



Universitatea
Transilvania
din Braşov

TEZĂ DE ABILITARE

CERCETĂRI PRIVIND FIABILITATEA PRODUSELOR INDUSTRIALE

Domeniul: Inginerie industrială

Autor: Conf. dr. ing. Cristin – Olimpiu MORARIU

Universitatea *Transilvania* din Braşov

BRAŞOV, 2017

CUPRINS

Lista de notații	2
(A) Summary	4
(B) REALIZĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI PROFESIONALE, PLANURI DE EVOLUȚIE ȘI DEZVOLTARE A CARIEREI	7
(B-i) Realizări științifice și profesionale	7
Introducere	7
Capitolul 1. Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate	9
1.1 Noțiuni generale	9
1.2 Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate în cazul repartiției Weibull	24
1.2.1 Studii comparative privind modalitățile de estimare ale parametrului de localizare	27
1.2.2 Proiectarea optimizată a planurilor de încercări	35
1.2.3 Inferențe statistice în cazul rezultatelor experimentale obținute pe baza încercărilor trunchiate	40
1.2.4 Metode bayesiene de estimare parametrică	46
1.3 Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate în cazul repartiției exponențiale	55
1.4 Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate în cazul repartiției Rayleigh	63
1.5 Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate în cazul repartiției lognormale	69
Capitolul 2. Cercetări privind fiabilitatea produselor industriale	77
2.1 Fiabilitatea previzională a rulmenților	77
2.2 Determinarea indicatorilor de fiabilitate ai rulmenților utilizând date experimentale obținute prin încercări efectuate prin metoda liniei defectelor primare	84
2.3 Analiza fiabilității scarificatorului tractat	91
2.4 Analiza fiabilității mașinii de debitat furnir	98
Concluzii	109
(B-ii) Planuri de evoluție și dezvoltare a carierei	111
(B-iii) Bibliografie	119

LISTA DE NOTAȚII

$Pr(A); p(A)$	- Probabilitatea evenimentului A
X, Y, T	- Variabile aleatorii
x, y, t	- Valorile variabilelor aleatorii X, Y, T
$F(x), F_X(x)$	- Funcția de repartiție a variabilei aleatorii X
$f(x), f_X(x)$	- Funcția densitate de probabilitate a variabilei aleatorii X
$f(x y)$	- Funcția densitate de probabilitate a variabilei aleatorii X condiționată de Y
$f(x, y)$	- Funcția densitate de probabilitate bidimensională
$Cov(X, Y)$	- Covarianța variabilelor aleatorii X și Y
$\mu = E(X)$	- Media unei variabile aleatorii, sau a unei repartiții de probabilitate
$\sigma^2 = V(X)$	- Dispersia unei variabile aleatorii, sau a unei repartiții de probabilitate
$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$	- Abaterea standard a unei variabile aleatorii, abaterea medie pătratică
$Cv = \sigma/\mu$	- Coeficientul de variație
$\rho(X, Y)$	- Coeficientul de corelație a variabilelor aleatorii X și Y
$\mu_q = E(X^q)$	- Momentul de ordinul q ; momentul de ordinul q în raport cu originea
$\mu'_q = E[(X - \mu)^q]$	- Momentul centrat de ordinul q
x_p	- Cuantila de ordinul p a variabilei aleatorii X
$B(x, p, n)$	- Repartiția binomială
$\Gamma(x)$	- Funcția gama
$N(x, \mu, \sigma)$	- Repartiția normală; repartiția Gauss-Laplace
$\Phi(z)$	- Funcția integrală Laplace
$N(x, 0, 1)$	- Repartiția normală standard; repartiția Gauss – Laplace normată
$\mathcal{L}n(x, \mu, \sigma)$	- Repartiția lognormală
$\mathcal{E}(x, \lambda)$	- Repartiția exponențială
$\mathcal{W}(x, \beta, \eta, \gamma)$	- Repartiția Weibull triparametrică
$\mathcal{W}(x, \beta, \eta)$	- Repartiția Weibull biparametrică
$\mathcal{R}(x, \eta)$	- Repartiția Rayleigh
$\mathcal{EVD}(x, \delta, \mu)$	- repartiția valorilor extreme minime de tip I (repartiția Gumbel)
$\chi^2(x, \nu)$	- Repartiția hi – pătrat, χ^2
$t(t, \nu)$	- Repartiția t ; repartiția Student
$\mathcal{F}(f, \nu_1, \nu_2)$	- Repartiția F ; repartiția Fisher-Snedecor
$\mathcal{G}(x, k, \lambda)$	- Repartiția Gama
$x_i, i = \overline{1, n}$	- Valorile de eșantionaj ale variabilei aleatorii X
$x_{(i)}, i = \overline{1, n}$	- Statisticile de ordine ale variabilei aleatorii X
n	- Volumul (efectivul) eșantionului
R	- Amplitudinea eșantionului
k	- Numărul de clase

w	- Amplitudinea clasei
f_i	- Frecvența relativă
N_i	- Frecvența absolută
f_i'	- Frecvența relativă cumulată
N_i'	- Frecvența absolută cumulată
m, \bar{x}	- Media de eșantionaj
s^2	- Dispersia de eșantionaj
s	- Abaterea medie pătratică de eșantionaj
m_q	- Momentul de eșantionaj de ordinul q în raport cu originea
m'_q	- Momentul centrat de ordinul q de eșantionaj
α	- Nivel de semnificație, riscul de tip I
$1 - \alpha$	- Nivelul de încredere
β	- Riscul de tip II
v	- Numărul gradelor de libertate
T	- Variabila aleatorie care precizează durata de viață a produsului
$t_i, i = \overline{1, n}$	- Valoarea variabilei aleatorii; durata de viață
\bar{t}, m	- Media timpului de funcționare
$F(t)$	- Funcția de nonfiabilitate: $F(t) = Pr(T \leq t)$
$R(t)$	- Funcția de fiabilitate: $R(t) = Pr(T > t)$
$z(t)$	- Rata (intensitatea) de defectare
r	- Nivelul de cenzurare
t_0	- Timpul de trunchiere
\mathcal{T}_Σ	- Timpul total de funcționare cumulat
$\mathcal{T}_{n,r}$	- Durata unei încercări cenzurate la nivelul r
$\mathcal{L}(x_i, \theta_j)$	- Funcția de verosimilitate
$\mathbb{L}(\hat{\theta}_{\mathfrak{B}}, \theta)$	- Funcția de pierderi
θ	- Parametrul de estimat
$\hat{\theta}$	- Estimație în general; Valoarea estimată a parametrului θ
$F_n(t_i)$	- Funcția empirică de repartiție
L	- Indice pentru limita inferioară a intervalului de încredere
U	- Indice pentru limita superioară a intervalului de încredere
\mathcal{S}	- Indice pentru estimatorii liniei defectelor primare
\mathfrak{B}	- Indice pentru estimatorii bayesieni;
$BLUE$	- Indice pentru estimatorii liniari tip BLUE (B est L inear U nbiased E stimator)
$BLIE$	- Indice pentru estimatorii liniari tip BLIE (B est L inear I nvariant E stimator)

(A) Summary

The habilitation thesis, entitled *Researches on the Reliability of the Industrial Products* represents a synthesis of the scientific, professional and academic activity in the field of Industrial Engineering of the author, which started after fulfilling the PhD thesis, named *Optimization of the Bearing Reliability Tests*, on 19th March 1999, at the University Transylvania from Brasov, thesis elaborated under the coordination and supervision of prof.univ.dr.ing. Ion POPESCU.

The main scientific achievements of the author are the subject of the section titled *Scientific and Professional Achievements* and represent the most consistent part of the Habilitation Thesis. This section begins with an introduction in which contains a brief review of the emergence, development and evolution of the research area called Reliability. Thus, there are highlighted the stages through which this concept has evolved from treating laws of degradation and deterioration of physical elements and systems, to security / ensuring their operational safety and until the modern approach where reliability is equals quality over time.

The first chapter, entitled *Researches on the estimation of parameters and reliability indicators*, is organized in five subchapters.

The first subchapter contains a description of the main tools of reliability engineering. These are the functions used to model different aspects of the reliability. Also, in this subchapter are briefly presented some elements of the estimation theory, as well as the main estimation methods. This subchapter ends with the classification and presentation of the usual reliability tests used to collect experimental data for product reliability analysis.

The second subchapter, entitled *Researches on the estimation of parameters and reliability indicators for Weibull distribution*, points out several contributions of the author in this research direction:

- *Comparative studies on how to estimate the localization parameter of the three parameters Weibull distribution.* In this study, it is proposed a method of estimating the localization parameter from the maximum value condition of the correlation coefficient. The validation of the method is done by considering two examples, on one hand one from the literature and on the other hand, the punctual estimation of the parameters by the proposed method, in comparison with the established methods, customized for the three parameters distribution.
- *Optimized design of test plans.* The mathematical model of the optimization problem consists of an objective function representing the total cost of the reliability test as well as a system of restrictions consisting of: the maximum number of products that can be mounted simultaneously on the test machine and which are operating throughout under identical conditions, the type of test performed, the precision of the shape parameter estimation, and precision of the scale parameter estimation. The proposed optimization method is, in fact, a problem of non-linear optimization, using integers, of the parameters r and n , which are defining the failure terminated tests of the products.
- *Statistical inferences for experimental results obtained from time terminated tests.* Unlike the failure terminated tests or complete tests, in which were developed techniques for obtaining inferences and verifying the statistical hypothesis starting from the punctual estimates of the Weibull distribution parameters and using the maximum likelihood method, in the case of time terminated tests, these procedures cannot be applied due to the specificity of this type of test. Determining the confidence intervals for the Weibull distribution parameters as well as testing the statistical assumptions regarding the distribution parameters can be done by taking into account that the duration t_c of the test can be considered to be

included between the duration of censored tests at r and $r + 1$ failures and by using two random variables independent of the distribution parameters. It is also proposed an algorithm that allows these random variables values to be determined using Monte-Carlo numerical simulation.

- *Bayesian parametric estimation methods.* These methods are a way to increase the precision of estimates based on the idea that before a product reliability test is performed, there is some information about its reliability, which, if not neglected, would contribute to its more accurate characterization. The research starts from a two-dimensional model, proposed in the 1970s, which allows simultaneous estimation of the two distribution parameters. The contribution of the author consists of a method of fully specifying the previous distributions used in the construction of this model based on objective information obtained from the reliability tests, combined with the results of the Monte - Carlo numerical simulation. The properties of the BLIE estimators applied to the Weibull distribution are used.

During the third subchapter, 1.3 *Research on the estimation of parameters and reliability indicators for the exponential distribution*, is illustrated how bootstrap estimators are used, as well as their accuracy for different types of exponentially distributed samples. This estimation technique, developed in recent years and based on the intensive use of computers, is addressed in particular to solving situations in which the point estimator calculus is difficult and in which ordinary statistical theory cannot be applied to obtain mathematical expressions. The model of the exponential distribution has been chosen for several reasons: the distribution has a relatively simple mathematical expression; due to the properties presented by the random variable and the realization of statistical inferences of maximum likelihood does not present major calculation difficulties. The conclusion that has been reached is that this method leads to results similar to the estimates of maximum likelihood applied to complete and very poorly censored samples, or for situations where estimates are not displaced.

The fourth subchapter, entitled *Researches on the estimation of Rayleigh's parameters and reliability indicators*, presents a way to achieve statistical inferences for statistical model parameters, based on asymptotic properties of punctual estimators of maximum likelihood method, an aspect which is poorly treated and solved in the literature. In this case, the Fisher information matrix was used, as well as the Delta method, which allows computing the dispersion of a function that has as argument the value of the estimation of the parameters of the analyzed distribution.

The first chapter ends with *the Research on the estimation of parameters and reliability indicators for lognormal distribution*. The novelty of this study is represented by the method proposed for calculating the confidence intervals of the testing time estimation so that it is possible to achieve more realistic planning activities and appropriate allocation of resources for the testing activities.

Chapter 2, entitled *Researches on the reliability of industrial products*, is structured in four subchapters comprising:

- *Preliminary reliability of bearings.* The purpose of using reliability models and statistical methods to analyze experimental results, obtained by observing defects types and deterioration phenomena, is to assess the preliminary reliability of products. Consequently, the overall assessment of the product lifetime should allow for the overall consideration of the possibilities of failure by realistically linking the accidental causes of deterioration to the controlled, determined ones. The predicted bearings reliability assessment model underlying the research is based on the following assumptions: the estimation of the bearings preliminary reliability is performed for the normal operating period of the products, a period characterized by a constant failure rate; the statistical model used to characterize each distinctive type of damage is the exponential distribution; the reliability system of a bearing, obtained by considering all distinctive typological damage mechanisms that can become effective as a result of concrete operating conditions, is a series system. This results from

fault tree analysis specific to a bearing case; for simplifying the calculus there are neglected: interdependencies, combinations and overlaps of effects that may occur in different types of deterioration.

- *Determination of bearings reliability indicators using experimental data obtained by tests performed by sudden death method.* The reliability tests carried out by the method of the sudden death consist in the random grouping of the products tested n , in ℓ subsets, and the consideration of each subset as an ensemble of m ($n = \ell \cdot m$) elements in series. Due to the specificity of this type of test, the estimation of Weibull distribution parameters and bearings reliability indicators show a number of particularities as against the case of time or failure terminated tests. In this research topic, these particularities have been detailed and a numerical simulation algorithm has been proposed by means of which the values of three random variables independent of the distribution parameters can be determined. These random variables allow for the statistical inferences for the Weibull distribution parameters and for nominal durability. This subchapter ends with a case study for LM11949 / LM11910 tapered roller bearing.
- *Reliability analysis of trailed scarifier.* The scarifier is a machine for dislodging the earth, boulders and roots, hard strata of material fixed to the soil, or for dismantling the compacted material, asphalt and rocky substrate to facilitate the scraping of land of relatively weak rocks. The research, in this case, consists in identifying the statistical model best suited to modeling the life of the scarifying teeth, estimating model parameters and achieving statistical inferences. Four statistical distributions used in reliability analyzes were taken into account: Weibull distribution, lognormal distribution, exponential distribution and normal distribution. Using the general goodness of-fit test, Anderson-Darling, applied to the experimental data led to the decision to use the three parameters Weibull distribution. To analyze the lifetime of the scarifying tooth were used the experimental results obtained from trailed scarifier functioning.
- *Reliability analysis of the veneer-cutting machine.* The data used in this case study was collected over a period of one year, January ÷ December 2004. During this period, the machine operated continuously, 24 hours a day, seven days out of seven, realizing a veneer with thicknesses between 0.5 and 1.2 mm. The statistical processing of the operating times, between two accidental failures, was aimed at identifying a statistical model and its full specification. To achieve this goal, two Mathcad programs have been implemented. The first program is intended to verify statistical homogeneity (random character check, identification and elimination of aberrant values), as well as to test the goodness of-fit of experimental data with the chosen statistical model. The second program allows to estimate the parameters of the statistical distribution by: the modified moments method, the correlation coefficient method, the least squares method, the maximum likelihood method and the classical method of the moments. Achieved results enabled the realization of realistic maintenance strategies for the veneer-cutting machine.

