta \mathcal{V}}^{\alpha} = M_{\beta}^{\alpha} \delta \mathcal{V}^{\beta}.$$

Diferențiala unei funcții f pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ se exprimă local prin

$$df = (\delta_{\alpha} f) \mathcal{Z}^{\alpha} + (\dot{\partial}_{\alpha} f) \delta \mathcal{V}^{\alpha} + (\delta_{\bar{\alpha}} f) \mathcal{Z}^{\bar{\alpha}} + (\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} f) \delta \mathcal{V}^{\bar{\alpha}}.$$

În raport cu descompunerea (4.1.4) a prelungirii, diferențiala se poate scrie ca

$$df = \partial^h f + \partial^v f + \bar{\partial}^h f + \bar{\partial}^v f,$$

unde

$$\begin{aligned}\partial^h f &= (\delta_{\alpha} f) \mathcal{Z}^{\alpha} = \left(\rho_{\alpha}^k \frac{\partial f}{\partial z^k} - N_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial u^{\beta}} \right) \mathcal{Z}^{\alpha}, & \partial^v f &= (\dot{\partial}_{\alpha} f) \delta \mathcal{V}^{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}} \delta \mathcal{V}^{\alpha}, \\ \bar{\partial}^h f &= (\delta_{\bar{\alpha}} f) \mathcal{Z}^{\bar{\alpha}} = \left(\rho_{\bar{\alpha}}^{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^{\bar{k}}} - N_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^{\bar{\beta}}} \right) \mathcal{Z}^{\bar{\alpha}}, & \bar{\partial}^v f &= (\dot{\partial}_{\bar{\alpha}} f) \delta \mathcal{V}^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^{\bar{\alpha}}} \delta \mathcal{V}^{\bar{\alpha}}.\end{aligned}$$

De asemenea, avem

$$d\mathcal{Z}^{\alpha} = -\frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^{\alpha} \mathcal{Z}^{\beta} \wedge \mathcal{Z}^{\gamma} - \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^{\alpha} \mathcal{Z}^{\bar{\beta}} \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\gamma}}, \quad d\mathcal{V}^{\alpha} = 0.$$

4.2.2 Algebroizi Kähler Finsler

Pentru a putea defini condiția Kähler în cazul unui algebroid Lie, avem nevoie să definim mai întâi o structură metrică pe prelungirea complexificată $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ prin

$$\mathcal{G} = h_{\alpha\bar{\beta}} \mathcal{Z}^{\alpha} \otimes \mathcal{Z}^{\bar{\beta}} + h_{\alpha\bar{\beta}} \delta \mathcal{V}^{\alpha} \otimes \delta \mathcal{V}^{\bar{\beta}}. \quad (4.2.21)$$

Deoarece componentele structurii metrică (4.2.21) pe $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}E$ depind numai de (z^k, u^{α}) , acțiunea câmpurilor vectoriale $\{\mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_{\alpha}, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}\}$ asupra componentelor lui \mathcal{G} este

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\alpha} h_{\beta\bar{\gamma}} &= \delta_{\alpha} h_{\beta\bar{\gamma}}, & \mathcal{X}_{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\gamma}} &= \delta_{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\gamma}}, \\ \mathcal{V}_{\alpha} h_{\beta\bar{\gamma}} &= \dot{\partial}_{\alpha} h_{\beta\bar{\gamma}}, & \mathcal{V}_{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\gamma}} &= \dot{\partial}_{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\gamma}},\end{aligned}$$

astfel încât identitatea

$$X\mathcal{G}(Y, Z) = \mathcal{G}(\mathcal{D}_X Y, Z) + \mathcal{G}(Y, \mathcal{D}_X Z)$$

se verifică imediat ca în cazul clasic, pentru $Y = \mathcal{V}_\beta$, $Z = \mathcal{V}_{\bar{\gamma}}$ și $X = \mathcal{X}_\alpha$ sau $X = \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}$ [MG1]. Așadar, conexiunea Chern-Finsler a prelungirii este *metrică* în raport cu structura \mathcal{G} .

Considerăm acum 2-forma orizontală

$$\Theta^h = -ih_{\alpha\bar{\beta}}\mathcal{Z}^\alpha \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}}. \quad (4.2.22)$$

Definiția 4.2.3. Un algebroid Lie olomorf se numește algebroid Kähler-Finsler dacă forma Kähler orizontală (4.2.22) este h -închisă, adică $d^h\Theta^h = 0$.

Din condiția din definiția de mai sus rezultă imediat

$$\delta_\gamma h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_\alpha h_{\gamma\bar{\beta}}, \quad \delta_{\bar{\gamma}} h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\gamma}},$$

egalități care, datorită relației (4.2.10), conduc la caracterizarea algebroizilor Kähler prin

$$L_{\alpha\gamma}^\sigma = L_{\gamma\alpha}^\sigma, \quad (4.2.23)$$

condiție similară cazului real.

Capitolul 5

Operatori Laplace pe algebroizi Lie Finsler complecși

Definim în acest capitol operatori de tip Laplace pentru funcții definite pe spațiul tangent al unui algebroid Lie Finsler complex, folosind o formă volum a prelungirii algebroidului. De asemenea, prezentăm construcția unui operator Laplace orizontal pentru forme definite pe prelungirea algebroidului. Expresiile locale ale tuturor acestor operatori sunt obținute relativ la conexiunea Chern-Finsler al algebroidului. În notațiile următoare, vom renunța la indicele \mathbb{C} .

5.1 Derivate covariante pe prelungire

Vom defini derivatele covariante ale unor câmpuri tensoriale definite pe prelungirea \mathcal{TE} în raport cu conexiunea Chern-Finsler a acesteia. Un câmp tensorial orizontal covariant este de forma

$$T = \frac{1}{p!q!} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(z, u) \mathcal{Z}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^{\alpha_p} \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_q},$$

unde pentru schimbările de coordonate (2.2.5), componentele locale $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(z, u)$ se schimbă după regulile:

$$\tilde{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(\tilde{z}, \tilde{u}) = T_{\gamma_1 \dots \gamma_p \bar{\varepsilon}_1 \dots \bar{\varepsilon}_q} M_{\alpha_1}^{\gamma_1} \dots M_{\alpha_p}^{\gamma_p} M_{\bar{\beta}_1}^{\bar{\varepsilon}_1} \dots M_{\bar{\beta}_q}^{\bar{\varepsilon}_q}.$$

În manieră similară, putem defini un câmp orizontal contravariant, ale cărui componente locale, $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(z, u)$, se schimbă astfel:

$$\tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(\tilde{z}, \tilde{u}) = T^{\gamma_1 \dots \gamma_p \bar{\varepsilon}_1 \dots \bar{\varepsilon}_q} W_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots W_{\gamma_p}^{\alpha_p} W_{\bar{\varepsilon}_1}^{\bar{\beta}_1} \dots W_{\bar{\varepsilon}_q}^{\bar{\beta}_q}.$$

Ne vom restrânge în continuare studiul pe fibratul orizontal HTE al prelungirii și vom exprima derivatele covariante ale tensorilor în raport cu conexiunea Chern-Finsler a prelungirii.

Mai întâi, definim în manieră clasică derivatele covariante orizontale ale unui tensor orizontal covariant $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(z, u)$ prin

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} &= \mathcal{X}_\gamma(T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}) - \sum_{i=1}^p T_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \varepsilon \alpha_{i+1} \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} L_{\alpha_i \gamma}^\varepsilon, \\ \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} &= \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}(T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}) - \sum_{j=1}^q T_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{j-1} \bar{\varepsilon} \bar{\beta}_{j+1} \dots \bar{\beta}_q} L_{\bar{\beta}_j \bar{\gamma}}^{\bar{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Apoi, derivatele covariante orizontale ale unui tensor contravariant $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}(z, u)$ sunt definite prin

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} &= \mathcal{X}_\gamma(T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}) + \sum_{i=1}^p T^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \varepsilon \alpha_{i+1} \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} L_{\varepsilon \gamma}^{\alpha_i}, \\ \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} &= \mathcal{X}_{\bar{\gamma}}(T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}) + \sum_{j=1}^q T^{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{j-1} \bar{\varepsilon} \bar{\beta}_{j+1} \dots \bar{\beta}_q} L_{\bar{\varepsilon} \bar{\gamma}}^{\bar{\beta}_j}.\end{aligned}$$

5.2 Operatori Laplace verticali și orizontali pentru funcții definite pe E

Vom defini operatori verticali și orizontali de tip Laplace pentru funcții, urmând ideile din cazul fibratelor Finsler complexe [Z-Z1, IC2]. Pentru aceasta, avem nevoie de noțiunile de divergență a unui câmp vectorial pe TE și de gradient al unei funcții pe TE .

Să considerăm mai întâi forma hermitiană asociată structurii metrice hermitiene \mathcal{G} din (4.2.21),

$$\Phi = ih_{\alpha\bar{\beta}}(\mathcal{Z}^\alpha \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}} + \delta\mathcal{V}^\alpha \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{\beta}}) = \Phi^h + \Phi^v. \quad (5.2.1)$$

Notăm cu

$$\begin{aligned}(\Phi^h)^m &= i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! h \mathcal{Z}^1 \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^m \wedge \mathcal{Z}^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^{\bar{m}}, \\ (\Phi^v)^m &= i^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m! h \delta\mathcal{V}^1 \wedge \dots \wedge \delta\mathcal{V}^m \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge \delta\mathcal{V}^{\bar{m}},\end{aligned}$$

pentru a putea asocia metricii \mathcal{G} o formă volum pe prelungirea $\mathcal{T}E$ dată de

$$d\mathcal{V} = \frac{1}{(2m)!} \Phi^{2m} = i^{2m} h^2 d\mathcal{Z} \wedge d\bar{\mathcal{Z}} \wedge \delta\mathcal{V} \wedge \bar{\delta}\mathcal{V}, \quad (5.2.2)$$

unde am notat $d\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^1 \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^m$, $\delta\mathcal{V} = \delta\mathcal{V}^1 \wedge \dots \wedge \delta\mathcal{V}^m$ și conjugatele acestora.