The second section of the Habilitation Thesis, entitled *Career Evolution and Development Plans*, contains a brief presentation of the professional evolution of the author from the graduation of the faculty to the present. Further on are presented the expected evolution directions of the professional activities by continuing the scientific research and improving the didactic activity for the disciplines in the field of industrial engineering, the dissemination of the results of the researches carried out by the author, as well as by the increase of the international recognition.

The Habilitation thesis ends with the bibliography containing all the references used in drafting the present paper.

(B) REALIZĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI PROFESIONALE, PLANURI DE EVOLUȚIE ȘI DEZVOLTARE A CARIEREI

(B-i) REALIZĂRI ȘTIINȚIFICE ȘI PROFESIONALE

Introducere

Fiabilitatea, ca teorie și domeniu distinct de cercetare, a fost fondată abia acum aproximativ șaizeci de ani, reprezentând un concept interdisciplinar dezvoltat și utilizat, inițial, pentru tratarea legilor de degradare și deteriorare a elementelor și sistemelor fizice.

Fiabilitatea, în sens larg, este știința care vizează estimarea, analiza, prevenirea și atenuarea, în timp, a fenomenelor de degradare și deteriorare a produselor în funcționare.

Dezvoltările tehnologice moderne au condus la construirea sistemelor tehnice mari, din ce în ce mai complexe și prin urmare, predispuse la frecvente moduri de defectare și deteriorare, care pot cauza adesea daune considerabile. Este suficient să se ia în considerare sistemele complexe de cercetare a spațiului cosmic, armele moderne și centralele nucleare pentru a considera și necesitatea de a lua toate măsurile de securitate împotriva oricărui eveniment posibil nedorit. Astfel, la proiectarea, construcția și exploatarea diferitelor echipamente moderne este necesar să se considere, pe lângă modalitățile de degradare, și securitatea / asigurarea siguranței în funcționare a acestora.

Noțiunile de fiabilitate, securitate și siguranță în funcționare au apărut și evidențiază preocuparea pentru găsirea unor modele matematice și metode de calcul care să permită realizarea de previziuni cât mai corecte în ceea ce privește comportarea, pe o anumită durată de timp, a instalațiilor, echipamentelor și sistemelor tehnice mari în condiții de exploatare cunoscute.

Ingineria fiabilității oferă instrumentele teoretice și practice prin care probabilitatea și capacitatea părților, componentelor, echipamentelor, produselor și sistemelor de a-și îndeplini funcțiile necesare pentru perioadele dorite de timp, fără eșec, în medii specificate și cu încrederea dorită, pot fi specificate, prezise, proiectate, testate, demonstrate, instalate, iar performanța acestora poate fi monitorizată.

În afară de complexitatea sistemului, accelerarea procesului de degradare este o consecință firească a producției de masă legată de nivelul general al dezvoltării economice. Efectele negative ale producției de masă asupra calității au fost remarcate de mult și s-au făcut eforturi substanțiale pentru a le depăși, dar până la sfârșitul anilor '40 nu a existat o distincție clară între asigurarea calității, la un moment dat și conservarea performanțelor sistemului într-un interval de timp determinat [CAT 83].

Fiabilitatea este calitate peste timp. Un produs fiabil, fără probleme, continuă să satisfacă cerințele clienților săi pentru o perioadă lungă de timp [MAR 95]. De aceea, studiile de fiabilitate nu se limitează numai la probleme de securitate, ci ele pot îngloba și studii referitoare la calitatea produselor: numeroase produse pot îndeplini aceeași funcție, însă unele o fac mai bine, altele nu, conferind avantaje sau dezavantaje utilizatorului. Predicția gradului de satisfacere a cerințelor utilizatorului unui anumit produs face parte din cadrul studiilor de fiabilitate.

Luând în considerare numărul de elemente conectate într-un produs, fiabilitatea poate fi de două feluri [MAR 95]:

- fiabilitatea elementelor, la care produsul este constituit dintr-un singur element;
- fiabilitatea sistemelor, la care produsul este format din $n > 1$ elemente.

În fiabilitate, partea care se referă la cercetarea elementelor, în vederea obținerii informațiilor

cantitative cu privire la durata de viață sau a altor parametri legați de buna lor funcționare, formează fiabilitatea elementelor sau fiabilitatea statistică. O altă parte a fiabilității, intitulată fiabilitatea sistemelor, are în vedere modelarea sistemelor în funcție de fiabilitatea elementelor componente. Fiabilitatea elementelor și fiabilitatea sistemelor sunt complementare, indisolubil legate, în sensul că rezultatele obținute de prima se constituie în date de intrare pentru cea de-a doua.

Ținând seama de aptitudinea produselor de a fi reparate sau nu, se poate face următoarea distincție [POP 93]:

- fiabilitatea elementelor reparabile;
- fiabilitatea elementelor nereparabile.

Un element poate fi considerat reparabil dacă este posibilă restabilirea calităților sale primare după apariția unei defectări. În caz contrar elementul se consideră nereparabil. Caracterul reparabil al unui element poate fi legat de natura misiunii sale. În consecință, noțiunii de fiabilitate i se asociază și cele de [POP 93]:

- *mentenanță*, definită ca ansamblul tuturor acțiunilor tehnice și organizatorice, care le sunt asociate, efectuate cu scopul menținerii sau restabilirii unui produs în starea de a-și îndeplini funcția specificată;
- *mentenabilitate*, definită ca aptitudinea unui produs, în condiții date de utilizare, de a fi menținut sau restabilit în starea de a-și îndeplini funcția specificată, atunci când mentenanța se efectuează cu procedee și remedii prescrise;
- *disponibilitate*, definită ca aptitudinea unui produs, luând în considerare aspectele legate de fiabilitate, mentenabilitate și organizare a acțiunilor de mentenanță, de a-și îndeplini funcția specificată, la un moment dat sau într-un interval de timp dat.

La modul general, se poate aprecia că fiabilitatea elementelor reparabile comportă studii mai elaborate decât fiabilitatea elementelor nereparabile. Aceasta este pusă în evidență și prin numărul mare de indicatori de fiabilitate specifici produselor reparabile.

Fiabilitatea poate fi de trei feluri, și anume [POP 93] :

- fiabilitatea previzională;
- fiabilitatea experimentală;
- fiabilitatea operațională.

Fiabilitatea previzională sau *previzionată* reprezintă fiabilitatea componentelor, echipamentelor, produselor și sistemelor determinată pe baza considerentelor privind cerințele de funcționare prin analogie cu alte produse similare sau prin calcule adecvate acestui domeniu.

Fiabilitatea experimentală reprezintă fiabilitatea componentelor, echipamentelor, produselor și sistemelor determinată pe bază experimentală, în laboratoare, stații de încercări sau standuri de probă, unde au fost create condiții asemănătoare cu cele din mediul ambiant.

Fiabilitatea operațională reprezintă fiabilitatea determinată pe baza rezultatelor privind comportarea în exploatare pe o anumită perioadă de timp, a unui număr determinat de componente, echipamente, produse sau sisteme, cu caracteristici identice.

Prin modul de exprimare, fiabilitatea poate fi [SMI 85]:

- *fiabilitatea nominală*, care reprezintă fiabilitatea înscrisă în specificația tehnică a produsului, determinată, prin diferite metode de către producător;
- *fiabilitatea estimată*, care reprezintă fiabilitatea determinată în exploatare, utilizând diferite metode de investigare. Estimarea fiabilității, atunci când produsul se află la beneficiar, se poate utiliza și în cazurile de litigiu.

Capitolul 1. CERCETĂRI PRIVIND ESTIMAREA PARAMETRILOR ȘI INDICATORILOR DE FIABILITATE

1.1 NOȚIUNI GENERALE

Noțiunea de fiabilitate poate fi privită sub două aspecte, calitativ și cantitativ [MIH 76]:

- Calitativ*, fiabilitatea reprezintă aptitudinea unui produs de a-și îndeplini funcția specificată în condiții de funcționare date și de-a lungul unei perioade de timp impuse.
- Cantitativ*, fiabilitatea reprezintă aptitudinea unui produs exprimată prin probabilitatea îndeplinirii funcției specificate până la momentul T , mai mare decât intervalul de timp $(0, t)$, prescris, în condiții de funcționare date (presupunând că produsul a fost pus în funcționare la $t=0$), adică:

$$R(t) = Pr(T > t). \quad (1.1)$$

În ecuația (1.1) prin $R(t)$, s-a notat *funcția de fiabilitate*, iar T reprezintă variabila aleatorie timpul de funcționare până la deteriorare. Calculul unei probabilități de tipul ecuației (1.1) se realizează pe baza unei funcții, $f(t)$, numită *densitatea de probabilitate a timpului de funcționare*:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt. \quad (1.2)$$

Proprietățile funcției de fiabilitate sunt:

- $R(t = 0) = 1$;
- $R(t \rightarrow \infty) = 0$;
- $0 \leq R(t) \leq 1$.

Funcția de fiabilitate permite:

- aprecierea nivelului de încredere în utilizarea unui produs la un anumit moment, t , din viața sa;
- compararea nivelului de fiabilitate al unor produse realizate de producători diferiți;
- compararea condițiilor de utilizare ale unor produse realizate de același producător, dar aflate la utilizatori diferiți.

Complementara funcției de fiabilitate (în sensul teoriei probabilităților) o reprezintă *funcția de nonfiabilitate (funcția de defectare)* definită ca probabilitatea de defectare a produsului în intervalul $(0, t)$:

$$F(t) = Pr(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt. \quad (1.3)$$

Proprietățile funcției de nonfiabilitate sunt:

- $F(t = 0) = 0$;
- $F(t \rightarrow \infty) = 1$;
- $0 \leq F(t) \leq 1$;
- $F(t) + R(t) = 1$.

Această funcție este utilizată pentru a pune în evidență lipsa de fiabilitate a produselor supuse cercetărilor. Alura, precum și relația dintre funcția de fiabilitate și cea de defectare sunt prezentate în fig. 1.1.

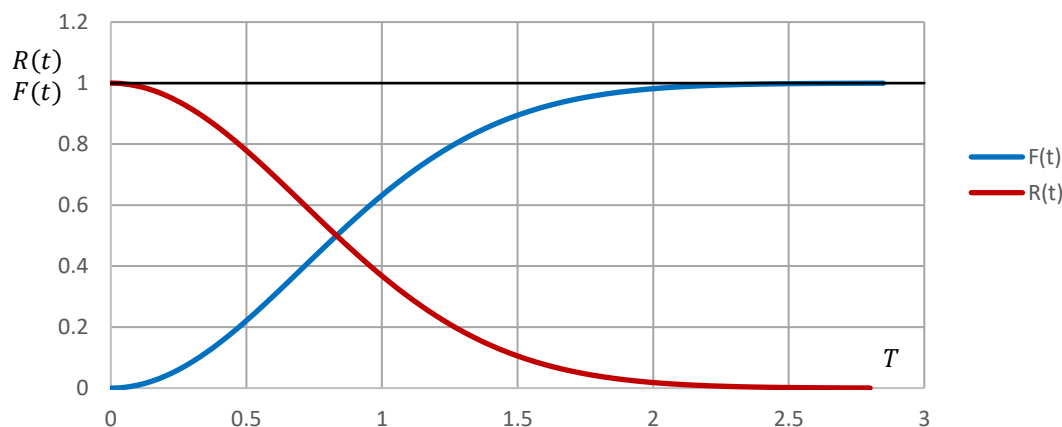


Fig. 1.1 Relația dintre funcția de fiabilitate și funcția de nonfiabilitate

Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare, $f(t)$, reprezintă prin definiție limita raportului dintre probabilitatea de defectare în intervalul $(t, t + \Delta t)$ și mărimea intervalului, când $\Delta t \rightarrow 0$, și are expresia:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pr(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Proprietățile densității de probabilitate a timpului de funcționare sunt:

- $f(t) > 0$;
- $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$.

Densitatea de probabilitate a timpului de bună funcționare:

- reprezintă raportul dintre numărul de defectări în unitatea de timp și numărul inițial de produse aflate în funcționare, furnizând astfel, o imagine mai clară asupra caracterului repartiției timpului de funcționare;
- permite aprecierea producției dacă se referă la produse realizate de o singură companie (omogenitatea producției);
- oferă informații privind omogenitatea solicitărilor, în utilizare, fiind utilă în planificarea activității de mentenanță, la produsele reparabile.

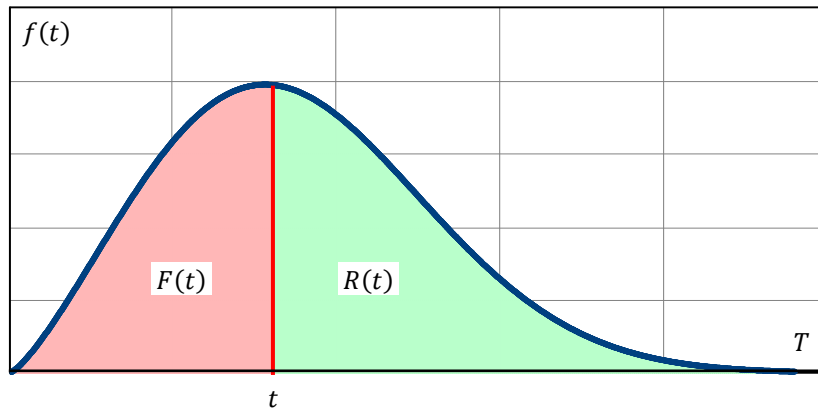
Alura funcției densitatea de probabilitate a timpului de bună funcționare, precum și relația dintre $F(t)$ și $R(t)$ sunt prezentate în fig. 1.2.

Rata (intensitatea) de defectare, $z(t)$, reprezintă probabilitatea ca un element care a funcționat fără defecțiuni până la momentul t să se defecteze în intervalul $(t, t + \Delta t)$:

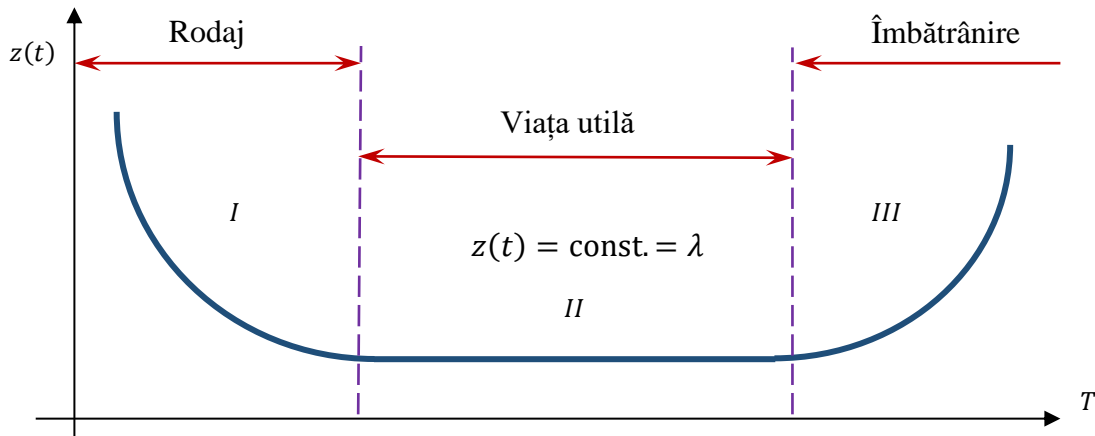
$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pr(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Rata de defectare:

- permite compararea nivelului de fiabilitate al produselor realizate de diferiți producători;
- permite compararea condițiilor de utilizare a aceluiași tip de produs;

Fig. 1.2 Relația dintre funcțiile $R(t)$, $F(t)$ și $f(t)$

- permite identificarea etapei din viața dispozitivelor și, implicit, a naturii defecțiunilor, fig. 1.3;
- se exprimă în defecțiuni/unitatea de timp.

Fig. 1.3 Alura funcției $z(t)$ pentru un produs complex

Indicatorii de fiabilitate, analizați mai sus, sunt legați între ei printr-o serie de relații de dependență. Aceasta este prezentată în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1 Relații între principalii indicatori de fiabilitate [POP 93]

Indicator	Exprimat în funcție de:			
	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$z(t)$
$F(t)$	-	$\int_0^t f(t) \cdot dt$	$1 - R(t)$	$1 - e^{-\int_0^t z(t) \cdot dt}$
$f(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	-	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$z(t) \cdot e^{-\int_0^t z(t) \cdot dt}$
$R(t)$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(t) \cdot dt$	-	$e^{-\int_0^t z(t) \cdot dt}$
$z(t)$	$\frac{1}{1 - F(t)} \cdot \frac{dF(t)}{dt}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t) \cdot dt}$	$-\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt}$	-

Modelarea fenomenelor reale de defectare a produselor și care utilizează aparatul matematic al teoriei fiabilității presupune asocierea dintre o lege de repartiție și un sistem real concret.

Considerăm o variabilă aleatorie T , la care legea repartiției este exprimată printr-o funcție dată: densitatea de probabilitate, $f(t, \theta)$, sau funcția de repartiție, $F(t, \theta)$.

Această funcție este [ISA 86]:

- a) *nespecificată* - dacă expresia matematică a repartiției nu se cunoaște;
- b) *specificată* - dacă conține anumiți parametri necunoscuți, θ , care intervin în expresia legii de repartiție;
- c) *complet specificată* - dacă la o funcție specificată se cunosc și valorile numerice ale tuturor parametrilor.

Operația prin care se determină valorile parametrilor, θ , ai modelului statistic, se numește *estimarea parametrilor*.

Pentru a efectua estimarea parametrilor, formula, regula aleasă sau statistica utilizată, având la bază un eșantion de volum n :

$$t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n,$$

prelevat aleatoriu din populația variabilei aleatorii T , se numește *estimator*.

Estimația este, la rândul său, o variabilă aleatorie dependentă de eșantion. Estimațiile pot fi [MCO 14]:

- a) *Estimații neparametrice* - dacă estimația se referă la probabilitatea necunoscută de apariție a fenomenului sau la valoarea unui indicator statistic și a cărei aplicare nu necesită identificarea legii de repartiție.
- b) *Estimație parametrică* - dacă estimația se referă la un parametru necunoscut al modelului statistic utilizat.
- c) *Estimație punctuală* - dacă parametrul necunoscut al populației se estimează printr-o valoare numerică, calculată pe baza unui estimator de forma:

$$\hat{\theta} = g(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n, \theta). \quad (1.6)$$

- d) *Estimație cu interval de încredere* - dacă se stabilește un interval care să includă, cu o probabilitate dată, $(1 - \alpha)$, valoarea adevărată a parametrului necunoscut.

Construcția acestor intervale de încredere presupune cunoașterea repartiției statistice a estimației punctuale, pentru parametrul estimat: $f(\hat{\theta}|\theta)$. Intervalele de încredere pot fi, fig. 1.4:

a. *Unilaterale cu o limită inferioară, $\hat{\theta}_L$* . Acestea se obțin ca soluție a ecuației:

$$Pr(\hat{\theta}_L \geq \theta) = 1 - \alpha, \quad (1.7)$$

iar intervalul unilateral cu limită superioară rezultă sub forma:

$$\hat{\theta}_L \leq \theta < \infty.$$

b. *Unilaterale cu o limită superioară, $\hat{\theta}_U$* . Acestea se obțin ca soluție a ecuației:

$$Pr(\theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha, \quad (1.8)$$

iar intervalul unilateral cu limită inferioară rezultă sub forma:

$$-\infty < \theta \leq \hat{\theta}_U.$$

c. *Bilaterale simetrice*. Acestea se obțin ca soluție a ecuației:

$$Pr(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha, \quad (1.9)$$

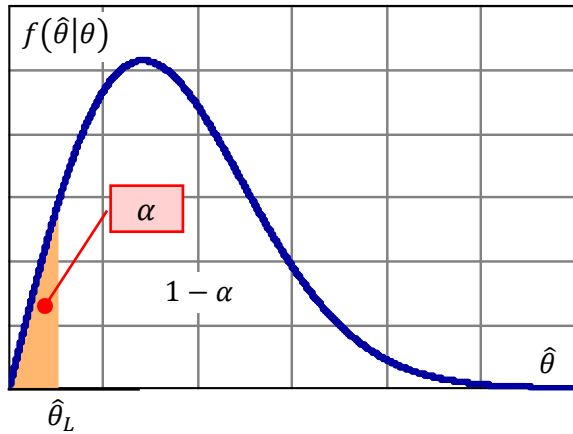
iar intervalul bilateral simetric rezultă sub forma:

$$\hat{\theta}_L < \theta \leq \hat{\theta}_U,$$

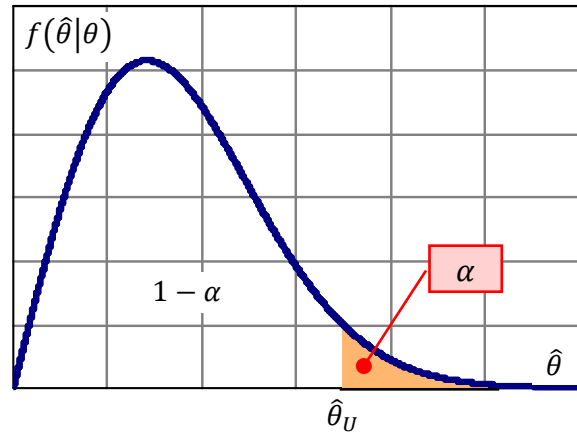
în care:

$1 - \alpha$ – reprezintă nivelul de încredere;

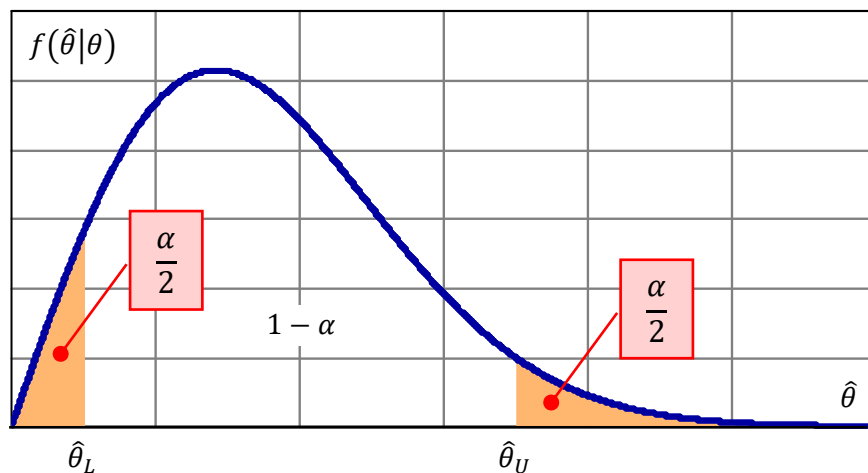
α – reprezintă nivelul de semnificație.



a. Intervalul de încredere unilateral cu o limită inferioară, $\hat{\theta}_L$



b. Intervalul de încredere unilateral cu o limită superioară, $\hat{\theta}_U$



c. Intervalul de încredere bilaterale simetric, $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$

Fig. 1.4 Tipuri de intervale de încredere [MCO 14]

Pentru estimarea parametrilor care caracterizează diferitele modele statistice s-au pus la punct mai multe metode de estimare. Clasificarea acestor metode este prezentată în fig. 1.5.

Aprecierea calității estimatorilor se realizează, de regulă, pe baza unor criterii statistice, definite ca *proprietăți ale estimatorilor* [MON 11]:

1. *Nedeplasarea*. Estimația se numește nedeplasată, dacă valoarea medie teoretică coincide cu valoarea adevărată a parametrului:

$$E(\hat{\theta}) = \theta. \quad (1.10)$$

Deplasarea estimației - $B(\hat{\theta})$, se definește ca fiind:

$$B(\hat{\theta}) = |E(\hat{\theta}) - \theta|. \quad (1.11)$$

2. *Consistența*. O estimatie se numește consistentă, dacă ea converge în probabilitate către valoarea adevărată a parametrului, adică:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1, \forall \epsilon > 0. \quad (1.12)$$

3. *Eroarea medie pătratică (Mean Squared Error), $MSE(\hat{\theta})$* . Această proprietate definită ca:

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = V(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2, \quad (1.13)$$

și reflectă discrepanța dintre valoarea reală a parametrului și estimatia lui, cuantificată prin dispersie, $V(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\}$ și deplasare, $[B(\hat{\theta})]^2$.

4. *Eficiența*. O estimatie $\hat{\theta}$ a parametrului θ se numește *eficientă*, dacă este nedeplasată și are dispersia minimă.

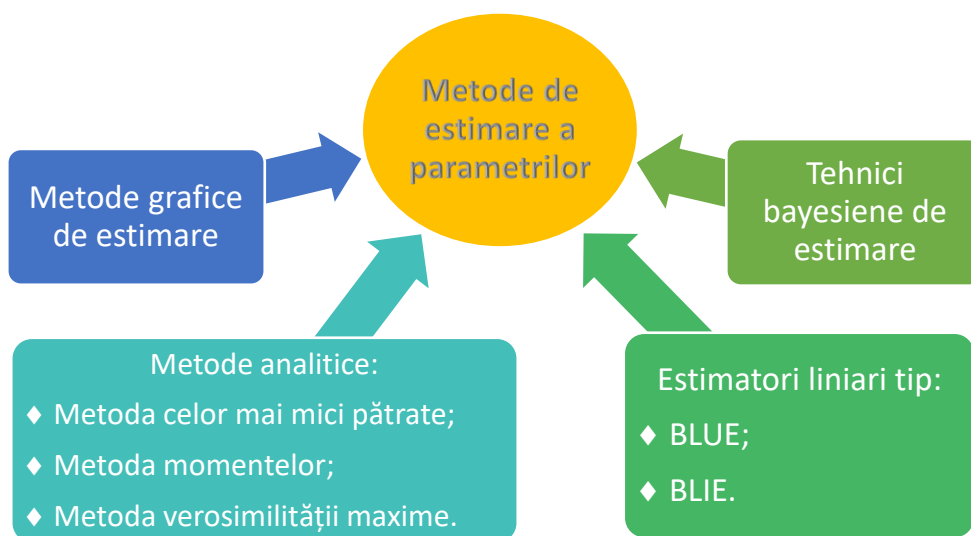


Fig. 1.5 Clasificarea metodelor de estimare parametrică

Metode grafice de stimare

Metoda grafică de estimare a parametrilor modelului statistic se bazează pe utilizează *rețelelor de probabilitate*. Procedura generală de construire a rețelelor de probabilitate constă în liniarizarea convenabilă a funcției de repartiție, a modelului statistic, presupus adecvat reprezentării datelor.

Rețeaua de probabilitate reprezintă o coală gradată după un anumit trasaj, pe cele două axe de coordonate, pe care se reprezintă punctele $[x_{(i)}, Fn(x_{(i)})]$, unde $x_{(i)}$ reprezintă statisticile de ordine ale valorilor observate, ale eșantionului de volum n , ($i = \overline{1, n}$), iar $Fn(x_{(i)})$ reprezintă valorile probabilităților corespunzătoare.

Printre punctele astfel obținute, se trasează o dreaptă. Valorile estimate ale parametrilor repartiției se obțin prin intermediul acestei drepte, direct de pe rețeaua de probabilitate în funcție de proprietățile modelului statistic estimat.

Valorile aproximative ale lui $Fn(x_{(i)})$ se determină, utilizând una din relațiile [MON 11], [KEC 91], [DEV 10]:

$$Fn(x_{(i)}) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}, \quad (1.14)$$

sau,

$$Fn(x_{(i)}) = \frac{i}{n+1}. \quad (1.15)$$

Valorile exacte ale probabilităților mediane, $Fn(x_{(i)})$ se pot calcula rezolvând ecuația [REL 05]:

$$\sum_{k=i}^n C_n^k \cdot Fn(x_{(i)})^k \cdot [1 - Fn(x_{(i)})]^{n-k} = 0.50. \quad (1.16)$$

Deoarece metoda de rezolvare a ecuației anterioare este laborioasă și presupune utilizarea metodelor numerice de calcul, pentru aplicațiile practice se preferă determinarea unor valori aproximative obținute prin aplicarea unei duble transformări, a relației (1.16), obținând în prima fază repartiția Beta corespunzătoare și apoi repartiția F , Fisher-Snedecor [KEC 93]:

$$Fn(x_{(i)}) = \frac{1}{1 + \frac{n-i+1}{i} \cdot F_{0.50, 2 \cdot (n-i+1), 2 \cdot i}}. \quad (1.17)$$

Intervalul de încredere bilateral, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, al dreptei reprezentate pe rețeaua de probabilitate, se poate obține prin trasarea curbelor corespunzătoare punctelor $[x_{(i)}, Fn_L(x_{(i)})]$ și $[x_{(i)}, Fn_U(x_{(i)})]$. Valorile probabilităților $Fn_L(x_{(i)})$ și $Fn_U(x_{(i)})$ se obțin prin utilizarea relațiilor [KEC 93]:

$$Fn_L(x_{(i)}) = \frac{1}{1 + \frac{n-i+1}{i} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-i+1), 2 \cdot i}}. \quad (1.18)$$

și

$$Fn_U(x_{(i)}) = \frac{1}{1 + \frac{n-i+1}{i} \cdot F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-i+1), 2 \cdot i}}. \quad (1.19)$$

Intervalele de încredere unilaterale se construiesc conform figurii 1.4.

Metoda grafică de estimare prezintă o serie de avantaje [MCO 10]:

- este rapidă;
- se poate constitui într-un test de concordanță, vezi fig. 1.6. Dacă punctele de pe rețea au o tendință liniară de dispunere, putem afirma că modelul statistic ales este adecvat modelării datelor de eșantionaj. Pentru modele statistice neadecvate se observă că dispunerea punctelor poate fi concavă, convexă sau sub formă de S

și o serie de dezavantaje:

- nu este aplicabilă la volume mari de eșantion;
- prezintă un grad mare de subiectivism la trasarea drepte printre puncte, ceea ce conduce la diferențe între valorile estimate ale parametrilor.