Fie acum $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha + Z^{\bar{\alpha}} \mathcal{X}_{\bar{\alpha}} + V^{\bar{\alpha}} \mathcal{V}_{\bar{\alpha}} \in \Gamma(\mathcal{T}E)$. Definim divergența câmpului vectorial Z prin ecuația clasică $\mathcal{L}_Z d\mathcal{V} = (\operatorname{div} Z) d\mathcal{V}$, unde \mathcal{L}_Z este derivata Lie. Expresia câmpului Z conform descompunerii (4.1.4) conduce la următoarea descompunere a divergenței lui Z :

$$\operatorname{div} Z = \operatorname{div}^h Z + \operatorname{div}^v Z + \operatorname{div}^{\bar{h}} Z + \operatorname{div}^{\bar{v}} Z,$$

unde $\operatorname{div}^h Z = \operatorname{div} Z^h$, $\operatorname{div}^v Z = \operatorname{div} Z^v$, $\operatorname{div}^{\bar{h}} Z = \operatorname{div} Z^{\bar{h}}$, $\operatorname{div}^{\bar{v}} Z = \operatorname{div} Z^{\bar{v}}$. În particular, pe prelungirea olomorvă $\mathcal{T}'E$, avem

Propoziția 5.2.1. *Componentele divergenței câmpului vectorial $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^\alpha \mathcal{V}_\alpha \in \Gamma(\mathcal{T}'E)$ sunt:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^h Z &= \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha L_\alpha - Z^\alpha \mathcal{C}_\alpha, \\ \operatorname{div}^v Z &= \nabla_{\mathcal{V}_\alpha} V^\alpha + V^\alpha \mathcal{C}_\alpha, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

cu notațiile $L_\alpha = L_{\alpha\beta}^\beta - L_{\beta\alpha}^\beta$, $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\beta = \mathcal{C}_{\beta\alpha}^\beta$ și $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_{\alpha\beta}^\beta$.

Remarcăm că, pentru un algebroid Kähler Finsler, condiția (4.2.23) implică $L_\alpha = 0$, deci $\operatorname{div}^h Z = \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha \mathcal{C}_\alpha$.

Următorul pas îl reprezintă definirea gradientului unei funcții, care poate fi introdus tot într-o manieră clasică, prin identitatea

$$\mathcal{G}(Z, \operatorname{grad} f) = Zf, \quad \forall Z \in \Gamma(\mathcal{T}'E).$$

Gradientul poate fi descompus în reperul adaptat al prelungirii olomorfe $\mathcal{T}'E$ ca $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}^h f + \operatorname{grad}^v f$, unde

$$\operatorname{grad}^h f = h^{\bar{\gamma}\alpha} (\delta_{\bar{\gamma}} f) \mathcal{X}_\alpha, \quad \operatorname{grad}^v f = h^{\bar{\epsilon}\beta} (\dot{\partial}_{\bar{\epsilon}} f) \mathcal{V}_\beta. \quad (5.2.4)$$

Vom defini doi operatori de tip Laplace pentru funcții, unul orizontal și unul vertical. Operatorul Laplace orizontal pentru funcții pe algebroidul prelungire este dat de

$$\Delta^h f = (\operatorname{div}^h \circ \operatorname{grad}^h) f, \quad (5.2.5)$$

iar cel vertical, de

$$\Delta^v f = (\operatorname{div}^v \circ \operatorname{grad}^v) f. \quad (5.2.6)$$

Expresiile celor doi operatori Laplace sunt date în

Propoziția 5.2.2. Pentru o funcție $f \in C^\infty(E)$, au loc:

$$\Delta^h f = \frac{1}{h} \delta_\alpha [h h^{\bar{\gamma}\alpha} (\delta_{\bar{\gamma}} f)] - [h^{\bar{\gamma}\alpha} (\delta_{\bar{\gamma}} f)] C_\alpha \quad (5.2.7)$$

și

$$\Delta^v f = \frac{1}{h} \dot{\delta}_\alpha [h h^{\bar{\gamma}\alpha} (\dot{\delta}_{\bar{\gamma}} f)] + [h^{\bar{\gamma}\alpha} (\dot{\delta}_{\bar{\gamma}} f)] C_\alpha. \quad (5.2.8)$$

Remarcăm aici faptul că cei doi operatori Laplace pot fi exprimați de asemenea în termenii derivatelor covariante în raport cu conexiunea Chern-Finsler după cum urmează:

$$\begin{aligned} \Delta^h f &= h^{\bar{\gamma}\alpha} [\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} f - C_\alpha (\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\gamma}}} f)], \\ \Delta^v f &= h^{\bar{\gamma}\alpha} [\nabla_{\mathcal{V}_\alpha} \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\gamma}}} f + C_\alpha (\nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\gamma}}} f)]. \end{aligned}$$

Lema 5.2.1. Pentru un câmp orizontal olomorf $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha \in \Gamma(HT'E)$, au loc identitățile

$$(\operatorname{div} Z + \mathcal{C}^h) d\mathcal{V} = d[i_Z d\mathcal{V}], \quad (\operatorname{div} \bar{Z} + \bar{\mathcal{C}}^h) d\mathcal{V} = d[i_{\bar{Z}} d\mathcal{V}], \quad (5.2.9)$$

unde $\mathcal{C}^h = Z^\alpha C_\alpha = Z^\alpha C_{\alpha\beta}^\beta$.

În geometria complexă, Laplacienii se consideră pe varietăți compacte, unde s-au obținut rezultate importante. În cazul Finsler complex lucrurile sunt mai complicate, ideile se mută pe fibratul proiectiv al unei varietăți Finsler complexe, care este compact (dacă varietatea bază M e compactă) și metrica Finsler derivă din una hermitiană pe acest fibrat proiectiv. În cazul nostru, lucrurile pot fi discutate pe fibratul proiectiv al prelungirii Finsler, dar ideile sunt mai complicate. Din acest motiv, am limitat studiul la domenii U compacte de pe E . O variantă alternativă ar fi ca pe E să considerăm forme cu suport compact.

Propoziția 5.2.3. Dacă $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha$ este un câmp orizontal cu suport compact pe prelungirea unui algebroid Finsler, atunci:

$$\int_U (\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha - Z^\alpha L_\alpha) d\mathcal{V} = 0, \quad \int_U (\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}} \bar{Z}^{\bar{\alpha}} - \bar{Z}^{\bar{\alpha}} \bar{L}_\alpha) d\mathcal{V} = 0. \quad (5.2.10)$$

În cazul algebroizilor Kähler Finsler, identitățile (5.2.10) devin

$$\int_U \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z^\alpha d\mathcal{V} = 0, \quad \int_U \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}} \bar{Z}^{\bar{\alpha}} d\mathcal{V} = 0. \quad (5.2.11)$$

Observația 5.2.1. În cazul în care componentele câmpului Z sunt de forma $Z^\alpha = h^{\bar{\beta}\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} f$, unde f este o funcție diferențiabilă pe compactul $U \subset E$, din (5.2.11) rezultă

$$\int_U h^{\bar{\beta}\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} f d\mathcal{V} = 0. \quad (5.2.12)$$

5.3 Operatorul Laplace orizontal pentru forme definite pe $\mathcal{T}E$

Considerăm două forme cu suport compact pe $\mathcal{T}E$, Ψ și Φ , exprimate local prin

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{p!q!} \psi_{A_p \bar{B}_q} \mathcal{Z}^{A_p} \wedge \mathcal{Z}^{\bar{B}_q}, \\ \Phi &= \frac{1}{p!q!} \phi_{A_p \bar{B}_q} \mathcal{Z}^{A_p} \wedge \mathcal{Z}^{\bar{B}_q}, \end{aligned}$$

cu notațiile multi-indicilor $A_p = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$, $\bar{B}_q = (\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q)$ și $\mathcal{Z}^{A_p} = \mathcal{Z}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^{\alpha_p}$, $\mathcal{Z}^{\bar{B}_q} = \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{Z}^{\bar{\beta}_q}$. Considerăm coeficienții formelor ca fiind funcții definite pe algebroidul bază E , adică $\psi_{A_p \bar{B}_q} = \psi_{A_p \bar{B}_q}(z, u)$ și $\phi_{A_p \bar{B}_q} = \phi_{A_p \bar{B}_q}(z, u)$, deoarece în continuare vom avea nevoie de integrarea pe domenii compacte din E .

Definim următorul produs interior:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{1}{p!q!} \psi_{A_p \bar{B}_q} \overline{\phi_{A_p \bar{B}_q}} = \sum \psi_{A_p \bar{B}_q} \overline{\phi_{A_p \bar{B}_q}}, \quad (5.3.13)$$

suma fiind după $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, $\bar{\beta}_1 < \dots < \bar{\beta}_q$, iar $\phi_{A_p \bar{B}_q} = \phi^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_p \beta_1 \dots \beta_q} = \phi_{\mu_1 \dots \mu_p \bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_q} h^{\bar{\alpha}_1 \mu_1} \dots h^{\bar{\alpha}_p \mu_p} h^{\bar{\nu}_1 \beta_1} \dots h^{\bar{\nu}_q \beta_q}$. Acest produs este independent de coordonatele locale, deci $\langle \Psi, \Phi \rangle$ este un produs interior global, definit pe E . În particular, "norma" unei forme Ψ se definește prin

$$|\Psi|^2 = \langle \Psi, \Psi \rangle = \frac{1}{p!q!} \psi_{A_p \bar{B}_q} \overline{\psi_{A_p \bar{B}_q}}$$

Folosind forma volum (5.2.2), pe un compact $U \subset E$, putem acum defini un produs interior pe spațiul formelor orizontale pe prelungirea $\mathcal{T}E$ prin

$$(\Psi, \Phi) = \int_U \langle \Psi, \Phi \rangle d\mathcal{V}, \quad \|\Psi\|^2 = \int_U \langle \Psi, \Psi \rangle d\mathcal{V}. \quad (5.3.14)$$

Într-o manieră similară cazului fibratelor vectoriale complexe, [MG1, P-M], vom defini diferențialele orizontale ale formelor orizontale de tip (p, q) prin

$$\begin{aligned} (\partial^h \Psi)_{A_{p+1} \bar{B}_q} &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \delta_{\alpha_i} (\psi_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1} \bar{B}_q}), \\ (\bar{\partial}^h \Psi)_{A_p \bar{B}_{q+1}} &= (-1)^p \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \delta_{\bar{\beta}_i} (\psi_{A_p \bar{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_i \dots \bar{\beta}_{q+1}}). \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