Metoda celor mai mici pătrate

Ca și în cazul metodelor grafice de estimare, metoda celor mai mici pătrate se bazează pe liniarizarea convenabilă a funcției de repartiție a modelului statistic [WIE 83].

Această metodă constă în determinarea parametrilor unei drepte, A și B , vezi fig. 1.7:

$$y = A + B \cdot x \quad (1.20)$$

ce trece printre punctele care conțin observațiile statistice, astfel încât suma pătratelor abaterilor

existente între dreapta astfel trasată și mulțimea punctelor, ε_i , să fie minimă (Principiul Gauss-Legendre):

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (A + B \cdot x_i - y_i)^2 = \min. \quad (1.21)$$

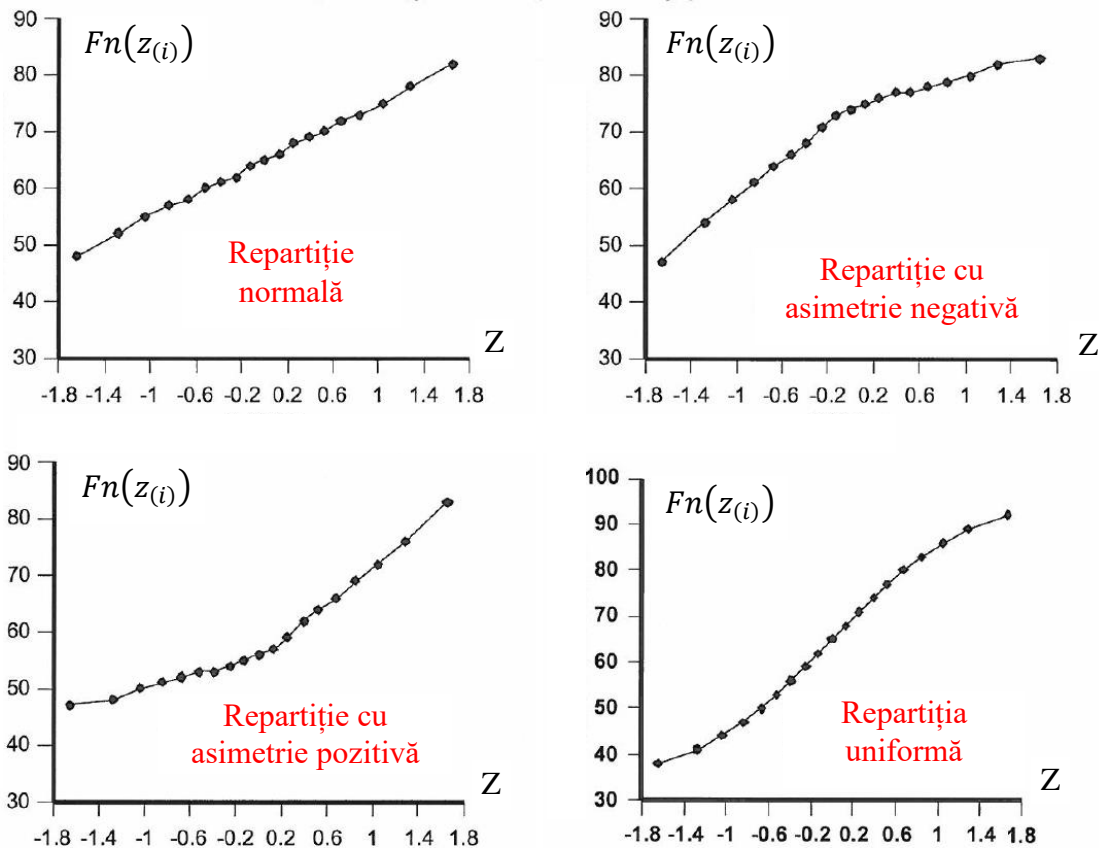


Fig. 1.6 Modul de dispunere al datelor experimentale pe rețeaua de probabilitate normală [MCO 14]

Punând condiția de minim relației (1.21) rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^n (A + B \cdot x_i - y_i) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n (A + B \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (1.22), se obțin estimările \hat{A} și \hat{B} ale parametrilor dreptei (1.20):

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ \hat{B} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases} \quad (1.23)$$

Aceste relații, (1.23), împreună cu ecuațiile rezultate din liniarizarea modelului statistic permit estimarea parametrilor repartițiilor.

De asemenea, valorile ordonatelor y_i care intervin în ecuațiile (1.21), (1.22) și (1.23) se determină prin intermediul ecuațiilor rezultate din liniarizarea modelului statistic folosind una din ecuațiile (1.14), (1.15), (1.16), sau (1.17).

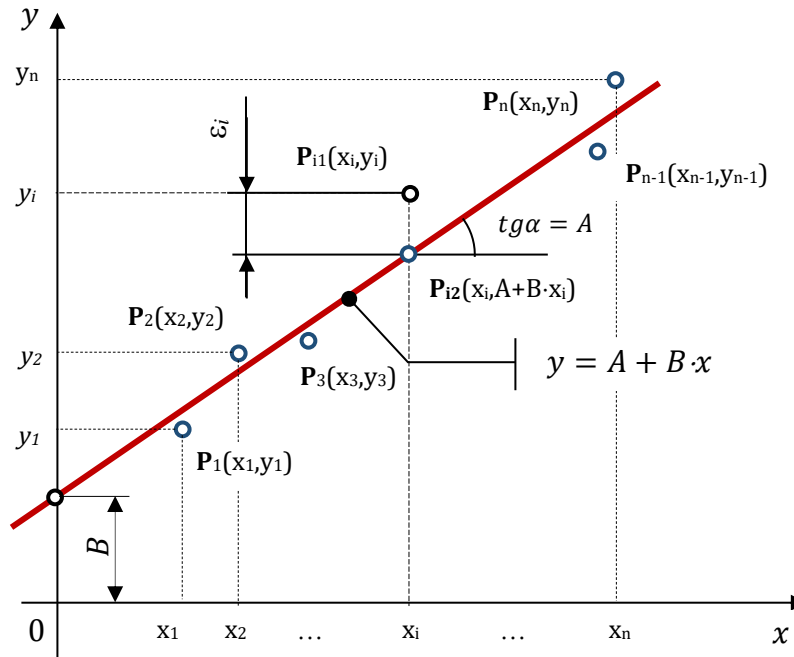


Fig. 1.7 Utilizarea principiului celor mai mici pătrate în cazul regresiei liniare [MCO 04b]

Metoda momentelor

Metoda momentelor [KEC 94], a fost dezvoltată de *K. Pearson* și constă în egalarea momentelor teoretice, μ_q , până la ordinul q , ale repartiției $f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_q)$, cu momentele de eșantionaj, m_q :

$$\mu_i = m_i, i = \overline{1, q}. \quad (1.24)$$

Se obține astfel un sistem de ecuații a cărui rezolvare furnizează valorile estimate ale parametrilor, $\hat{\theta}_i, i = \overline{1, q}$.

Estimatorii punctuali obținuți prin metodă momentelor prezintă următoarele proprietăți [MCO 14]:

1. Acest procedeu de estimare este o metoda intuitivă, având o slabă justificare teoretică.
2. Metoda nu se poate utiliza la estimarea parametrilor în cazul eșantioanelor incomplete.
3. Nu se recomandă utilizarea acestei metode pentru modele statistice care prezintă asimetrie pronunțată.
4. Nu se recomandă utilizarea acestei metode la modele statistice care au mai mult de doi parametri necunoscuți, întrucât erorile introduse sunt, adesea, foarte mari.
5. Estimațiile obținute prin metoda momentelor nu prezintă proprietatea numită *eficientă*. De aceea, nu se recomandă utilizarea lor decât în absența altor estimatori.

Metoda verosimilității maxime

Aceasta metodă a fost dezvoltată de *R.A. Fisher*, care a introdus conceptul de funcție de verosimilitate pentru un eșantion de n observații independente [MAN 74]:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \theta_j) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_j), j = \overline{1, q}. \quad (1.25)$$

Principiul metodei verosimilității maxime constă în determinarea valorilor estimate ale parametrilor

necunoscuți $\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_q, j = \overline{1, q}$, din condiția de maxim al funcției de verosimilitate, construită pe baza valorilor de eșantionaj, $x_i, i = \overline{1, n}$.

Pentru comoditatea calcului se obișnuiește a se lucra cu logaritmul funcției de verosimilitate:

$$\ln[\mathcal{L}(x_i, \theta_j)] = \ln f(x_1, \theta_j) + \ln f(x_2, \theta_j) + \dots + \ln f(x_n, \theta_j), \quad (1.26)$$

$$i = \overline{1, n} \text{ și } j = \overline{1, q}.$$

Estimațiile de verosimilitate maximă reprezintă, deci, soluțiile următorului sistem de ecuații normale:

$$\frac{\partial \ln[\mathcal{L}(x_i, \theta_j)]}{\partial \theta_j} = \frac{1}{f(x_1, \theta_j)} \cdot \frac{\partial \ln f(x_1, \theta_j)}{\partial \theta_j} + \dots + \frac{1}{f(x_n, \theta_j)} \cdot \frac{\partial \ln f(x_n, \theta_j)}{\partial \theta_j}, \quad (1.27)$$

$$i = \overline{1, n} \text{ și } j = \overline{1, q}.$$

Funcția de verosimilitate pentru un eșantion de n observații independente, dată de ecuația (1.25) este valabilă doar pentru cazul variabilelor aleatorii continue. În cazul variabilelor aleatorii discrete, funcția de verosimilitate devine [GIB 76]:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \theta_j) = \prod_{i=1}^n Pr(X = x_i, \theta_j), \quad (1.28)$$

$$i = \overline{1, n} \text{ și } j = \overline{1, q},$$

prin înlocuirea funcției densitate de probabilitate cu cea a funcției de probabilitate.

Estimatorii punctuali obținuți prin metoda verosimilității maxime prezintă următoarele proprietăți [MCO 14]:

1. sunt consistenți și asimptotic eficienți;
2. prezintă proprietatea de suficiență;
3. sunt asimptotic nedeplasați;
4. variabila aleatorie $\sqrt{n} \cdot (\hat{\theta} - \theta)$ este asimptotic normal repartizată cu media zero [GER89], [CRO 95].

Pentru a determina dispersia variabilei aleatorii $\sqrt{n} \cdot (\hat{\theta} - \theta)$ se utilizează matricea informației Fisher:

$$\mathbf{I}_F(\theta) = \|I_{i,j}(\theta)\|, i, j = \overline{1, q},$$

în care:

$$I_{i,j}(\theta) = E \left[- \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}(x, \theta_j)}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j} \right].$$

Rezultă valoarea dispersiei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot V(\hat{\theta}_j) = \left\| -E \left[\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}(x_i, \theta_j)}{\partial \theta_j^2} \right] \right\|_{\theta_j = \hat{\theta}_j}^{-1}, j = \overline{1, q}. \quad (1.29)$$

Utilizarea acestei proprietăți face posibilă construirea intervalelor de încredere, aproximative, pentru valorile estimate ale parametrilor, $\hat{\theta}_j$, în cazul eșantioanelor de volum $n \geq 25$.

5. Ecuația [GER89], [CRO 95]:

$$-2 \cdot \ln \left(\frac{\mathcal{L}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \theta_j)}{\mathcal{L}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, \hat{\theta}_j)} \right) \geq \chi_{1-\alpha, q}^2, \quad (1.30)$$

$$i = \overline{1, n} \text{ și } j = \overline{1, q},$$

permite construirea intervalelor de încredere, aproximative, pentru valorile estimate ale parametrilor, $\hat{\theta}_j$, în cazul eşantioanelor de volum $n \geq 15$.

În cazul eşantioanelor de volum mic, utilizarea proprietăților asimptotice ale estimațiilor de verosimilitate maximă, la determinarea limitelor de încredere nu este recomandată, întrucât intervalele de încredere rezultă cu dimensiuni foarte mari.

6. În cazul eşantioanelor de volum mic, incomplete, estimațiile de verosimilitate maximă sunt deplasate.
7. Se recomandă pentru estimarea parametrică a modelelor cu unul sau doi parametri necunoscuți. În cazul mai multor parametri, apar complicații care fac ca sistemul de ecuații să fie dificil de rezolvat [KEC 93].
8. Pentru anumite combinații ale valorilor de eşantionaj, sistemul ecuațiilor de verosimilitate maximă nu poate fi rezolvat [KEC 93].

Estimatori liniari

Metodele de estimare dezvoltate având la baza teoria statisticilor de ordine sunt aplicabile repartițiilor cu forma generală:

$$f(x, \delta, \gamma) = \frac{1}{\delta} \cdot g\left(\frac{x - \gamma}{\delta}\right), \quad (1.31)$$

adică repartițiilor caracterizate prin existența parametrilor de localizare γ și de scală δ .

Au fost dezvoltați mai mulți estimatori liniari [KEC 91], [MAN 74], [ISA 83], însă, în teoria fiabilității s-au impus doar doi, datorită proprietăților lor superioare:

- ✓ *Estimatori liniari tip BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)*

Acest tip de estimator a fost obținut prin rezolvarea modelului liniar general al statisticilor de ordine pe baza teoriei Gauss-Markov.

Estimarea parametrilor se realizează prin intermediul sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{BLUE} = b(1, n, r) \cdot x_1 + b(2, n, r) \cdot x_2 + \dots + b(r, n, r) \cdot x_r \\ \hat{\delta}_{BLUE} = c(1, n, r) \cdot x_1 + c(2, n, r) \cdot x_2 + \dots + c(r, n, r) \cdot x_r \end{cases} \quad (1.32)$$

Valorile coeficienților numerici $b(i, n, r)$ și $c(i, n, r)$ care intervin în relația (1.32) sunt date în [KEC 91], [KEC 93] și [MAN 74].

Observații [MAN 74]:

- 1) Estimatorii obținuți cu relațiile (1.32) au proprietatea că variabila aleatorie $\hat{\delta}_{BLUE}/\delta$ este independentă de parametrii repartiției, depinzând doar de volumul eşantionului și de nivelul de cenzurare. Repartiția acestei variabile aleatorii se obține prin simulare numerică Monte-Carlo.
 - 2) Acești estimatori nu pot fi utilizați, la prelucrarea rezultatelor experimentale, decât în cazul eşantioanelor cenzurate sau complete.
- ✓ *Estimatori liniari de tip BLIE (Best Linear Invariant Estimator)*

Acest tip de estimator a fost obținut pe baza estimatorului BLUE, din condiția de minimizare a erorii medii pătratice.