În cazul algebroizilor Kähler Finsler, se poate folosi identitatea (4.2.23) pentru a înlocui aceste derivate orizontale prin derivatele covariante orizontale, adică

$$\begin{aligned} (\partial^h \Psi)_{A_{p+1} \bar{B}_q} &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \nabla_{\mathcal{X}_{\alpha_i}} \psi_{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1} \bar{B}_q}, \\ (\bar{\partial}^h \Psi)_{A_p \bar{B}_{q+1}} &= (-1)^p \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}_i}} \psi_{A_p \bar{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_i \dots \bar{\beta}_{q+1}}, \end{aligned}$$

Urmând etapele uzuale în definirea operatorilor Laplace pentru forme, este necesară introducerea operatorilor adjuncți pentru ∂^h și $\bar{\partial}^h$ în raport cu produsul interior (5.3.14). Fie ∂^{*h} și $\bar{\partial}^{*h}$ cei doi operatori adjuncți. Avem

$$\begin{aligned} \partial^{*h} : \mathcal{A}_{p,q}(HTE) &\rightarrow \mathcal{A}_{p,q-1}(HTE), & (\partial^h \Psi, \Phi) &= (\Psi, \partial^{*h} \Phi), \\ \bar{\partial}^{*h} : \mathcal{A}_{p,q}(HTE) &\rightarrow \mathcal{A}_{p-1,q}(HTE), & (\bar{\partial}^h \Psi, \Phi) &= (\Psi, \bar{\partial}^{*h} \Phi), \end{aligned}$$

unde $\mathcal{A}_{p,q}(HTE)$ reprezintă spațiul formelor orizontale de tip (p, q) cu suport compact pe algebroidul prelungire.

Ne interesează acum expresia operatorului adjuncț $\bar{\partial}^{*h}$. Fie pentru aceasta $\Psi \in \mathcal{A}_{p,q-1}(HTE)$ și $\Phi \in \mathcal{A}_{p,q}(HTE)$. Un calcul similar celui din [Z-Z1] conduce la

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}^{*h} \Phi)_{\bar{A}_p \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_q} &= -(-1)^p h^{-2} \delta_{\beta_1} (\phi_{\bar{A}_p \beta_1 \dots \beta_q} h^2) \\ &= -(-1)^p \sum_{\beta_1} [\delta_{\beta_1} + 2\delta_{\beta_1} (\ln h)] \phi_{\bar{A}_p \beta_1 \dots \beta_q}, \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

de unde, prin coborârea indicilor, rezultă

$$(\bar{\partial}^{*h} \Phi)_{A_p \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_q} = (-1)^{p+1} h^{\bar{\epsilon}\gamma} \delta_\gamma (\phi_{A_p \bar{\epsilon} \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_q}). \quad (5.3.17)$$

Putem acum introduce un operator Laplace orizontal, $\square^h : \mathcal{A}_{p,q}(HTE) \rightarrow \mathcal{A}_{p,q}(HTE)$, prin

$$\square^h = \bar{\partial}^h \circ \bar{\partial}^{*h} + \bar{\partial}^{*h} \circ \bar{\partial}^h. \quad (5.3.18)$$

Expresia operatorului \square^h este dată în

Teorema 5.3.1. *Operatorul Laplace orizontal pentru o formă diferențială orizontală $\Phi \in \mathcal{A}_{p,q}(HTE)$ pe prelungirea unui algebroid Finsler Lie este dat de*

$$(\square^h \Phi)_{A_p \bar{B}_q} = -h^{\bar{\varepsilon}\gamma} \left(\delta_\gamma \circ \delta_{\bar{\varepsilon}}(\phi_{A_p \bar{B}_q}) - \sum_i (-1)^{i-1} [\delta_\gamma, \delta_{\bar{\beta}_i}] \phi_{A_p \bar{\varepsilon} \bar{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_i \dots \bar{\beta}_q} \right). \quad (5.3.19)$$

Considerând acum cazul algebroizilor Kähler Finsler, în care din (5.2.11) rezultă

$$\int_{U \subset E} \nabla_{\mathcal{X}_\beta} \left(\phi_{A_p \bar{B}_q} \overline{\psi^{\bar{A}_p \beta B_q}} \right) d\mathcal{V} = 0,$$

iar după un calcul simplu, similar cazului varietăților Kähler Finsler, se obține

Teorema 5.3.2. *Pe un algebroid Kähler Finsler, operatorul Laplace orizontal pentru forme diferențiale orizontale pe prelungirea TE este*

$$(\square^h \Phi)_{A_p \bar{B}_q} = -h^{\bar{\varepsilon}\gamma} \left(\nabla_{\mathcal{X}_\gamma} \circ \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\varepsilon}}}(\phi_{A_p \bar{B}_q}) - \sum_i [\nabla_{\mathcal{X}_\gamma}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}_i}}] \phi_{A_p \bar{\varepsilon} \bar{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_i \dots \bar{\beta}_q} \right). \quad (5.3.20)$$

Capitolul 6

Teoreme de anulare pe algebroizi Lie olomorfi

În capitolul de față, prezentăm un studiu de tip Bochner pentru câmpuri vectoriale orizontale pe un algebroid Finsler și obținem o teoremă de anulare pentru astfel de algebroizi. Descriem mai întâi în coordonate locale curburile a două conexiuni utile studiului nostru, conexiunea Chern-Finsler introdusă anterior și conexiunea Rund. Obținem apoi identități de tip Ricci pentru câmpuri contravariante sau covariante pe prelungirea olomorfă a unui algebroid Finsler. În final, obținem o teoremă de anulare de tip Bochner pentru algebroizi Finsler, împreună cu două consecințe interesante.

6.1 Conexiunile Chern-Finsler și Rund

Am discutat pe larg despre conexiunea Chern-Finsler a unui algebroid Lie în capitolele anterioare. Impunând anularea coeficienților conexiunii Chern-Finsler pe o varietate complexă [MG1], se obține conexiunea Rund a varietății. Aceasta idee, aplicată conexiunii Chern-Finsler a unui algebroid, mai exact condiția $C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$, ne conduce la conexiunea Rund a algebroidului. Vom avea nevoie în cele ce urmează de expresiile coeficienților curburilor celor două conexiuni menționate, de aceea considerăm utile notațiile următoare. Pentru conexiunea Chern-Finsler de pe prelungire, renotăm componentele locale ale curburii prin:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= R_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}})\mathcal{X}_\gamma &= R_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{X}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= R_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= R_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= R_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{V}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{X}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= R_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= P_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{X}_\gamma &= P_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{X}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= P_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= P_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= P_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{V}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{X}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= P_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= S_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{X}_\gamma &= S_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{X}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{X}_\gamma &= S_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{X}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= S_{\gamma, \alpha\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau, \\
\mathcal{R}(\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_{\bar{\beta}})\mathcal{V}_\gamma &= S_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau \mathcal{V}_\tau, & \mathcal{R}(\mathcal{V}_{\bar{\alpha}}, \mathcal{V}_\beta)\mathcal{V}_\gamma &= S_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau \mathcal{V}_\tau.
\end{aligned}$$

Componentele orizontale, notate cu $R_{\cdot, \cdot}$, mixte – $P_{\cdot, \cdot}$ și verticale – $S_{\cdot, \cdot}$ sunt date de:

$$\begin{aligned}
R_{\gamma, \alpha\beta}^\tau &= \delta_\alpha L_{\gamma\beta}^\tau - \delta_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + L_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma L_{\sigma\beta}^\tau - C_{\alpha\beta}^\sigma L_{\gamma\sigma}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau, \\
R_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau &= -\delta_{\bar{\beta}} L_{\gamma\alpha}^\tau - \mathcal{R}_{\alpha\bar{\beta}}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau, \\
R_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau &= \delta_{\bar{\alpha}} L_{\gamma\beta}^\tau - \mathcal{R}_{\bar{\alpha}\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau, \\
P_{\gamma, \alpha\beta}^\tau &= \delta_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot{\partial}_\beta L_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma L_{\sigma\alpha}^\tau - L_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau - L_{\beta\alpha}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\tau, \\
P_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau &= -\dot{\partial}_{\bar{\beta}} L_{\gamma\alpha}^\tau - (\dot{\partial}_{\bar{\beta}} N_\alpha^\sigma) C_{\gamma\sigma}^\tau, \\
P_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau &= \delta_{\bar{\alpha}} C_{\gamma\beta}^\tau, \\
S_{\gamma, \alpha\beta}^\tau &= \dot{\partial}_\alpha C_{\gamma\beta}^\tau - \dot{\partial}_\beta C_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\beta}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau - C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau, \\
S_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau &= -\dot{\partial}_{\bar{\beta}} C_{\gamma\alpha}^\tau, \\
S_{\gamma, \bar{\alpha}\beta}^\tau &= \dot{\partial}_{\bar{\alpha}} C_{\gamma\beta}^\tau.
\end{aligned}$$

Vom utiliza și componenta orizontală a conexiunii Rund, care este dată de:

$$K_{\gamma, \alpha\bar{\beta}}^\tau = -\delta_{\bar{\beta}} L_{\gamma\alpha}^\tau. \quad (6.1.1)$$

Am obținut o serie de identități interesante pentru câmpuri simplu contravariante sau covariante.

Propoziția 6.1.1. *Fie (E, F) un algebroid Finsler, Z^γ componentele unui tensor orizontal contravariant Z definit pe prelungirea olomorfa $\mathcal{T}'E$ și φ_γ , componentele unui tensor orizontal covariant φ pe $\mathcal{T}'E$. Au loc identitățile:*

- 1) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]Z^\gamma = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]Z^\gamma + Z^\varepsilon K_{\varepsilon; \alpha \bar{\beta}}^\gamma;$
- 2) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}]Z^{\bar{\gamma}} = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}]Z^{\bar{\gamma}} - Z^{\bar{\varepsilon}} K_{\bar{\varepsilon}; \alpha \bar{\beta}}^{\bar{\gamma}};$
- 3) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}] \varphi_\gamma = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}] \varphi_\gamma - \varphi_\varepsilon K_{\gamma; \alpha \bar{\beta}}^\varepsilon;$
- 4) $[\nabla_{\mathcal{X}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}}] \varphi_{\bar{\gamma}} = [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{\bar{\beta}}] \varphi_{\bar{\gamma}} + \varphi_{\bar{\varepsilon}} K_{\bar{\gamma}; \alpha \bar{\beta}}^{\bar{\varepsilon}}.$

Propoziția 6.1.2. Fie (E, F) un algebroid Finsler, V^γ componentele unui tensor vertical contravariant V definit pe prelungirea olomorvă $\mathcal{T}'E$ și ψ_γ , componentele unui tensor vertical covariant ψ pe $\mathcal{T}'E$. Au loc identitățile:

- 1) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]V^\gamma = V^\varepsilon S_{\varepsilon; \alpha \bar{\beta}}^\gamma;$
- 2) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}]V^{\bar{\gamma}} = -V^{\bar{\varepsilon}} S_{\bar{\varepsilon}; \alpha \bar{\beta}}^{\bar{\gamma}};$
- 3) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}] \psi_\gamma = -\psi_\varepsilon S_{\gamma; \alpha \bar{\beta}}^\varepsilon;$
- 4) $[\nabla_{\mathcal{V}_\alpha}, \nabla_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}] \psi_{\bar{\gamma}} = \psi_{\bar{\varepsilon}} S_{\bar{\gamma}; \alpha \bar{\beta}}^{\bar{\varepsilon}}.$

6.2 Teoreme de anulare

Fie multiindicii $A_p = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$ și $B_q = (\beta_1 \dots \beta_q)$, iar $Z_{B_q}^{A_p}(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal Z de tip (p, q) (p -contravariant și q -covariant) cu suport compact pe E . Notăm cu $\|Z\|^2$ produsul scalar al acestui tensor cu el însuși, în raport cu produsul scalar indus de \mathcal{G} , adică

$$\|Z\|^2 = h_{A_p \bar{B}_p} h^{\bar{D}_q C_q} Z_{C_q}^{A_p} Z_{\bar{D}_q}^{\bar{B}_p}, \quad (6.2.2)$$

unde $h_{A_p \bar{B}_p} = h_{\alpha_1 \bar{\beta}_1} \dots h_{\alpha_p \bar{\beta}_p}$ și $h^{\bar{D}_q C_q} = h^{\bar{\delta}_1 \gamma_1} \dots h^{\bar{\delta}_q \gamma_q}$.

În cazul în care $Z_{B_q}^{A_p}(z, u)$ sunt funcții olomorfe în variabilele z și u , avem $\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z_{B_q}^{A_p} = 0$. Mai mult, pentru un compact $U \subset E$, din (5.2.12) rezultă că

$$\int_U h^{\bar{\beta}\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} \|Z\|^2 d\mathcal{V} = 0. \quad (6.2.3)$$

Propoziția 6.2.1. Dacă (E, F) este un algebroid Finsler, atunci

$$\Delta^h \|Z\|^2 = \|\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z_{B_q}^{A_p}\|^2 - h^{\bar{\beta}\alpha} \mathcal{C}_\alpha Z_{B_p}^{\bar{D}_q} \nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z_{\bar{D}_q}^{\bar{B}_p} - \mathcal{H}^h(Z), \quad (6.2.4)$$

unde

$$\|\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z_{B_q}^{A_p}\|^2 = h^{\bar{\beta}\alpha} h_{A_p \bar{B}_p} h^{\bar{D}_q C_q} \left(\nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z_{C_q}^{A_p} \right) \left(\nabla_{\mathcal{X}_{\bar{\beta}}} Z_{\bar{D}_q}^{\bar{B}_p} \right)$$

și

$$\mathcal{H}^h(Z) = \sum_{k=1}^p K_{\bar{\varepsilon}_k}^{\bar{\beta}_k} Z_{\bar{B}_p}^{\bar{D}_q} Z_{\bar{D}_q}^{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{k-1} \bar{\varepsilon}_k \bar{\beta}_{k+1} \dots \bar{\beta}_p} - \sum_{k=1}^q K_{\bar{\delta}_k}^{\bar{\varepsilon}_k} Z_{\bar{B}_p}^{\bar{D}_q} Z_{\bar{\delta}_1 \dots \bar{\delta}_{k-1} \bar{\varepsilon}_k \bar{\delta}_{k+1} \dots \bar{\delta}_q}^{\bar{B}_p},$$

cu notațiile $K_{\bar{\varepsilon}_k}^{\bar{\beta}_k} = h^{\bar{\beta}\alpha} K_{\bar{\varepsilon}_k, \bar{\beta}\alpha}^{\bar{\beta}_k}$, $K_{\bar{\delta}_k}^{\bar{\varepsilon}_k} = h^{\bar{\beta}\alpha} K_{\bar{\delta}_k, \bar{\beta}\alpha}^{\bar{\varepsilon}_k}$ și $Z_{\bar{B}_p}^{\bar{D}_q} = h_{A_p \bar{B}_p} h^{\bar{D}_q C_q} Z_{C_q}^{A_p}$.

Teorema 6.2.1. Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler și $Z_{B_q}^{A_p}(z, u)$ – componentele unui câmp tensorial orizontal Z p -contravariant și q -covariant, cu suport compact pe E . Dacă $Z_{B_q}^{A_p}$ sunt funcții olomorfe în variabilele z și u și satisfac identitatea $\text{Re } \mathcal{H}^h(Z) \geq 0$, atunci

$$\mathcal{H}^z(Z) = 0, \quad \nabla_{\mathcal{X}_\alpha} Z_{B_q}^{A_p} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

pentru orice $(z, u) \in E$.

Vom aplica în continuare Teorema de anulare 6.2.1 în două cazuri particulare.

Propoziția 6.2.2. Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler și $Z_\gamma(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal covariant Z , cu suport compact pe E . Notăm cu $K^{\varepsilon\bar{\sigma}} = h^{\bar{\beta}\alpha} h^{\bar{\gamma}\varepsilon} K_{\bar{\gamma}, \bar{\beta}\alpha}^{\bar{\sigma}}$.

1) Dacă Z_γ sunt funcții olomorfe în z și u , iar $\text{Re } K^{\varepsilon\bar{\sigma}} Z_\varepsilon Z_{\bar{\sigma}} \leq 0$, atunci $\nabla_{\mathcal{X}_\varepsilon} Z_\gamma = 0$.

2) Dacă Z_γ sunt funcții olomorfe în z și u , iar $\text{Re } K^{\varepsilon\bar{\sigma}} Z_\varepsilon Z_{\bar{\sigma}} < 0$, atunci $Z_\gamma(z, u) = 0$.

Propoziția 6.2.3. Fie (E, F) un algebroid Kähler Finsler și $Z^\gamma(z, u)$ – componentele unui tensor orizontal contravariant Z , cu suport compact pe E . Notăm cu $K_{\varepsilon\bar{\sigma}} = h^{\bar{\beta}\alpha} h_{\varepsilon\bar{\gamma}} K_{\bar{\sigma}, \bar{\beta}\alpha}^{\bar{\gamma}}$.

1) Dacă Z^γ sunt funcții olomorfe în z și u , iar $\text{Re } K_{\varepsilon\bar{\sigma}} Z^\varepsilon Z^{\bar{\sigma}} \leq 0$, atunci $\nabla_{\mathcal{X}_\varepsilon} Z^\gamma = 0$.

2) Dacă Z^γ sunt funcții olomorfe în z și u , iar $\text{Re } K_{\varepsilon\bar{\sigma}} Z^\varepsilon Z^{\bar{\sigma}} < 0$, atunci $Z^\gamma(z, u) = 0$.

Capitolul 7

Produsul "warped" al algebroizilor Lie olomorfi

În acest capitol, am continuat studiul algebroizilor Lie olomorfi și al prelungirilor acestora cu investigarea noțiunii de produs "warped" al unor astfel de algebroizi. Studiul urmează direcția inițiată în [K-P-V1] în cazul varietăților Finsler reale.

Vom avea nevoie de gradientul și de hessiana unei funcții pe un algebroid, precum și de unele proprietăți ale hessianei. Acestea se dovedesc a fi diferite în cazul analizat, comparativ cu proprietățile hessianei definite pentru o varietate Finsler, studiate în [K-P-V1].

După ce definim produsul "warped" pentru doi algebroizi Finsler olomorfi, demonstrăm că acesta este un fibrat Finsler, cu funcția Finsler definită cu ajutorul celor două funcții Finsler ale algebroizilor inițiali. De asemenea, studiem relația dintre conexiunile Chern-Finsler ale algebroizilor inițiali și cea a produsului. Din motive obiective, suntem nevoiți să restricționăm studiul doar pentru fibratele verticale. De asemenea, investigăm curbura produsului definit și obținem unele proprietăți similare celor obținute în [K-P-V1] pentru câmpuri orizontale pe produse de varietăți Finsler.

7.1 Proprietăți ale structurilor Finsler pe prelungirea unui algebroid

Pe un algebroid Finsler, conexiunea Chern-Finsler este metrică în raport cu metrica (4.2.21) de pe prelungire. De asemenea, conexiunea Chern-Finsler verifică formula Koszul pe subfibratul vertical al prelungirii.