Estimarea parametrilor se realizează direct, pe baza statisticilor de ordine, folosind relațiile:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{BLIE} = A(n, r, 1) \cdot x_1 + A(n, r, 2) \cdot x_2 + \dots + A(n, r, r) \cdot x_r \\ \hat{\delta}_{BLIE} = C(n, r, 1) \cdot x_1 + C(n, r, 2) \cdot x_2 + \dots + C(n, r, r) \cdot x_r \end{cases} \quad (1.33)$$

Observații [MAN 74]:

- 1) Estimatorii obținuți cu relațiile (1.33) au proprietatea că variabilele aleatorii $\hat{\delta}_{BLIE}/\delta$ și $(\hat{Y}_{BLIE} - \gamma)/\hat{\delta}_{BLIE}$ sunt independente de parametrii repartiției. Acestea depind doar de volumul eșantionului și de nivelul de cenzurare. Ele se pot utiliza la construirea intervalelor de încredere, corectarea deplasărilor și verificarea ipotezelor statistice referitoare la parametrii repartiției. Repartițiile acestor variabile aleatorii se obțin prin simulare numerică Monte-Carlo.
- 3) Acești estimatori nu pot fi utilizați decât în cazul datelor obținute din încercări cenzurate sau complete.

Studiile comparative efectuate [KEC 93], [MAN 74], privind eficiența estimatorilor analizați anterior (în sensul apropierea valorii estimate punctual de valoarea adevărată a parametrului necunoscut), în condițiile eșantioanelor de volum redus, demonstrează superioritatea estimatorilor obținuți prin metoda verosimilității maxime și a celor liniari tip BLIE.

Tehnici bayesiene de estimare parametrică

Metodele de estimare care iau în considerare întreaga informație disponibilă asupra fiabilității unui sistem, indiferent dacă această informație este sau nu de natură experimentală, se numesc metode bayesiene.

Deși, foarte controversată de statisticieni și de specialiștii în fiabilitate [CAN 70], o lungă perioadă de timp, această metodă a reușit să se dezvolte și să ocupe un loc important în cadrul actual al fiabilității și teoriei deciziei, ea fiind adecvată în mod deosebit situațiilor în care volumul de rezultate experimentale este redus.

La baza acestei metode se află teorema lui Bayes [KEC 82]:

$$Pr(H_i|S) = \frac{Pr(H_i) \cdot Pr(S|H_i)}{Pr(S)}, Pr(S) \neq 0, Pr(S) = \sum_{i=1}^m Pr(H_i) \cdot Pr(S|H_i). \quad (1.34)$$

Fie $(H_i)_{i=1, \dots, m}$, o mulțime de cauze (ipoteze), cu probabilitățile $Pr(H_i)$ cunoscute. Dacă S reprezintă un eveniment oarecare și probabilitățile condiționale $Pr(S|H_i)$ sunt cunoscute, atunci, probabilitatea evenimentului H_i , $Pr(H_i|S)$, știind că S s-a realizat, este dată de formula lui Bayes.

În relația (1.34), semnificația factorilor este următoarea:

$Pr(H_i)$ - reprezintă probabilitatea apriorică a ipotezei H_i ;

$Pr(H_i|S)$ - reprezintă probabilitatea a posteriori; știind că evenimentul S s-a produs, $Pr(H_i|S)$ indică probabilitatea ca acest fapt să se datoreze cauzei H_i ;

$Pr(S|H_i)$ - reprezintă probabilitatea condiționată. Aceasta probabilitate mai este cunoscută și sub denumirea de verosimilitatea eșantionului.

$Pr(S)$ - reprezintă probabilitatea marginală.

Pentru cazul continuu, teorema lui Bayes poate fi scrisă sub forma [REL 05]:

$$Pr(\theta|S) = \frac{g(\theta) \cdot h(S|\theta)}{\int_0^{\infty} g(\theta) \cdot h(S|\theta) d\theta}, \quad (1.35)$$

în care:

$g(\theta)$ - reprezintă funcția densitate de probabilitate apriorică a variabilei aleatorii θ ;

$Pr(\theta|S)$ - reprezintă repartiția a posteriori a variabilei aleatorii θ ;

$h(S|\theta)$ - reprezintă repartiția evenimentului S condiționată de θ ;

$\int_0^\infty g(\theta) \cdot h(S|\theta)d\theta$ - reprezintă repartiția marginală a evenimentului S .

Procedura utilizată pentru obținerea estimației punctuale, $\hat{\theta}_B$, a parametrului θ , presupune parcurgerea următoarelor etape [MON 03], [REL 05], [KEC 82]:

I. Alegerea modelului repartiției condiționale (a tipului de proces analizat) – $f(t|\theta)$.

II. Specificarea completă a repartiției apriorice, $g(\theta)$.

Succesul utilizării tehnicilor de estimare bayesiene depinde de atenția acordată acestei operații, deoarece repartiția apriorică înglobează toate informațiile disponibile referitoare la variabila aleatorie, θ , ce urmează a fi estimată. Prin utilizarea acestei repartiții, informația apriorică privind parametrul analizat, care în mod uzual este de natură calitativă și mai rar cantitativă, este convertită în mărimi probabiliste cantitative.

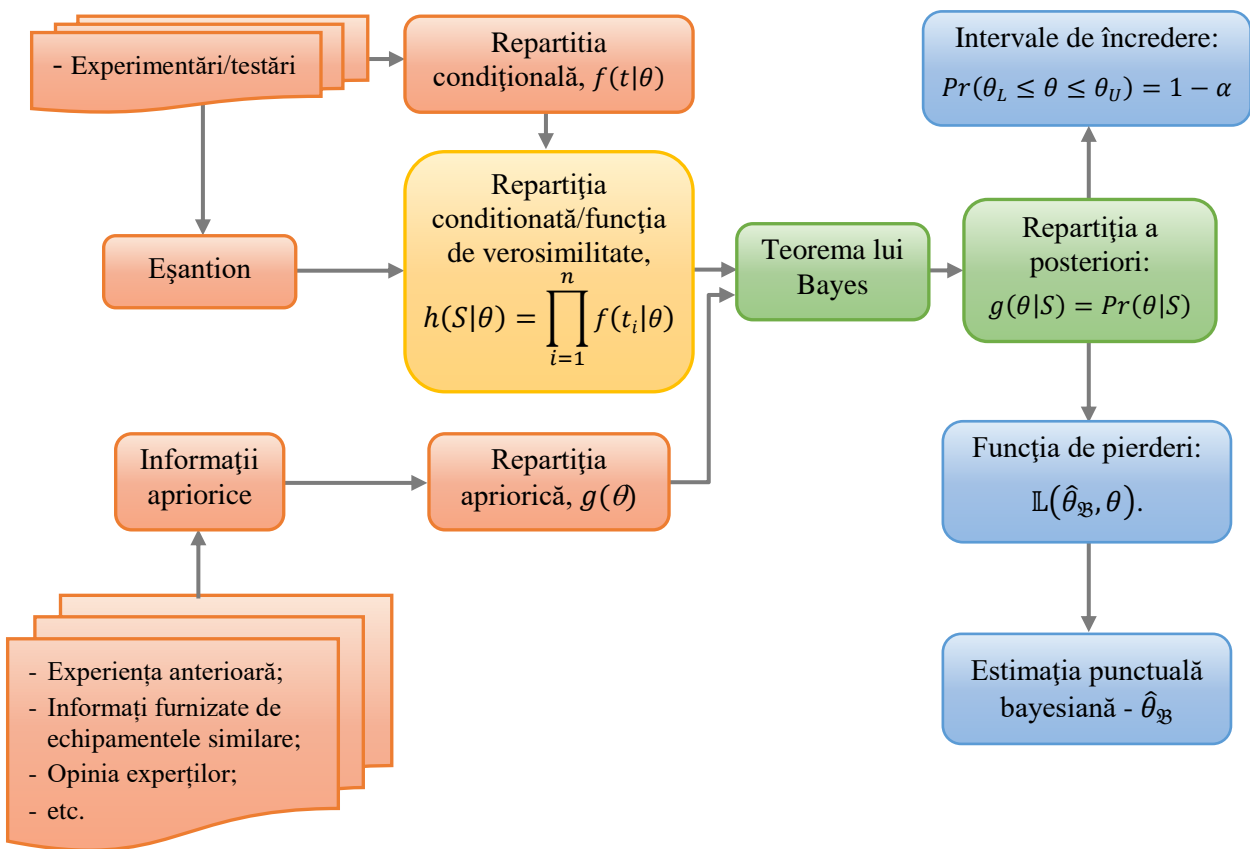


Fig. 1.8 Metodologia tehnicilor de estimare bayesiană [KEC 82]

Diferența esențială între tehnicile bayesiene și metodele clasice de estimare constă în modul de apreciere a parametrilor necunoscuți ce urmează a fi estimați. Dacă în cazul metodelor clasice de estimare aceștia sunt considerați constanți cu valoare necunoscută, în cazul metodelor bayesiene este considerat caracterul stohastic al parametrilor, având asociată o densitate de probabilitate sub forma repartiției apriorice.

Pentru exprimarea informației apriorice se preferă utilizarea repartițiilor apriorice conjugate bayesian. Această metodă are avantajul că oferă o soluție matematică simplă, ușor de manipulat, deoarece familia repartițiilor conjugate bayesian conduce, prin aplicarea teoremei lui Bayes, la același tip de repartiție a posteriori, dar cu parametri diferiți.

III. Determinarea repartiției condiționale, $h(S|\theta)$. Această repartiție reprezintă densitatea de probabilitate multidimensională a valorilor de eșantionaj și reprezintă, de fapt, funcția de

verosimilitate a rezultatelor experimentale actuale construită, având la bază repartiția condițională [CAN 70], [CAN 77]:

$$h(S|\theta) = \mathcal{L}(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n, \theta_j) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\theta). \quad (1.36)$$

IV. Aplicarea teoremei lui Bayes și obținerea repartiției a posteriori, $\Pr(\theta|S)$, ca rezultat al modificării informațiilor disponibile utilizate, la impactul cu informațiile experimentale obținute în urma încercărilor de fiabilitate.

V. Determinarea estimațiilor punctuale bayesiene ale parametrilor analizați.

Această operație presupune adoptarea unei funcții de pierderi, $\mathbb{L}(\hat{\theta}_{\mathcal{B}}, \theta)$ care să exprime incertitudinea estimării [CAN 70], [CAN 77].

VI. Determinarea intervalelor bayesiene de încredere, corespunzătoare unui nivel de încredere $1 - \alpha$. Acestea se construiesc folosind ecuația de probabilitate (1.9), iar limitele intervalului de încredere (θ_L și θ_U) se determină pe baza repartiției a posteriori, pentru parametrul analizat $g(\theta|S) = Pr(\theta|S)$, utilizând ecuațiile:

$$\begin{cases} \int_0^{\theta_L} g(\theta|S) \cdot d\theta = \frac{\alpha}{2} \\ \int_{\theta_U}^{+\infty} g(\theta|S) \cdot d\theta = \frac{\alpha}{2} \end{cases}. \quad (1.37)$$

Informațiile privind fiabilitatea se obțin, în principal, prin urmărirea comportării produselor în condiții reale de funcționare. Pe lângă acestea, informații privind fiabilitatea se pot obține în urma încercărilor efectuate pe standuri, în laboratoare adecvate. Se preferă organizarea încercărilor pe standuri deoarece acestea permit asigurarea unor condiții identice de funcționare, a produselor testate, spre deosebire de încercările în condiții reale de funcționare.

Prin test (încercare) de fiabilitate se înțelege un experiment organizat în vederea determinării indicatorilor de fiabilitate pentru un produs bine precizat. După procedura de încercare, încercărilor efectuate pe standuri pot fi [MAR 95], [POP 93], [ISA 86]:

a. Încercări complete

Se consideră încercări complete acele încercări efectuate până la defectarea tuturor celor n produse supuse încercării. Acest tip de încercare se practică foarte rar deoarece presupune o durată foarte mare a încercării. Încercările complete se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n$.
- Timpul de funcționare cumulat al celor n elemente supuse încercării:

$$\mathcal{T}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n t_i. \quad (1.38)$$

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: \mathcal{T}_{Σ} și t_n .

b. Încercări cenzurate

O încercare se consideră cenzurată la nivelul r , dacă se încheie la momentul t_r , de apariție a celei de-a r -a defectări (numărul de deteriorări r fiind stabilit anterior începerii încercărilor). Se deosebesc două categorii de încercări cenzurate:

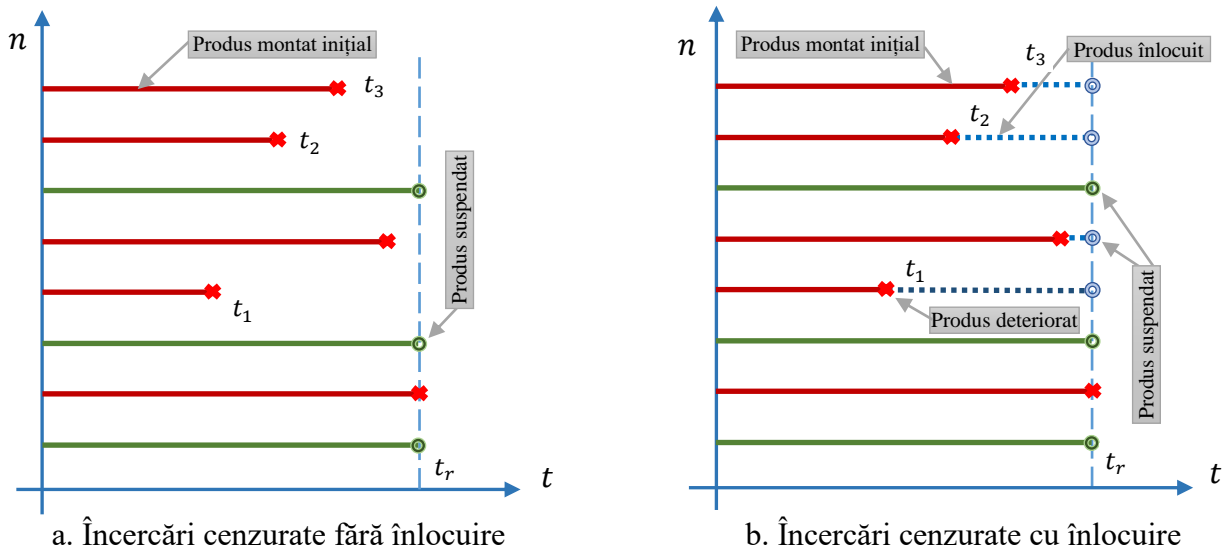


Fig. 1.9 Schema desfășurării încercărilor cenzurate

b1. *Încercări cenzurate fără înlocuire*, fig. 1.9a, se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n$.
- Timpul de funcționare cumulată a elementelor supuse încercării:

$$\mathcal{T}_Y = \sum_{i=1}^{r-1} t_i + (n - r + 1) \cdot t_r \quad (1.39)$$

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: \mathcal{T}_Y și t_r .

b2. *Încercări cenzurate cu înlocuire*, fig. 1.9b, se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n + r - 1$.
- Timpul de funcționare cumulată a elementelor supuse încercării:

$$\mathcal{T}_Y = n \cdot t_r. \quad (1.40)$$

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: \mathcal{T}_Y și t_r .

c. Încercări trunchiate

La acest test de fiabilitate încercarea se încheie după parcurgerea unei durate t_c , stabilită anterior. Ca și în cazul precedent încercările trunchiate pot fi:

c1. *Încercări trunchiate fără înlocuire*, fig. 1.10a, se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n$.
- Timpul de funcționare cumulată a elementelor supuse încercării:

$$\mathcal{T}_Y = \sum_{i=1}^r t_i + (n - r) \cdot t_c, \quad (1.41)$$

în care r reprezintă numărul de defectări care se produc în intervalul de timp $(0, t_c)$.