Lema 7.1.1. *Fie (E, F) un algebroid Finsler Lie olomorf și fie \mathcal{D} conexiunea Chern-Finsler a acestuia. Pentru $U, V, W \in VTE$, are loc identitatea:*

$$2\mathcal{G}(\mathcal{D}_U V, W) = U\mathcal{G}(V, W) + V\mathcal{G}(W, U) - W\mathcal{G}(U, V) \\ - \mathcal{G}(U, [V, W]) + \mathcal{G}(V, [W, U]) + \mathcal{G}(W, [U, V]). \quad (7.1.1)$$

În Capitolul 6, am introdus gradientul unei funcții pe prelungirea olomorfă $\mathcal{T}E$. Acum, ne interesează gradientul definit pe întreaga prelungire $\mathcal{T}E$, adică operatorul ∇ dat de

$$\mathcal{G}(Z, \nabla f) = Zf, \quad \forall Z \in \mathcal{T}E.$$

În coordonate, avem

$$\nabla f = h^{\bar{\beta}\alpha}(\delta_{\bar{\beta}}f)\mathcal{X}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\delta_\alpha f)\mathcal{X}_{\bar{\beta}} + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_{\bar{\beta}}f)\mathcal{V}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_\alpha f)\mathcal{V}_{\bar{\beta}}. \quad (7.1.2)$$

În continuare, vom considera partea verticală a gradientului,

$$\nabla^{v\bar{v}} f = h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_{\bar{\beta}}f)\mathcal{V}_\alpha + h^{\bar{\beta}\alpha}(\dot{\partial}_\alpha f)\mathcal{V}_{\bar{\beta}}. \quad (7.1.3)$$

Definiția 7.1.1. Hessiana unei funcții f în raport cu conexiunea Chern-Finsler \mathcal{D} pe prelungirea $\mathcal{T}E$ este derivata covariantă de ordinul al doilea, $\mathcal{H}f = \mathcal{D}(\mathcal{D}f)$.

Propoziția 7.1.1. *Hessiana $\mathcal{H}f$ satisface identitățile:*

$$\mathcal{H}f(V, W) = VWf - (\mathcal{D}_V W)f + (\mathcal{D}_{V^v} W^v + \mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f \\ = \mathcal{G}(\mathcal{D}_V(\nabla^{v\bar{v}} f), W) + (\mathcal{D}_{V^v} W^v + \mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f, \quad (7.1.4)$$

unde $V = V^\alpha \mathcal{V}_\alpha + V^{\bar{\alpha}} \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}$, $W = W^\beta \mathcal{V}_\beta + W^{\bar{\beta}} \mathcal{V}_{\bar{\beta}}$, $(\mathcal{D}_{V^v} W^v)f = (\mathcal{D}_{V^\alpha \mathcal{V}_\alpha} W^\beta \mathcal{V}_\beta)f = V^\alpha (\dot{\partial}_\alpha W^\beta) (\dot{\partial}_\beta f)$, iar $(\mathcal{D}_{V^{\bar{v}}} W^{\bar{v}})f$ este conjugată acesteia din urmă.

7.2 Produsul "warped" al algebroizilor

Considerăm doi algebroizi Finsler olomorfi, (E_1, F_1) și (E_2, F_2) , unde E_1 este un fibrat olomorf peste varietatea complexă M_1 , iar E_2 este un fibrat olomorf peste varietatea complexă M_2 . De asemenea, considerăm prelungirile acestor algebroizi, $\mathcal{T}E_1$ și respectiv $\mathcal{T}E_2$, conexiunile Chern-Finsler corespunzătoare, \mathcal{D}^1 și respectiv \mathcal{D}^2 , și proiecțiile celor doi algebroizi, $\pi_1 : E_1 \rightarrow M_1$ și respectiv $\pi_2 : E_2 \rightarrow M_2$. Fie $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție olomorfă.

După modelul din [K-P-V1], definim pe fibratul produs $E_1 \times E_2$ funcția $F : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$F(u_1, u_2) = F_1(u_1) + f^2(\pi_1(u_1))F_2(u_2). \quad (7.2.5)$$

Aceasta este o funcție Finsler pe fibratul produs $E_1 \times E_2$.

Astfel, produsul "warped" al algebroizilor E_1 și E_2 este fibratul produs $E_1 \times_f E_2$, cu funcția "warp" f și metrica Finsler $F = F(u_1, u_2)$. Prin urmare, $(E_1 \times_f E_2, F)$ este un fibrat vectorial complex Finsler.

7.2.1 Fibratul prelungire al fibratului produs "warped"

Considerăm cei doi algebroizi Finsler olomorfi, (E_1, F_1) și (E_2, F_2) , precum și produsul lor "warped" definit mai sus, $E_1 \times_f E_2$. De asemenea, fie $\mathcal{T}E_1$ și $\mathcal{T}E_2$ prelungeirile algebroizilor E_1 și respectiv E_2 , definite în Capitolul 4.

Subfibratele verticale ale celor două fibrate prelungire sunt definite cu ajutorul proiecțiilor $\tau_i : \mathcal{T}E_i \rightarrow E_i$, $\tau_i(e_i, v_i) = e_i \in E_i$, prin:

$$V\mathcal{T}E_i = \ker \tau_i = \{(e_i, v_i) \in \mathcal{T}E_i \mid \tau_i(e_i, v_i) = 0\},$$

pentru $i = 1, 2$.

Deoarece fibratul prelungire are proprietăți similare celor ale fibratului tangent al unei varietăți, după cum am văzut în capitolele anterioare, vom lucra în continuare în acest context geometric în locul fibratelor tangente ale fibratelor E_1 și E_2 . Găsim cu ușurință că $\mathcal{T}(E_1 \times E_2) = \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$.

Dacă $p_1 : \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2 \rightarrow \mathcal{T}E_1$ este proiecția pe primul factor, iar $p_2 : \mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2 \rightarrow \mathcal{T}E_2$ este proiecția pe al doilea factor al produsului prelungirilor, atunci putem defini lifturile câmpurilor vectoriale de pe $\mathcal{T}E_1$ sau $\mathcal{T}E_2$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ în felul următor. Liftul câmpului $U_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1)$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este $\hat{U}_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2)$, care satisface condițiile $p_1(\hat{U}_1) = U_1$, $p_2(\hat{U}_1) = 0$. Similar, liftul câmpului $U_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_2)$ la $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este $\hat{U}_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2)$, care satisface condițiile $p_1(\hat{U}_2) = 0$, $p_2(\hat{U}_2) = U_2$.

Avem în continuare $\ker(\tau_1 \times \tau_2) = \ker \tau_1 \oplus \ker \tau_2$, așadar $V\mathcal{T}E_1 \times V\mathcal{T}E_2$ este fibratul vertical al produsului $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$. În raport cu conexiunile neliniare Chern-Finsler ale prelungirilor $\mathcal{T}E_1$ și $\mathcal{T}E_2$, obținem descompunerea $\mathcal{T}(E_1 \times E_2) = \mathcal{T}E_1 \oplus \mathcal{T}E_2 = H\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_1 \oplus H\mathcal{T}E_2 \oplus V\mathcal{T}E_2$.

Notăm cu $N_\alpha^\beta = N_\alpha^\beta(z_1, u_1)$ și respectiv $N_\alpha^\beta = N_\alpha^\beta(z_2, u_2)$ coeficienții conexiunilor neliniare Chern-Finsler pe $\mathcal{T}E_1$ și respectiv $\mathcal{T}E_2$. De asemenea, fie

$\{\mathcal{X}_\alpha^1, \mathcal{V}_\alpha^1, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}^1, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}^1\}$ și respectiv $\{\mathcal{X}_\alpha^2, \mathcal{V}_\alpha^2, \mathcal{X}_{\bar{\alpha}}^2, \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}^2\}$ reperele locale adaptate în raport cu conexiunile menționate pe $\mathcal{T}E_1$ și respectiv $\mathcal{T}E_2$. Este evident că parantezele Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}_x}$ pe $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ satisfac identitățile:

$$\begin{aligned} [U_1, V_2]_{\mathcal{T}_x} &= 0, \\ [U_1, V_1]_{\mathcal{T}_x} &= [U_1, V_1]_{\mathcal{T}E_1}, \\ [U_2, V_2]_{\mathcal{T}_x} &= [U_2, V_2]_{\mathcal{T}E_2}, \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

pentru orice $U_1, V_1 \in \Gamma(\mathcal{T}E_1)$ și $U_2, V_2 \in \Gamma(\mathcal{T}E_2)$.

7.2.2 Conexiunea Chern-Finsler a produsului "warped"

Asemenea cazului varietăților Finsler reale [K-P-V1], formula Koszul joacă un rol esențial în studiul relației dintre conexiunile de pe fiecare fibrat prelungire și conexiunea de pe fibratul produs. Deoarece, în cazul nostru, formula (7.1.1) are loc numai pentru câmpuri verticale pe un fibrat prelungire, vom lucra în continuare *numai pe fibratul vertical* al descompunerii anterioare, pe care îl vom nota prin $V\mathcal{T} = V\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_2$. Dacă \mathcal{G}_1 și respectiv \mathcal{G}_2 sunt două metrice Hermitiene date ca în relația (4.2.21) pe $\mathcal{T}E_1$ și respectiv $\mathcal{T}E_2$, atunci, folosind restricțiile acestora la fibratele verticale, \mathcal{G}_1^v și respectiv \mathcal{G}_2^v , se poate defini o metrică Hermitiană \mathcal{G} pe $V\mathcal{T}$ prin

$$\mathcal{G}^v(\cdot, \cdot) = \mathcal{G}_1^v(\cdot, \cdot) + f^2(\pi_1(v_1))\mathcal{G}_2^v(\cdot, \cdot).$$

Considerații similare cazului varietăților "warped" Finsler reale [K-P-V1] conduc la următorul rezultat.