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: \mathcal{T}_Y și r .

c2. *Încercări trunchiate cu înlocuire*, fig. 1.10b, se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n + r$.
- Timpul de funcționare cumulată a elementelor supuse încercării:

$$\mathcal{T}_Y = n \cdot t_c. \quad (1.42)$$

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: N și r .

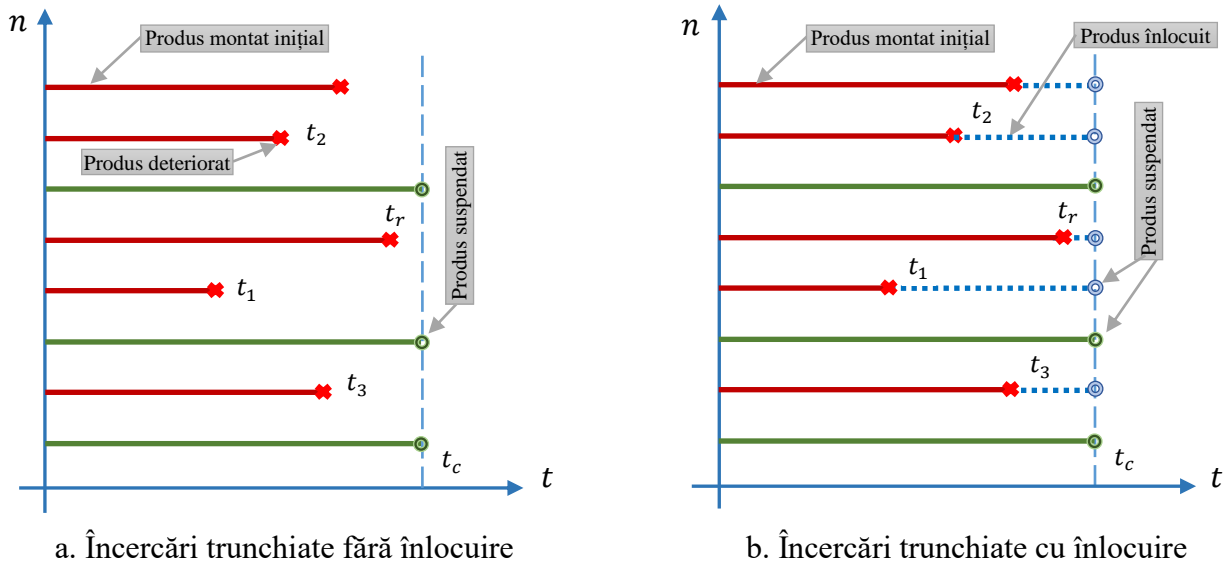


Fig. 1.10 Schema desfășurării încercărilor trunchiate

c2. Încercări trunchiate cu înlocuire, fig. 1.10b, se caracterizează prin:

- Numărul total de elemente testate este: $N = n + r$.
- Timpul de funcționare cumulat a elementelor supuse încercării:

$$\mathcal{T}_Y = n \cdot t_c. \quad (1.42)$$

- Variabilele aleatorii ale încercării sunt: N și r .

1.2 CERCETĂRI PRIVIND ESTIMAREA PARAMETRILOR ȘI INDICATORILOR DE FIABILITATE ÎN CAZUL REPARTIȚIEI WEIBULL

O variabilă aleatorie continuă T , este Weibull triparametric repartizată cu parametrii β, η și γ , dacă funcția densitate de probabilitate este de forma [KRI 06], [HAH 67], [MCC 12]:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}, \text{ pentru } T > \gamma; \beta, \eta > 0 \quad (1.43)$$

și se notează, $X \sim \mathcal{W}(t, \beta, \eta, \gamma)$.

Alura funcției densitate de probabilitate, a repartiției Weibull, pentru diferite valori ale celor trei parametri, este prezentată în fig. 1.11.

Se constată că existența celor trei parametri, a căror semnificație este:

- β , reprezintă parametrul de formă;
- η , reprezintă parametrul de scală;
- γ , reprezintă parametrul de localizare (poziționare),

conferă acestui model statistic o versatilitate deosebită.

În tabelul 1.2 sunt prezentate expresiile indicatorilor de fiabilitate ai repartiției Weibull triparametrice.

Tabelul 1.2 Indicatorii de fiabilitate ai repartiției Weibull triparametrice

Nr. crt.	Indicatorul de fiabilitate	Expresia matematică
1.	Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare	$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$, pentru $T > \gamma, \beta > 0, \eta > 0$
2.	Funcția de fiabilitate	$R(t) = Pr(T > t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$
3.	Funcția de nonfiabilitate	$F(t) = Pr(T \leq t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$
4.	Rata (intensitatea) de defectare	$z(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$
5.	Media variabilei aleatorii	$\mu_T = \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$
6.	Dispersia variabilei aleatorii	$\sigma_T^2 = \eta^2 \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$
7.	Funcția gama	$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$

Printr-o schimbare a variabilei aleatorii:

$$X = T - \gamma,$$

repartiția Weibull triparametrică devine repartiție Weibull biparametrică, $W(x, \beta, \eta)$.

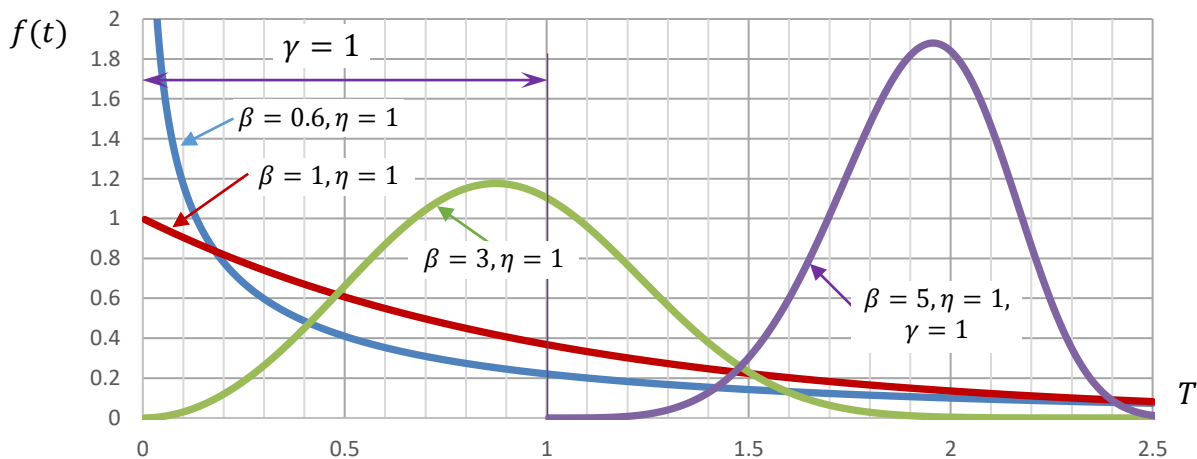


Fig. 1.11 Alura funcției densitate de probabilitate, a repartiției Weibull [MCO 10]

În tabelul 1.3 sunt prezentate expresiile indicatorilor de fiabilitate ai repartiției Weibull biparametrice.

Inițial, repartiția Weibull a apărut ca un model ce descrie rezistența la oboseală a oțelului. De la utilizările inițiale oferite de însuși W. Weibull, această repartiție și-a găsit numeroase aplicații în cele mai diverse domenii de activitate, deoarece este o repartiție flexibilă ce depinde de doi/trei parametri și conține drept cazuri particulare multe alte modele, putând avea asimetrii atât pozitive cât și negative.

Tabelul 1.3 Indicatorii de fiabilitate ai repartiției Weibull biparametrice [MCO 10]

Nr. crt.	Indicatorul de fiabilitate	Expresia matematică
1.	Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare	$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta},$ pentru $x \geq 0, \beta > 0, \eta > 0$
2.	Funcția de fiabilitate	$R(x) = Pr(X > x) = e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$
3.	Funcția de nonfiabilitate	$F(x) = Pr(X \leq x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$
4.	Rata (intensitatea) de defectare	$z(x) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1}$
5.	Media variabilei aleatorii	$\mu_T = \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$
6.	Dispersia variabilei aleatorii	$\sigma_T^2 = \eta^2 \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$

Dintre domeniile în care repartiția Weibull și-a găsit aplicație, se pot enumera [MCO 14], [KEC 93], [KEC 94]:

- Rezistența la rupere, la coroziune, la uzură, la oboseală și la oboseala de contact a materialelor metalice și textile.
- Modelarea proprietăților materialelor: oțeluri, titan, materiale semiconductoare, tungsten, ceramică, sticlă, mase plastice, porțelan, grafit, hârtie, fibre textile, materiale compozite.
- Modelarea durabilității componentelor mecanice: rulmenți, motoare, structurile autovehiculelor, scule, transmisii cu roți dințate.
- Modelarea duratelor de funcționare ale releelor, componentelor electronice pasive (rezistoare și condensatoare) și a componentelor electronice active (tuburi electronice cu vid, tranzistoare, circuite integrate și alte elemente semiconductoare).
- Comportarea celui mai slab element din eșantion, precum și a timpilor deteriorărilor premature.
- Comportarea unui ansamblu sau a unui sistem este modelată corespunzător cu ajutorul repartiției exponențiale, atunci repartiția Weibull descrie comportarea elementelor componente.
- Modelarea duratelor de viață a subansamblurilor alcătuite din elemente componente identice, conectate în serie și a căror comportare este descrisă cu ajutorul repartiției gama.
- Modelarea duratei de viață a unor afaceri.
- Sosirea la destinație a mărfurilor expediate.
- Durata de viață preconizată a medicamentelor.
- Modelarea timpului de staționare observat la un post de lucru, situat într-un flux tehnologic.
- Analiza datelor privind fenomene seismice, demografice (vârsta de căsătorie, vârsta mamei la nașterea primului copil, vârsta medie a populației), poluarea mediului ambiant și meteorologie (analiza perioadelor de secetă sau a inundațiilor).
- Procese de reînnoire specifice ingineriei sistemelor de producție.
- Recepția loturilor de produse.
- Testarea prin încercări accelerate a produselor.
- Testarea aparaturii de reglare automată.
- Biometrie, medicină, bacteriologie, acustică și construcții.

1.2.1 STUDII COMPARATIVE PRIVIND MODALITĂȚILE DE ESTIMARE ALE PARAMETRULUI DE LOCALIZARE

Existența parametrului de poziționare (sau localizare) produce o serie de dificultăți, de cele mai multe ori de nerezolvat, în cazul operației de estimare a parametrilor.

În continuare, se prezintă o nouă metodă de estimare a parametrului de localizare bazată pe utilizarea coeficientului de corelație [MCO 04c], [MCO 04d].

- *Estimarea parametrului de localizare utilizând coeficientului de corelație*

Coeficientul de corelație (sau coeficientul de covarianță) al variabilelor aleatorii X și Y reprezintă, prin definiție, raportul:

$$\rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \quad (1.44)$$

și el furnizează informații despre modul în care sunt repartizate în \mathcal{R}^2 valorile vectorului aleatoriu (X, Y) .

Astfel, dacă $\rho(X, Y)$ există, atunci între variabilele aleatorii X și Y este o relație liniară, adică există două numere reale A, B și $A \neq 0$, astfel încât:

$$Y = A \cdot X + B,$$

dacă, și numai dacă [MCO 14]:

$$\rho^2(X, Y) = 1.$$

Din acest motiv în cazul estimațiilor efectuate prin metoda celor mai mici pătrate, valoarea coeficientului de corelație :

$$\rho(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) \cdot y_i - \frac{\sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) \cdot \sum_{i=1}^r y_i}{r}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - \frac{[\sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma)]^2}{r} \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^r y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^r y_i)^2}{r} \right]}} \quad (1.45)$$

poate fi utilizată ca un indicator al concordantei dintre valorile experimentale și dreapta reparației teoretice, ecuația (1.20).

Aceste proprietăți ale coeficientului de corelație pot fi utilizate pentru estimarea parametrului de localizare ($\hat{\gamma}$) din condiția de maxim a valorii lui $\rho(\gamma)$.

Valorile variabilei aleatorii y_i , din ecuația (1.45), se obțin folosind prima ecuație a sistemului (1.47), iar pentru calcul probabilităților $F(t)$ se poate utiliza una dintre ecuațiile (1.14) ÷ (1.17).

Se constată că dacă valoarea lui γ este cunoscută sau estimată printr-un procedeu oarecare, modelul repartiției Weibull triparametrică devine, prin schimbarea de variabilă aleatorie:

$$X = T - \gamma,$$

repartiție Weibull biparametrică putând fi utilizate în continuare toate metodele de estimare dezvoltate pentru această situație.

Pentru cazul reparației Weibull triparametrică se pot utiliza, cel mai frecvent, patru tipuri de estimatori punctuali:

- *Estimatori grafici*

Liniarizarea modelului repartiției Weibull se realizează pornind de la expresia funcției de nonfiabilitate, printr-o dublă logaritmare. Rezultă:

$$\ln \left[\ln \frac{1}{1 - F(t)} \right] = \beta \cdot \ln(t - \gamma) - \beta \cdot \ln \eta. \quad (1.46)$$

Comparând ecuațiile (1.46) și (1.20), prin identificare, se obțin ecuațiile de echivalență:

$$\begin{cases} y = \ln \left[\ln \frac{1}{1 - F(t)} \right] \\ A = -\beta \cdot \ln \eta \\ B = \beta \\ x = \ln(t - \gamma) \end{cases} \quad (1.47)$$

Existența parametrului de localizare poate determina mascarea modelului repartiției Weibull, fig. 1.12. Astfel, dacă se reprezintă grafic pe o rețea de probabilitate, valorile experimentale (t_1, t_2, \dots, t_r) și valorile $(t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_r - t_1)$ în funcție de alura celor două curbe se poate determina intervalul în care se află valoarea parametrului γ . După stabilirea intervalului de apartenență a parametrului de localizare, urmează operația de estimare propriu-zisă.