Teorema 7.2.1. *Fie $U_1, V_1 \in V\mathcal{T}E_1$ și $U_2, V_2 \in V\mathcal{T}E_2$. Atunci:*

1. $\mathcal{D}_{U_1}V_1$ on $V\mathcal{T}E_1 \oplus V\mathcal{T}E_2$ este lift-ul lui $\mathcal{D}_{U_1}V_1$ on $V\mathcal{T}E_1$;
2. $\mathcal{D}_{U_1}U_2 = \mathcal{D}_{U_2}U_1 = (U_2f/f)U_1$;
3. $\mathcal{D}_{U_2}V_2 = \mathcal{D}_{U_2}^2V_2 - \frac{\mathcal{G}(U_2, V_2)}{f}\nabla^{v\bar{v}}f$;
4. $\mathcal{T}(U_1, U_2) = \mathcal{T}(U_2, U_1) = 0$;

Este interesant de caracterizat local rezultatul anterior. Avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_\beta &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_\beta, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_{\bar{\beta}} &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_{\bar{\beta}} = 0, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_\beta^2 &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\beta}^2 \mathcal{V}_\alpha = \frac{\dot{\partial}_\alpha f}{f} \mathcal{V}_\beta^2, & \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2 &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_{\bar{\beta}}}^2 \mathcal{V}_\alpha = \frac{\dot{\partial}_\alpha f}{f} \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_\beta^2 &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_\beta^2 - \frac{1}{f} \mathcal{G}(\mathcal{V}_\alpha^2, \mathcal{V}_\beta^2) \nabla^{v\bar{v}} f = \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_\beta^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2 &= \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2 - \frac{1}{f} \mathcal{G}(\mathcal{V}_\alpha^2, \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2) \nabla^{v\bar{v}} f = -f h_{\alpha\bar{\beta}}^2 \nabla^{v\bar{v}} f, \end{aligned}$$

împreună cu conjugatele lor. Prin urmare, dacă notăm

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_\beta &= C_{\beta\alpha}^{11,1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{11,\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{11,2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{11,\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^1 \mathcal{V}_{\bar{\beta}} &= C_{\beta\alpha}^{\bar{1}1,1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{\bar{1}1,\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{\bar{1}1,2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{\bar{1}1,\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_\beta &= C_{\beta\alpha}^{21,1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{21,\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{21,2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{21,\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_{\bar{\beta}} &= C_{\beta\alpha}^{2\bar{1},1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{1},\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{1},2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{1},\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_\beta^2 &= C_{\beta\alpha}^{22,1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{22,\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{22,2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{22,\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \\ \mathcal{D}_{\mathcal{V}_\alpha}^2 \mathcal{V}_{\bar{\beta}}^2 &= C_{\beta\alpha}^{2\bar{2},1} \mathcal{V}_\gamma^1 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{2},\bar{1}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^1 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{2},2} \mathcal{V}_\gamma^2 + C_{\beta\alpha}^{2\bar{2},\bar{2}} \mathcal{V}_{\bar{\sigma}}^2, \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} C_{\beta_1\alpha_1}^{11,1} \gamma_1 &= C_{\beta_1\alpha_1}^1 \gamma_1 = h^{\bar{\sigma}_1\gamma_1} (\dot{\partial}_{\alpha_1}^1 h_{\beta_1\bar{\sigma}_1}^1) \\ C_{\beta_2\alpha_1}^{21,2} \gamma_2 &= \delta_{\beta_2}^{\gamma_2} \frac{\dot{\partial}_{\alpha_1}^1 f}{f}, & C_{\beta_2\alpha_1}^{2\bar{1},\bar{2}} \bar{\sigma}_2 &= \delta_{\beta_1}^{\bar{\gamma}_1} \frac{\dot{\partial}_{\bar{\alpha}_1}^1 f}{f}, \\ C_{\beta_2\alpha_2}^{22,2} \gamma_2 &= C_{\beta_2\alpha_2}^2 \gamma_2 = h^{\bar{\sigma}_2\gamma_2} (\dot{\partial}_{\alpha_2}^2 h_{\beta_2\bar{\sigma}_2}^2), \\ C_{\beta_2\alpha_2}^{2\bar{2},1} \bar{\sigma}_1 &= -f (\dot{\partial}_{\bar{\sigma}}^1 f) h^{\bar{\sigma}\gamma} h_{\alpha\bar{\beta}}^2, \\ C_{\beta_2\alpha_2}^{2\bar{2},\bar{1}} \bar{\sigma}_1 &= -f (\dot{\partial}_\gamma^1 f) h^{\bar{\sigma}\gamma} h_{\alpha\bar{\beta}}^2. \end{aligned}$$

Toți ceilalți coeficienți sunt zero.

Curbura produsului $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este definită ca de obicei prin $\mathcal{R}(U, V)W = \mathcal{D}_U \mathcal{D}_V W - \mathcal{D}_V \mathcal{D}_U W - \mathcal{D}_{[U, V]}W$. Legătura dintre curbura produsului "warped" și curburile fiecăruia dintre fibratele prelungire constituente ale produsului este dată în

Teorema 7.2.2. *Dacă $\mathcal{T}E_1 \times \mathcal{T}E_2$ este produsul prelungirilor a doi algebroizi Finsler Lie olomorfi, având curburile \mathcal{R} pe fibratul produs și \mathcal{R}^1 și \mathcal{R}^2 pe $\mathcal{T}E_1$ și respectiv $\mathcal{T}E_2$, atunci pentru $U_1, V_1, W_1 \in V\mathcal{T}E_1$ și $U_2, V_2, W_2 \in V\mathcal{T}E_2$ au loc următoarele identități:*

1. $\mathcal{R}(U_1, V_1)W_1$ este liftul lui $\mathcal{R}^1(U_1, V_1)W_1$;
2. $\mathcal{R}(V_2, U_1)V_1 = -\frac{1}{f}[\mathcal{H}^f(U_1, V_1) - (\mathcal{D}_{U_1^v}V_1^v - \mathcal{D}_{U_1^{\bar{v}}}V_1^{\bar{v}})f]V_2$;
3. $\mathcal{R}(V_2, W_2)U_1 = 0$;
4. $\mathcal{R}(V_2, W_2)U_2 = \mathcal{R}^2(V_2, W_2)U_2 + \frac{\mathcal{G}(\nabla^{v\bar{v}}f, \nabla^{v\bar{v}}f)}{f^2}(\mathcal{G}(V_2, U_2)W_2 - \mathcal{G}(W_2, U_2)V_2)$

7.3 Un model de produs Finsler "warped" pentru gravitație și electromagnetism

Fie M spațiul-timp complexificat considerat în [A-M], $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$, și fie (z^1, z^2) coordonate complexe pe M . Considerăm $E_1 = T'M$, fibratul tangent olomorf, care are o structură de varietate complexă 4-dimensională, cu $(z^1, z^2, \eta^1, \eta^2)$ – coordonatele complexe pe $T'M$. Fibratul $T'M$ are o structură naturală de algebroid Lie olomorf, cu aplicația ancoră ρ_1 identitatea. O funcție Finsler complexă $F_1 : T'M \rightarrow \mathbb{R}_+$ este metrica slab gravitațională considerată în [A-M]:

$$F_1 := \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) |\eta^1|^2 - i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^1 \bar{\eta}^2 + i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^2 \bar{\eta}^1 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) |\eta^2|^2 \quad (7.3.7)$$

unde Φ este o funcție omogenă în η definită pe $T'M$, având interpretarea fizică de potențial gravitațional complex, cu proprietatea $\Phi > \frac{c^2}{2}$, $c \in \mathbb{R}^*$.

Tensorul metric este

$${}^1 h_{j\bar{k}}(z, \eta) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} & -i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \\ i \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) & - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \end{pmatrix}, \quad j, k = 1, 2 \quad \text{și} \quad i := \sqrt{-1}, \quad (7.3.8)$$

iar inversul său,

$${}^1h^{\bar{k}j}(z, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1+\frac{2\Phi}{c^2}}{2(1-\frac{2\Phi}{c^2})} \end{pmatrix}, \quad j, k = 1, 2.$$

Conform [A-M], această metrică este Finsler dacă presupunem următoarele:

- i) $\Phi > \frac{c^2}{2}$, adică $\det(g_{i\bar{j}}) > 0$;
- ii) Φ este omogenă în raport cu η ;
- iii) $i\Phi_{,2} = \Phi_{,1}$, unde $\Phi_{,h} = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta^h}$, $h = 1, 2$.

Componentele conexiunii neliniare Chern-Finsler sunt

$${}^1N_k^1 = 0, \quad {}^1N_k^2 = \frac{-2i}{c^2 \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)} (\eta^1 - i\eta^2) \Phi_k.$$

Pentru cel de-al doilea algebroid Lie olomorf, considerăm din nou spațiul-timp complexificat M , iar pe $E_2 = T'M$ putem lua altă metrică Finsler, propusă în [S]:

$$F_2 := F_0 + \sigma(z)|\beta|^2, \quad (7.3.9)$$

unde:

- i) F_0 este o metrică Finsler dată (de exemplu, metrica slab gravitațională F_1) pe M ;
- ii) $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție ce satisface $\sigma(z) \geq -\frac{F_0}{|\beta|^2}$;
- iii) $\beta = B_k(z)\eta^k$ este forma Beil olomorfă; de obicei, $B_k(z)$ sunt componentele unui câmp electromagnetic.

Tensorul metric este în acest caz dat de

$${}^2h_{i\bar{j}} = g_{i\bar{j}} + \sigma(z)B_i(z)B_{\bar{j}}(z), \quad (7.3.10)$$

unde $g_{i\bar{j}}$ este metrica lui (M, F_0) , iar $B_{\bar{j}} = \overline{B_j}$. Inversul tensorului (7.3.10) este

$${}^2h^{\bar{j}i} = g^{\bar{j}i} - \frac{\sigma}{1 + \sigma\mathbb{B}^2},$$

unde $\mathbb{B} = g_{i\bar{j}}B^iB^{\bar{j}}$. Coeficienții conexiunii neliniare Chern-Finsler sunt ${}^2N_k^j = N_k^j + A_k^j$, unde $A_k^j = {}^2h^{\bar{m}j}\partial_k(\sigma B_l B_{\bar{m}})\eta^l$.

Considerăm în continuare o funcție olomorvă $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, iar pe produsul "warped" $\mathcal{T}T'M \times_f \mathcal{T}T'M \equiv T_{\mathbb{C}}(T'M) \times_f T_{\mathbb{C}}(T'M)$ definim metrica Finsler

$$F(z, \eta) = F_1(z, \eta) + f^2(z)F_2(z, \eta), \quad (7.3.11)$$

care oferă un posibil model pentru teorii de unificare a gravitației și electromagnetismului, depinzând de două funcții pe M , f și σ .

Capitolul 8

Contribuții originale. Diseminarea rezultatelor

Prezentăm în acest capitol contribuțiile originale ale autorului prezentei teze, precum și publicațiile în care au apărut rezultatele obținute.

- Definirea și studiul proprietăților operatorului Laplace pentru funcții olomorfe definite pe un grup Lie complex. Studiul ultim multiplicatorilor olomorfi definiți pe un grup Lie complex.
- Rezolvarea problemei determinării unui spray complex din problema variațională în cazul algebroidelor Lie complexe.
- Înzestrarea fibratului tangent olomorf al unui algebroid Lie olomorf cu o structură de algebroid Lie. Studiul geometriei acestui nou algebroid Lie.
- Definirea noțiunii de prelungire olomorfă a unui algebroid Lie olomorf și investigarea proprietăților acestuia (conexiuni neliniare și liniare, torșiuni, curburi, semispray-uri și spray-uri).
- Investigarea relațiilor dintre structurile Lagrange (Finsler) ale fibratului tangent olomorf al varietății bază a unui algebroid și ale algebroidului, în funcție de dimensiunile varietății bază, ale algebroidului și rangul ancorei acestuia.
- Definirea noțiunii de algebroid Finsler olomorf prin înzestrarea unui algebroid cu o structură Finsler complexă. Studiul proprietăților acestui tip de algebroid.

- Definierea unor operatori de tip Laplace verticali și orizontali pentru funcții olomorfe pe un algebroid Lie Finsler olomorf. Definierea unui operator Laplace orizontal pentru forme definite pe prelungirea unui algebroid Lie Finsler olomorf.
- Realizarea unui studiu de tip Bochner pentru algebroizi olomorfi și obținerea în cadrul acestuia a unor teoreme de anulare pentru câmpuri vectoriale orizontale.
- Definierea produsului "warp" de algebroizi olomorfi și investigarea proprietăților acestuia.

Rezultatele obținute de autorul tezei au fost publicate în următoarele articole:

- Ida, C., Ionescu, A., *On a metric holomorphic connection in complex Lie groups*, BSG Proceedings 21, The Int. Conf. "Differential Geometry – Dynamical Systems" DGDS-2013, Bucharest, Romania (2013), 74–83.
- Ionescu, A., *On lifts of left-invariant holomorphic vector fields in complex Lie groups*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 7(56), No. 2 (2014), 65–72.
- Ionescu, A., *On holomorphic Lie algebroids*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 9(58), No. 1 (2016), 53–66.
- Ionescu, A., *A note on the Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math. 62, No. 1 (2017), 15–25.
- Ionescu, A., Munteanu, G., *Connections in holomorphic Lie algebroids*, Mediterr. J. Math., 4, Vol. 14 (2017), DOI: 10.1007/s00009-017-0960-4.
- Ionescu, A., *Finsler structures on holomorphic Lie algebroids*, Novi Sad J. Math., Vol. 47, No. 2 (2017), 117–132.
- Ionescu, A., *Laplace operators on holomorphic Lie algebroids*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 26(1) (2018), 141–158.
- Ionescu, A., *Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

- Ionescu, A., Munteanu, G., *The warped product of holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.

O parte din rezultate au fost prezentate într-o serie de conferințe naționale și internaționale:

- The International Conference "Differential Geometry and Dynamical Systems", 10–13 Octombrie 2013, București;
- The X -th International Conference on Finsler Extensions of Relativity Theory, 18–24 August 2014, Brașov;
- International Conference on Applied Mathematics and Numerical Methods, 14–16 Aprilie 2016, Craiova;
- The International Conference on Mathematics and Computer Science, 8–10 Septembrie 2016, Brașov;
- The International Conference on Applied and Pure Mathematics - dedicated to the 90th anniversary of Academician Radu Miron, 2–5 Noiembrie 2017, Iași.

Bibliografie – Selecție

- [A-P] Abate, M., Patrizio, G., *Finsler Metrics – A Global Approach with Applications to Geometric Function Theory*, Springer-Verlag, 1591, 1994.
- [AT1] Aikou, T., *On Complex Finsler Manifolds*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. **35** (1991), 9-25.
- [AT2] Aikou, T., *A Partial Connection on Complex Finsler Bundles and its Applications*, Illinois J. of Math. **42** (1998), 481–492.
- [AT3] Aikou, T., *Applications of Bott Connection to Finsler Geometry*, Steps in Diff. Geom., Proc. of Coll. on Diff. Geom., Debrecen (2000), 3–13.
- [AT4] Aikou, T., *Finsler geometry on complex vector bundles*, Riemann Finsler Geometry, MSRI Publications, **50** (2004), 85–107.
- [A-M] Aldea, N., Munteanu, G., *New candidates for a Hermitian approach of gravity*, Int. J. of Geom. Meth. in Mod. Phys., Vol. 10, No. 9 (2013).
- [AM1] Anastasiei, M., *Geometry of Lagrangians and semisprays on Lie algebroids*, BSG Proc. **13**, Geom. Balkan Press, Bucharest (2006), 10–17.
- [AM2] Anastasiei, M., *Semisprays On Lie Algebroids. Applications*, Tensor (N.S.) **69** (2008), 190–198.
- [A-L] Antonelli, P. L., Lackey, B., *The Theory of Finslerian Laplacians and Applications*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 459, MAIA, 1998.
- [AGS] Asanov, G. S., *Finslerian metric functions over the product $\mathbb{R} \times M$ and their potential applications*, Rep. Math. Phys. **41** (1998), 117–132.
- [B-L] Bao, D., Lackey, B., *A Hodge decomposition theorem for Finsler spaces*, C.R. Acad. Sci. Paris **323**, Serie 1 (1996), 51–56.

- [B-K] Bland, J., Kalka, M., *Variations of holomorphic curvature for Kähler Finsler metrics* Cont. Math. **196** (1996), 121–132.
- [BS1] Bochner, S., *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776-797.
- [BS2] Bochner, S., *Curvature in Hermitian metric*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 179-195.
- [CBY] Chen, B.-Y., *Geometry of warped product CR-submanifolds in Kähler manifolds*, Monatsh. Math. **133** (2001), 177–195.
- [CCH] Chen, C.-H., *Warped products of metric spaces of curvature bounded from above*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4727–4740.
- [C-S] Chern, S. S., Shen, Z., *Riemann-Finsler Geometry*, Singapore: World Scientific, 2005.
- [CL] Colombo, L., *Second-order constrained variational problems on Lie algebroids: Applications to optimal control*, J. Geom. Mech. **9**, no. 1 (2017), 1-45.
- [CM1] Crâșmăreanu, M., *Last multipliers theory on manifolds*, Tensor **66**, no. 1 (2005), 18–25.
- [CM4] Crâșmăreanu, M., *Last multipliers on weighted manifolds and the weighted Liouville equation*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. **77**, No. 3 (2015), 53–58.
- [C-I-P1] Crâșmăreanu, M., Ida, C., Popescu, P., *An 1-differentiable cohomology induced by a vector field*, J. Lie Theory, Vol. 26., No. 4 (2016), 911–926.
- [C-I-P2] Crâșmăreanu, M., Ida, C., Popescu, P., *Holomorphic last multipliers on complex manifolds*, J. of Nonl. Math. Phys. **24**, No. 4 (2017), 596–619.
- [G-O] Gheorghiev, G., Oproiu, V., *Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale*, Ed. Academiei, Vol. I, 1976, Vol. II, 1979.
- [GSI] Goldberg, S. I., *Curvature and Homology*, Revised Edition. ISBN 0-486-40207-X, Dover Publication, Inc. Mineola, New-York, 1998.

- [G-H] Griffiths, P., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York, 1978.
- [H-M] Higgins, P., Mackenzie, K. C. H., *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids*, J. Algebra **129**, no. 1 (1990), 195–230.
- [IC1] Ida, C., *Weitzenböck type formulas and a vanishing theorem on complex Finsler bundles*, Tensor (N.S.) **71**, No. 1 (2009), p. 61–68.
- [IC2] Ida, C., *Vertical Laplacian on complex Finsler bundles*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (NS) **26**, No. 2 (2010), 313–327.
- [IC3] Ida, C., *A vanishing theorem for vertical tensor fields on complex Finsler bundles*, Analele Șt. ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iași, Mat., Tomul LVII, Suppl. (2011), 103–112.
- [IC4] Ida, C., *Lichnerowicz-Poisson cohomology and Banach Lie algebroids*, Ann. Funct. Anal., Vol. 2, No. 2 (2011), 130–137.
- [I-I] Ida, C., **Ionescu, A.**, *On a metric holomorphic connection in complex Lie groups*, BSG Proceedings **21**, The Int. Conf. "Differential Geometry – Dynamical Systems" DGDS-2013, Bucharest, Romania (2013), 74–83.
- [I-P] Ida, C., Popescu, P., *On Almost Complex Lie Algebroids*, Mediterr. J. Math. **2**, Vol. 13 (2016), 803–824.
- [IA1] **Ionescu, A.**, *On lifts of left-invariant holomorphic vector fields in complex Lie groups*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 7(56), No. 2 (2014), 65–72.
- [IA2] **Ionescu, A.**, *On holomorphic Lie algebroids*, Bulletin of Transilvania Univ., Vol. 9(58), No. 1 (2016), 53–66.
- [IA3] **Ionescu, A.**, *A note on the Laplace operator for holomorphic functions on complex Lie groups*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math. **62**, No. 1 (2017), 15–25.
- [I-M4] **Ionescu, A.**, Munteanu, G., *Connections in holomorphic Lie algebroids*, Mediterr. J. Math., **4**, Vol. 14 (2017), DOI: 10.1007/s00009-017-0960-4.

- [IA5] **Ionescu, A.**, *Finsler structures on holomorphic Lie algebroids*, Novi Sad J. Math., Vol. 47, No. 2 (2017), 117–132.
- [IA6] **Ionescu, A.**, *Laplace operators on holomorphic Lie algebroids*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța, Vol. 26(1) (2018), 141–158.
- [IA7] **Ionescu, A.**, *Vanishing theorems on holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.
- [I-M8] **Ionescu, A.**, Munteanu, G., *The warped product of holomorphic Lie algebroids*, trimisă spre publicare.
- [J] Jozwikowski, M., *Prolongations vs. Tulczyjew triples in Geometric Mechanics*, (2017), arXiv:1712.09858 [math-ph].
- [K] J. Klein, *Espaces variationelles et mécaniques*, Ann. Inst. Fourier **12** (1962), 1–124.
- [K-N] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry II*, Wiley Interscience, New York, 1969.
- [KS] Kobayashi, S., *Negative vector bundles and complex Finsler structures*, Nagoya Math. J. **57** (1975), 153-166.
- [K-P-V1] Kozma, L., Peter, I. R., Varga, C., *Warped product of Finsler manifolds*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. **44** (2001), 157–170.
- [L-S-X] Laurent-Gengoux, G., Stiénon, M., Xu, P., *Holomorphic Poisson manifolds and holomorphic Lie algebroids*, Int. Math. Res. Not. IMRN **rnn88**, 46 (2008).
- [LDH] Lee, D. H., *The structure of complex Lie groups*, Research Notes in Mathematics Series, Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [dL-M-M] de León, M., Marrero, J. C., Martínez, E., *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids*, J. of Phys. A, Vol. 38, No. 24 (2005).
- [MCM] Marle, C.-M., *Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds*, Dissertationes Mathematicae, Inst. Math., Polish Acad. Sci. **457**, 57, 2008.