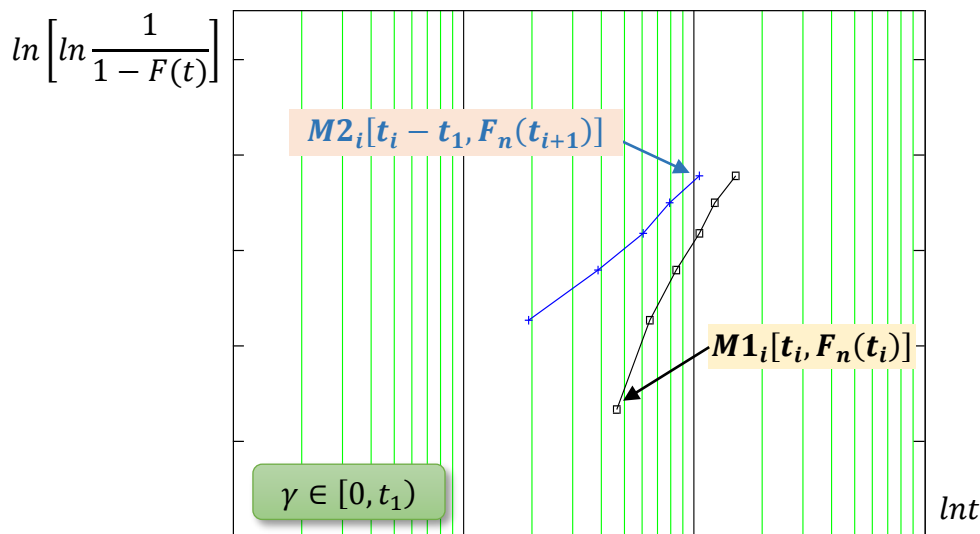


Fig. 1.12a Determinarea domeniului de existență al parametrului de localizare, γ . Cazul $\gamma \in [0, t_1)$

Au fost puse la punct mai multe procedee de estimare, toate având la bază forma după care se dispun valorile experimentale pe rețeaua de probabilitate [WIE 83]:

- O primă metodă utilizată constă în încercări succesive, pentru diferite valori ale lui γ , aparținând domeniului de existență, până se obține liniarizarea convenabilă a punctelor pe rețeaua de probabilitate, fig. 1.13.
- O a doua metodă, utilizată în cazul $\gamma \in [0, t_1)$, constă în prelungirea grafică a curbei valorilor experimentale până la intersecția ei cu axa absciselor (fig. 1.14). Valoarea, astfel obținută, reprezintă estimăția punctuală a parametrului de localizare.

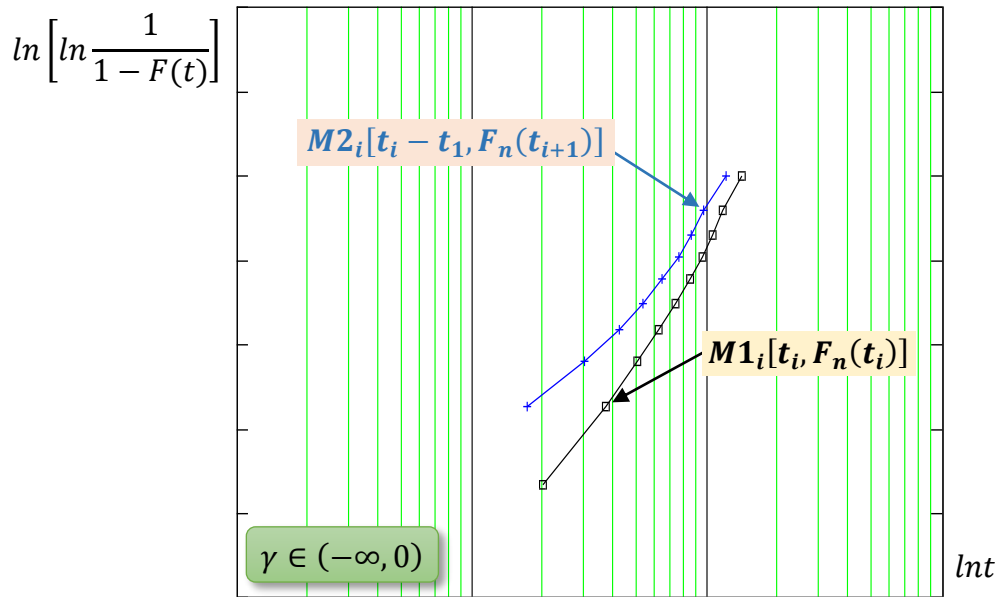


Fig. 1.12b Determinarea domeniului de existență al parametrului de localizare, γ . Cazul $\gamma \in (-\infty, 0)$

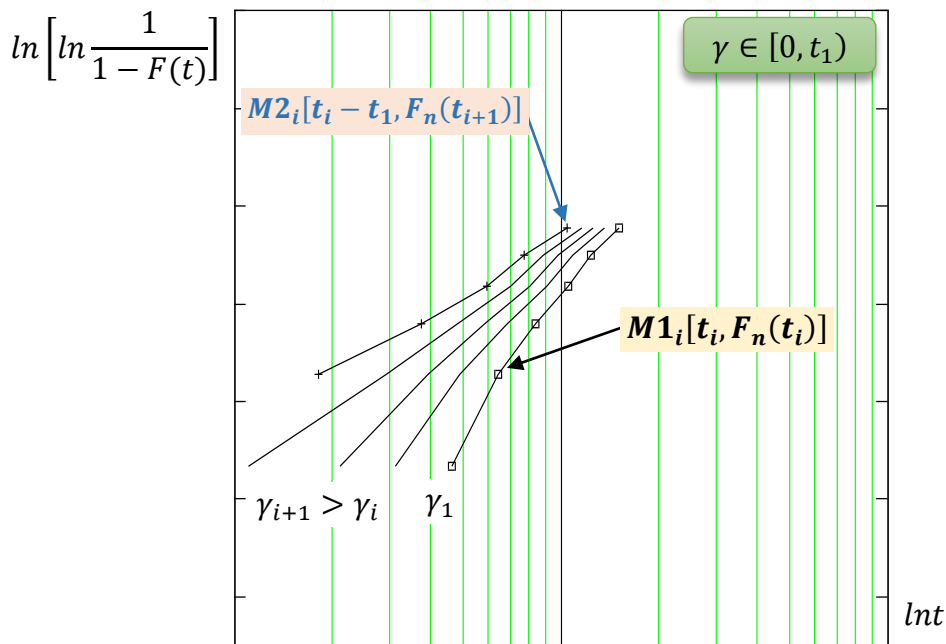


Fig. 1.13 Estimarea, prin încercări succesive, a parametrului de localizare, γ

- c. Cea de-a treia metodă este prin interpolare (fig. 1.15). Valoarea parametrului de localizare se estimează, utilizând relația:

$$\hat{\gamma} = \frac{t_1 \cdot t_3 - t_2^2}{t_1 + t_3 - 2 \cdot t_2} \quad (1.48)$$

- Metoda celor mai mici pătrate

Sistemul de ecuații utilizat pentru estimarea celor trei parametri ai repartiției Weibull se obține prin utilizarea principiului Gauss-Legendre, ecuația (1.21), aplicat asupra formei liniarizate a modelului statistic, (1.46):

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [A + B \cdot \ln(t_i - \gamma) - y_i]^2 = \min. \quad (1.49)$$

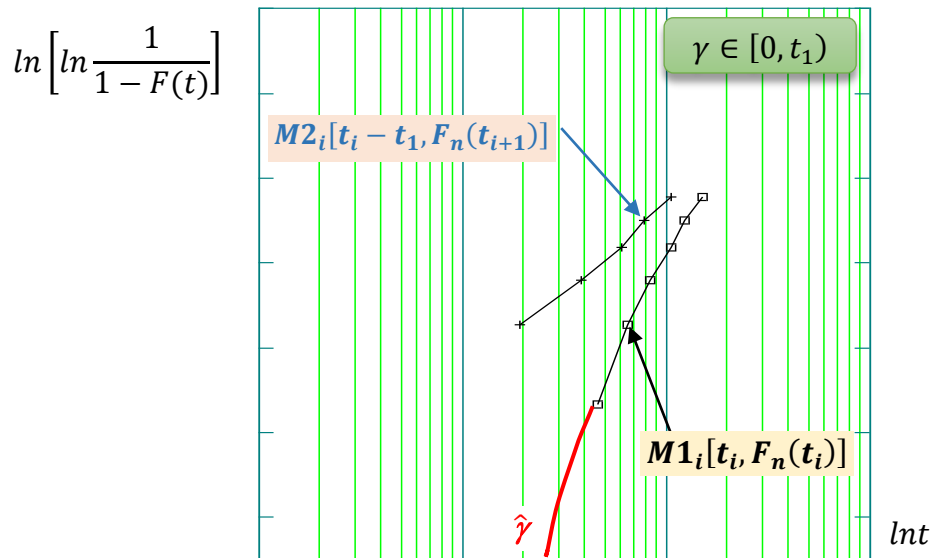


Fig. 1.14 Estimarea parametrului de localizare, γ prin prelungirea grafică a curbei valorilor experimentale [WIE 83]

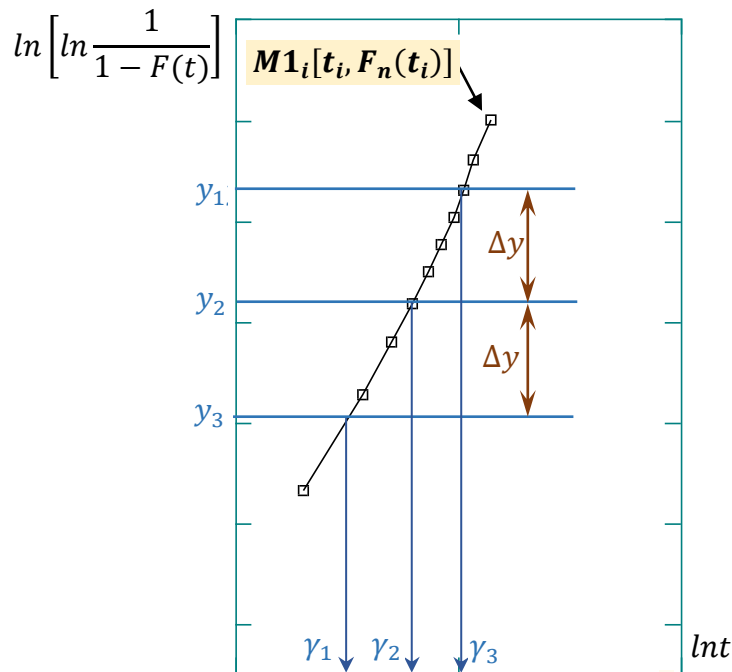


Fig. 1.15 Estimarea parametrului de localizare, γ prin interpolare [WIE 83]

Se obține următorul sistem de ecuații [TAR 89]:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{i=1}^r [A + B \cdot \ln(t_i - \gamma) - y_i] = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^r [A + B \cdot \ln(t_i - \gamma) - y_i] \cdot \ln(t_i - \gamma) = 0 \\ -2 \cdot \sum_{i=1}^r [A + B \cdot \ln(t_i - \gamma) - y_i] \cdot \frac{1}{t_i - \gamma} = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Din primele două ecuații ale sistemului (1.50) se pot determina valorile parametrilor A și B , în funcție de parametrul γ . Se obține:

$$\begin{cases} B = \frac{r \cdot \sum_{i=1}^r y_i \cdot \ln(t_i - \gamma) - \sum_{i=1}^r y_i \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma)}{r \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - [\sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma)]^2} \\ A = \frac{\sum_{i=1}^r y_i \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - \sum_{i=1}^r [y_i \cdot \ln(t_i - \gamma)] \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma)}{r \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - [\sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma)]^2} \end{cases} \quad (1.51)$$

În acest caz valoarea estimată parametrului de localizare se obține rezolvând prin procedee numerice, cea de a 3-a ecuație din sistemul (1.50), care în urma unor prelucrări, devine:

$$\begin{aligned} & \left\{ r \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma) \right]^2 \right\} \cdot \sum_{i=1}^r \frac{y_i}{t_i - \gamma} - \\ & - \left[\sum_{i=1}^r y_i \cdot \sum_{i=1}^r \ln^2(t_i - \gamma) - \sum_{i=1}^r [y_i \cdot \ln(t_i - \gamma)] \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) \right] \cdot \sum_{i=1}^r \frac{1}{t_i - \gamma} - \\ & - \left\{ r \cdot \sum_{i=1}^r [y_i \cdot \ln(t_i - \gamma)] - \sum_{i=1}^r y_i \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) \right\} \cdot \sum_{i=1}^r \frac{\ln(t_i - \gamma)}{t_i - \gamma} = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Valoarea, astfel obținută, se introduce în primele două ecuații ale sistemului (1.51), rezultând valorile estimate ale parametrilor dreptei de regresie, \hat{A} și \hat{B} .

- *Metoda verosimilității maxime*

Estimațiile punctuale de verosimilitate maximă, în cazul repartiției Weibull triparametrice, se obțin pe baza logaritmului funcției de verosimilitate (1.27), din condiția de maxim a acestei funcții.

În cazul încercărilor efectuate pe un eșantion de volum n , cenzurat la nivelul r , ecuația de verosimilitate este de forma:

$$\mathcal{L}(t_i, \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \prod_{i=1}^r f(t_i) \cdot [1 - F(t_r)]^{n-r}. \quad (1.53)$$

În cazul repartiției triparametrice Weibull, ecuația (1.53) este de forma:

$$\mathcal{L}(t_i, \beta, \eta, \gamma) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{\beta^r}{\eta^{\beta-1}} \cdot \prod_{i=1}^r (t_i - \gamma)^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{1}{\eta^\beta} [\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta]}. \quad (1.54)$$

Prin logaritmare, din ecuația (1.54) se obține:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t_i, \beta, \eta, \gamma) = \ln \left[\frac{n!}{(n-r)!} \right] + r \cdot \ln \beta - \beta \cdot r \cdot \ln \eta + (\beta - 1) \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) - \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \cdot \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta \right]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Sistemul ecuațiilor de verosimilitate maximă se obține din (1.55), punând condițiile de extrem (1.27). Rezultă, următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln(t_i - \gamma) - \frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta \cdot \ln(t_i - \gamma) + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta \cdot \ln(t_r - \gamma)}{\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta} = 0 \\ \eta = \left\{ \frac{1}{r} \cdot \left[\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta - (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta \right] \right\}^{1/\beta} \\ r \cdot \beta \cdot \frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^{\beta-1} + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^{\beta-1}}{\sum_{i=1}^r (t_i - \gamma)^\beta + (n-r) \cdot (t_r - \gamma)^\beta} - (\beta-1) \cdot \sum_{i=1}^r \ln\left(\frac{1}{t_i - \gamma}\right) = 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Determinarea estimatorilor de verosimilitate maximă, $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ și $\hat{\gamma}$ presupune rezolvarea acestui sistem de ecuații utilizând procedee numerice de calcul.

- *Metoda modificată a momentelor*

Această metodă se pretează a fi aplicată în cazul repartițiilor care au parametru de localizare și care prezintă asimetrie pronunțată.