- [ME1] Martinez, E., *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math. **67** (2001), 295–320.
- [ME2] Martinez, E., *Geometric formulation of mechanics on Lie algebroids*, Proc. of the VIIIth Workshop on Geometry and Physics (Medina del Campo, 1999), vol. 2 of Publ. R. Soc. Mat. Esp. (2001), 209–222.
- [ME3] Martinez, E., *Lie algebroids in classical mechanics and optimal control*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3**, 17 (2007).
- [IM] Mihai, I., *Complex differential geometry*, in Handbook of Differential Geometry, Vol. 2, eds. F. Dillen, L. Verstraelen, 2006.
- [M-K] Morrow, J., Kodaira, K., *Complex Manifolds*, New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971.
- [MG1] Munteanu, G., *Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 2004.
- [MG2] Munteanu, G., *The equations of a holomorphic subspace in a complex Finsler space*, Periodica Math. Hungarica, **55(1)** (2007), 81–95.
- [MO1] Munteanu, O., *Weitzenböck formulas for horizontal and vertical Laplacians*, Houston J. of Math, **29 (4)** (2003), 889–900.
- [P-M] Pitiș, G., Munteanu, G., *v-cohomology of complex Finsler manifolds*, Studia Univ. Babeș-Bolyai **18** (1998), 75–81.
- [PP3] Popescu, P., *Poisson structures on almost complex Lie algebroids*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **11(08)** (2014).
- [PL1] Popescu, L., *On the geometry of Lie algebroids and applications to optimal control*, An. Șt. ale Univ. ”Al. I. Cuza”, Iași, Vol. LI, s. I (2005), 155–170.
- [PL2] Popescu, L., *Geometrical structures on Lie algebroids*, Publ. Math. Debrecen **72(1-2)** (2008), 95–109.
- [RH] Rund, H., *Local differential-geometric structures on Lie groups*, Tensor, N. S., **48** (1998), 64–87.
- [S] Szász, A., *Beil metrics in complex Finsler geometry*, Balkan J. of Geom. and Its Appl., Vol. 20, No. 2 (2015), 72–83.

- [T-V] Toth, A., Varolin, D., *Holomorphic diffeomorphisms of complex semisimple Lie groups*, *Inventiones mathematicae*, **139** (2000), 351–369.
- [WHC] Wang, H.-C., *Complex Parallelisable Manifolds*, *Proceedings of the American Math. Soc.* **5** (1954), 771–776.
- [WA1] Weinstein, A., *Lagrangian mechanics and groupoids*, *Fields Inst. Comm.*, **7** (1996), 206–231.
- [WA2] Weinstein, A., *The integration problem for complex Lie algebroids*, in Maeda, Yoshiaki (ed.) et al., *From geometry to quantum mechanics. In honor of Hideki Omori*, Basel: Birkhäuser, *Progress in Mathematics*, **252** (2007), 93–109.
- [WH] Wu, H., *The Bochner technique in differential geometry*, *Math. Rep.*, **3** (1988), 289–538.
- [W-Z] Wu, Z., Zhong, C., *Some results on product complex Finsler manifolds*, *Acta Math. Sci.* **31B(4)m** (2011), 1541–1552.
- [X-Z-Q] Xiao, J., Zhong, T., Qiu, C., *Bochner technique on strong Kähler-Finsler manifolds*, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, **30** (2010), 89–106.
- [ZC2] Zhong, C., *On the fundamental formulas of complex Finsler submanifolds*, *J. of Geometry and Physics*, **58(4)** (2008), 423–449.
- [ZC3] Zhong, C., *A vanishing theorem on Kähler Finsler manifolds*, *Diff. Geom. and Appl.* **27** (2009), 551–565.
- [Z-Z1] Zhong, C., Zhong, T., *Horizontal $\bar{\partial}$ -Laplacian on complex Finsler manifolds*, *Sci. China Ser. A, Math.*, **48** (2005), 377–391.
- [Z-Z2] Zhong, C., Zhong, T., *Hodge decomposition theorem on strongly Kähler Finsler manifolds*, *Sci. China Math.* **49** (2006), no. 11, 1696–1714.

Anexe

Anexa 1. Scurt rezumat al tezei

Teza de doctorat intitulată *Operatori diferențiali pe spații Finsler complexe* prezintă un studiu al operatorilor din geometria diferențială definiți pe anumite clase de spații Finsler complexe. În Capitolul 1, după o scurtă recapitulare a noțiunilor legate de operatori Laplace pe varietăți Finsler complexe, analizăm grupurile Lie complexe, pe care definim un operator Laplace pentru funcții olomorfe. În Capitolul 2, inițiem studiul operatorilor diferențiali definiți pe algebroizi Lie prin descrierea cadrului geometric al studiului, reprezentat de algebroizii Lie olomorfi. Capitolul 3 prezintă un studiu detaliat al geometriei spațiului total al unui algebroid olomorf, introducând de asemenea noțiunea de prelungire a unui algebroid și studiind structuri Lagrange induse pe un algebroid olomorf de către structuri Lagrange pe spațiul tangent olomorf al varietății bază a algebroidului. În Capitolul 4, studiem geometria Finsler a algebroizilor olomorfi, definind structura Finsler, conexiunea Chern-Finsler a unui astfel de algebroid, investigând curburile și torsionile, diferențiala unei funcții. Aceste noțiuni sunt necesare studiului prezentat în Capitolul 5, în care introducem două tipuri de operatori Laplace în cazul algebroizilor olomorfi. Primul operator este definit pentru funcții, cel de-al doilea pentru forme diferențiale. În Capitolul 6, prezentăm un studiu de tip Bochner pe algebroizi olomorfi, în cadrul căruia obținem teoreme de anulare importante pentru câmpuri vectoriale orizontale. Capitolul 7 este dedicat studiului produselor de tip "warp" ale algebroizilor olomorfi, investigând legăturile dintre conexiunile produsului și cele ale algebroizilor constituenți ai acestuia.

The PhD thesis entitled *Differential operators on complex Finsler spaces*, represents a study of operators from differential geometry defined on some classes of complex Finsler spaces. In Chapter 1, after a brief resume on Laplace operators on complex Finsler manifolds, we analyze complex Lie

groups, on which we define a Laplace operator for holomorphic functions. In Chapter 2, we initiate the study of differential operators defined on Lie algebroids by describing the geometrical setting of the study, represented by holomorphic Lie algebroids. In Chapter 3, we present a detailed study of the geometry of the total space of a holomorphic Lie algebroid, also introducing the notion of prolongation of such an algebroid and studying Lagrange structures induced on a holomorphic algebroid by Lagrange structures defined on the holomorphic tangent space of the base manifold of the algebroid. In Chapter 4, we study the Finsler geometry of holomorphic algebroids, by defining the Finsler structure, the Chern-Finsler connection of such an algebroid, also investigating the curvatures and torsions, the differential of a function. These notions are necessary in the study presented in Chapter 5, where we introduce two types of Laplace operators for holomorphic algebroids. The first operator is defined for functions, the second one, for differential forms. In Chapter 6, we present a Bochner-type study on holomorphic algebroids, where we obtain some interesting vanishing theorems for horizontal vector fields. Chapter 7 is dedicated to the study of warped products of holomorphic algebroids, investigating the relations between connections on the warped product and on the constituting algebroids.

Anexa 2. Curriculum vitae

Informații personale	Alexandru Codrin IONESCU E-mail: alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro
Experiența profesională	2016-prezent – Asistent universitar în cadrul Departamentului de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică a Universității <i>Transilvania</i> din Brașov 2014-2016 – Cadru didactic asociat în cadrul Departamentului de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică a Universității <i>Transilvania</i> din Brașov
Educație	2013-prezent – Doctorand, Domeniul matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea <i>Transilvania</i> , Brașov 2011-2013 – Master în matematică Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea <i>Transilvania</i> , Brașov 2008-2011 – Licență în matematică, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea <i>Transilvania</i> , Brașov 2004-2008 – Liceu, Colegiul Național <i>Andrei Șaguna</i> , Brașov, Specializarea Matematică-informatică, intensiv informatică
Aptitudini și competențe personale	Limbi străine cunoscute/Autoevaluare: Engleză – înțelegere-avansat, vorbire-mediă, scriere-avansat Franceză – înțelegere-avansat, vorbire-mediă, scriere-mediă Competențe și abilități sociale: Comunicativ, serios, organizat, responsabil, adaptabil, perfecționist, dinamic Competențe informatice: Limbajele de programare C++, Java, HTML Editoarele din pachetul Microsoft Office Programele Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX

Personal information	Alexandru Codrin IONESCU E-mail: alexandru-codrin.ionescu@unitbv.ro
Work experience	2016-now – Assistant professor, Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, <i>Transilvania</i> University of Braşov 2014-2016 – Adjunct professor, Department of Mathematics and Computer Science Faculty of Mathematics and Computer Science <i>Transilvania</i> University of Braşov
Education	2013-now – PhD student in Mathematics Faculty of Mathematics and Computer Science, <i>Transilvania</i> University of Braşov 2011-2013 – Master degree in Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, <i>Transilvania</i> University of Braşov 2008-2011 – Bachelor degree in Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, <i>Transilvania</i> University of Braşov 2004-2008 – High school, <i>Andrei Şaguna</i> High School of Braşov
Personal skills	Foreign languages/Self-evaluation: English – understanding-advanced, speaking-medium, writing-advanced French – understanding-advanced, speaking-medium, writing-medium Social skills: Communicative, serious, organized, responsible, adaptable, perfectionist, dynamic PC skills: Programming languages: C++, Java, HTML Microsoft Office package Mathematica, Scilab, Matlab, LaTeX