Modificarea față de *metoda clasică a momentelor* constă în utilizarea pentru operația de estimare parametrică a primei statistici de ordine:

$$t_{(1)} = \min(t_i), i = \overline{1, n}$$

și a proprietăților de care se bucură această statistică de ordine [KEC 93]:

$$\begin{cases} E[T_{(1)}] = t_{(1)} \\ E[F(t_{(1)})] = F[t_{(1)}] = \frac{1}{1+n} \end{cases} \quad (1.57)$$

În cazul repartiției Weibull, prima statistică de ordine corespunzătoare unui eșantion de volum n este repartizată tot Weibull, cu funcția de repartiție de forma:

$$F[t_{(1)}] = 1 - [1 - F(t)]^n = 1 - e^{-\left(\frac{t}{n^{-1/\beta} \cdot \eta}\right)^\beta} \quad (1.58)$$

Pentru repartiția triparametrică Weibull această metodă permite estimarea parametrilor ca soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \mu = \bar{t} \\ \sigma^2 = s^2 \\ E[T_{(1)}] = t_{(1)} \end{cases} \quad (1.59)$$

Sistemul de ecuații (1.59) se mai poate scrie și sub forma:

$$\begin{cases} \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^r t_i \\ \eta^2 \cdot \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^r (t_i - \bar{t})^2 \\ \gamma + \frac{\eta}{n^{1/\beta}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = t_1 \end{cases} \quad (1.60)$$

După o serie de prelucrări, sistemul de ecuații (1.60) rezultă, sub forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right]^2}{\left[\left(1 - n^{-1/\beta}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^r (t_i - \bar{t})^2}{(t_1 - \bar{t})^2} \\ \gamma = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^r t_i - \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \\ \eta = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^r (t_i - \bar{t})^2}{\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right]^2}} \end{array} \right. \quad (1.61)$$

Rezolvarea primei ecuații, în funcție de β , a sistemului (1.58) presupune utilizarea procedurilor iterative de calcul. Dezavantajul principal al acestei metode îl constituie faptul că nu poate fi aplicată decât eșantioanelor complete.

Pentru a ilustra modul de utilizare a metodei coeficientului de corelație, în cazul estimării parametrului de localizare Weibull, au fost preluate din literatura de specialitate două exemple de calcul [MCO 04b]:

Exemplul 1: $n = 10, r = 6$

t_i : 46, 64, 83, 105, 123, 150

Exemplul 2: $n = 10, r = 10$

t_i : 200, 370, 500, 620, 730, 840, 950, 1050, 1160, 1400

Valorile estimate ale parametrilor corespunzătorii celor două exemple de calcul sunt prezentate în tabelul 1.4.

Pentru obținerea estimațiilor specifice situațiilor prezentate anterior a fost proiectată o aplicație MathCAD, versiunea 14. Precizia de rezolvare a ecuațiilor și sistemelor de ecuații a fost stabilită la 10^{-4} .

Tabelul 1.4 Rezultatele obținute prin prelucrarea statistică a exemplelor considerate [MCO 04d]

Estimație obținută prin:		Exemplul 1			Exemplul 2		
		Estimațiile punctuale ale parametrilor					
		$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$
Metoda grafică	Varianta a	1.2	144	30	3.0	1220	-300
		$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99975$			$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99952$		
	Varianta b	1.2	144	31	-	-	-
		$\rho(\hat{\gamma}) = 0.999769$			-		
	Varianta c	1.2	144	29.48	3.0	1220	-297.82
		$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99972$			$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99823$		
Metoda celor mai mici pătrate, aplicată repartiției triparametrice Weibull		2.8526	188.616	-33.800	2.905	1196.596	-280.957
		$\rho(\hat{\gamma}) = 0.98495$			$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99953$		
Metoda verosimilității maxime, aplicată repartiției triparametrice Weibull		0.99609	122.667	43.364	0.99969	582.326	199.633
Metoda modificată a momentelor		-	-	-	4.060	1481.377	-561.867

Tabelul 1.4 (continuare) Rezultatele obținute prin prelucrarea statistică a exemplelor considerate [MCO 04d]

Estimație obținută prin:	Exemplul 1			Exemplul 2		
	Estimațiile punctuale ale parametrilor					
	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$
Metoda coeficientului de corelație combinată cu:	$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99977$		30.795	$\rho(\hat{\gamma}) = 0.99953$		-283.287
a) Metoda celor mai mici pătrate, aplicată repartiției biparametrice Weibull	1.183	144.745	30.795	2.913	1199.008	-283.287
b) Metoda verosimilității maxime, aplicată repartiției biparametrice Weibull	1.483	128.025	30.795	3.384	1188.980	-283.287

Analiza rezultatelor obținute permite formularea următoarelor concluzii:

- Valorile maxime ale coeficientului de corelație, cel care indică concordanța dintre rezultatele experimentale și dreapta Weibull, s-au obținut în cazul utilizării metodei coeficientului de corelație.
- Estimații asemănătoare, valoric pentru parametrul de localizare, se obțin în cazul utilizării metodelor care au la bază același principiu (cel al liniarizării funcției de repartiție): metodele grafice, metoda celor mai mici pătrate aplicată repartiției triparametrice Weibull și metoda coeficientului de corelație.
- Utilizarea metodelor grafice poate furniza valori estimate cu suficientă precizie, deși sunt afectate de subiectivismul analistului, dacă se realizează pe rețele de probabilitate construite cu o acuratețe deosebită.
- Estimatorul lui γ obținut prin metoda celor mai mici pătrate, aplicată repartiției triparametrice Weibull, depinde foarte mult de valoarea inițială aleasă pentru rezolvarea numerică a ecuației ce conține estimația parametrului de localizare. Valorile estimate ale lui γ , pornind de la soluții inițiale diferite, se pot obține cu diferențe semnificative, datorită formei specifice de variație a ecuației (1.52), vezi. fig. 1.16.

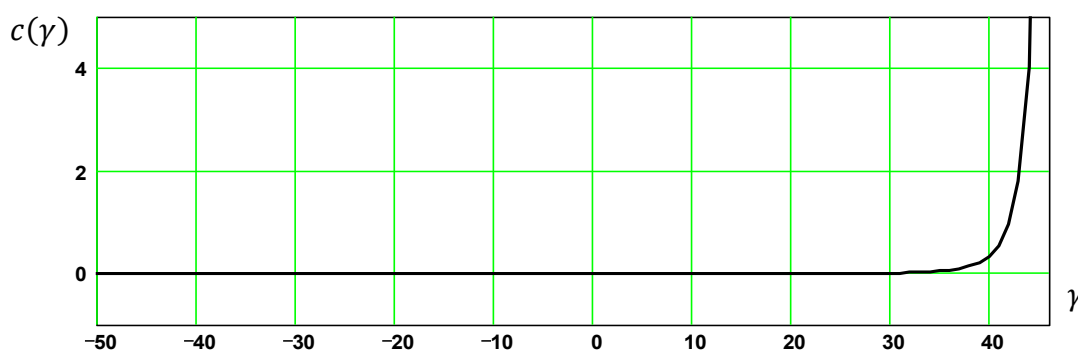


Fig. 1.16 Variația valorilor ecuației (1.52) în funcție de γ

- Metoda coeficientului de corelație permite obținerea univocă a estimațiilor parametrului de localizare. În fig. 1.17 sunt prezentate graficele care conțin modul de variație a valorilor coeficientului de corelație în funcție de valorile lui γ , pentru cele două exemple analizate.
- Decuplarea operației de estimare parametrică și utilizarea metodei coeficientului de corelație pentru estimarea parametrului de localizare, combinată cu alte metode uzuale de estimare a parametrilor de formă și de scală determină obținerea unor rezultate comparabile. Diferențele nesemnificative care apar depind de proprietățile estimatorilor utilizați.

- g. Metoda verosimilității maxime aplicată repartiției triparametrice Weibull determină obținerea, în unele situații, a unor valori estimate care diferă semnificativ de cele obținute prin celelalte metode.
- h. Metoda modificată a momentelor furnizează estimări care diferă semnificativ, în unele cazuri, de cele obținute prin alte metode. De aceea, se recomandă utilizarea ei doar în situațiile în care nu există metode alternative de estimare.

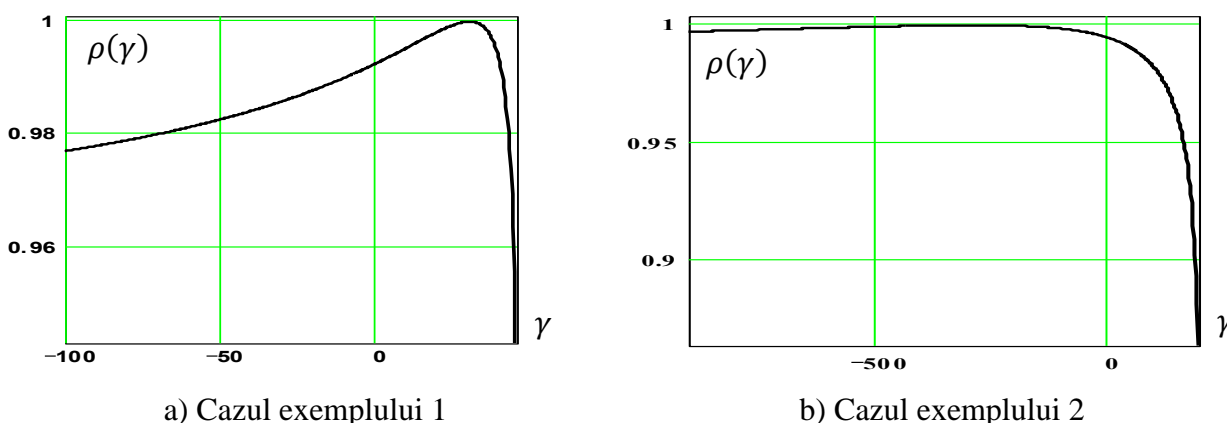


Fig. 1.17 Valorile coeficientului de corelație, în funcție de γ

1.2.2 PROIECTAREA OPTIMIZATĂ A PLANURILOR DE ÎNCERCĂRI

Informațiile privind fiabilitatea produselor în vederea certificării calității lor se obțin, în general, în urma încercărilor la durabilitate efectuate pe standuri specializate.

Organizarea acestor activități presupune:

- delimitarea populației, constituirea eșantionului reprezentativ supus încercărilor și alegerea tipului de încercare (completă, cenzurată, trunchiată);
- alegerea parametrilor esențiali care se consideră că determină fiabilitatea la un moment dat;
- stabilirea condițiilor de mediu și de solicitare în care se efectuează testarea.

La testarea produselor ultimele două condiții, precizate anterior, sunt bine definite prin recomandări și specificații adecvate.

Datorită costurilor foarte mari, pe care le presupune organizarea și efectuarea activităților de testare, firmele producătoare recurg cel mai frecvent la utilizarea încercărilor incomplete și anume încercări cenzurate sau trunchiate.

Metoda de optimizare prezentată în continuare permite ca în condiții tehnico-organizatorice date să se determine volumul eșantionului și nivelul de cenzurare al unei încercări la durabilitate, astfel încât pentru parametrul economic al procesului (costul încercării), să se obțină valorile cele mai avantajoase [MCO 03], [MCO 02], [SIM 02].

Modelul matematic al problemei de optimizare este alcătuit din:

a. Funcția obiectiv

Funcția obiectiv a modelului matematic de optimizare se alege astfel încât să reflecte într-un mod cât mai sintetic aspectele esențiale ale procesului de testare. Ea se adoptă sub forma:

$$C_T(N, r) = C_1 \cdot \mathcal{T}_{n,r} + (C_2 - C_3) \cdot N + C_4, \quad (1.62)$$

reprezentând costul total al încercării de fiabilitate. În ecuația (1.62):

C_1 - reprezintă costul pe oră al încercării;

C_2 - reprezintă costul fiecărui produs testat;

C_3 - reprezintă valoarea ce poate fi recuperată din fiecare produs testat, după terminarea încercării;

C_4 - reprezintă valoarea fixă a încercării, valoare ce nu depinde de volumul eşantionului sau de durata testului;

N - reprezintă total de produse ce funcţionează pe stand.

Ținând cont de modul de funcționare al echipamentelor de testare, pentru N se obține:

$$N = n + r - 1.$$

Durata totală a încercării, $T_{n,r}$ se estimează cu ajutorul funcției inverse de repartiție Weibull și are expresia [KEC 93]:

$$T_{n,r} = \hat{\eta} \cdot \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - F_n(t_i)} \right] \right\}^{1/\hat{\beta}}, \quad (1.63)$$

în care, $F_n(t_i)$ reprezintă valoarea funcției empirice de repartiție, corespunzătoare deteriorării r , în cazul unei încercări cenzurate de volum n . Această valoare se poate determina, utilizând relația simplificată (1.14) care conduce la calculul unei valori mediane a duratei totale de încercare. Iar, $\hat{\beta}$ și $\hat{\eta}$, reprezintă valori estimate ale parametrilor repartiției Weibull.

b. Restricțiile problemei de optimizare

Modul de organizare a încercărilor la durabilitate a produselor, precum și dotarea tehnică existentă, determină o serie de restricții care completează modelul matematic al problemei de optimizare. Aceste restricții sunt:

b1. Numărul maxim (N_{max}) al produselor care poate fi montat simultan pe stand și care funcționează pe toată durata încercării în condiții identice de solicitare, turaj etc.:

$$n \leq N_{max}. \quad (1.64)$$

b2. Tipul încercării efectuate, încercări cenzurate la nivelul r :

$$r \leq n. \quad (1.65)$$

b3. Precizia, ε , estimării parametrului de formă, al repartiției Weibull.

Pentru a putea exprima sintetic această condiție, se definește precizia de estimare [CAT 83], [KEC 93], sub forma:

$$\begin{cases} Pr \left(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\hat{\beta}} > \varepsilon/2 \right) = \alpha/2 \\ Pr \left(\frac{\beta - \hat{\beta}}{\hat{\beta}} > \varepsilon/2 \right) = \alpha/2 \end{cases}. \quad (1.66)$$

Se demonstrează [KEC 93], că pentru $n \rightarrow \infty$, există relația:

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \propto \mathcal{N}(z, 0, C_{22}), \quad (1.67)$$

pentru exprimarea repartiției valorii estimate prin metoda verosimilității maxime a parametrului de formă ($\hat{\beta}$). În relația (1.67) s-a notat cu:

$\mathcal{N}(z, 0, C_{22})$ - repartiția normală având media zero și dispersia $C_{22} = n \cdot V \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)$. Valorile asimptotice ale dispersiei C_{22} pentru eşantioane cenzurate $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = p \right)$ sunt date în [KEC

93].

Aceste valori asimptotice ale dispersiei C_{22} , pentru eşantioane cenzurate, sunt prezentate în tabelul 1.5.

Utilizând aproximația (1.67), intervalul de încredere bilateral simetric al parametrului β , este:

$$Pr\left(\frac{\hat{\beta}}{1 + \sqrt{\frac{C_{22}}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) \leq \beta \leq Pr\left(\frac{\hat{\beta}}{1 + \sqrt{\frac{C_{22}}{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha. \quad (1.68)$$

Tabelul 1.5 Valorile dispersiei C_{22} [KEC 93]

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = p$	$C_{22} = n \cdot V\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)$
1.0	0.607927
0.9	0.767044
0.8	0.928191
0.7	1.122447
0.6	1.372781
0.5	1.716182
0.4	2.224740
0.3	3.065515
0.2	4.738764
0.1	9.744662

Prin identificare, din ecuațiile (1.66) și (1.68), se poate determina valoarea preciziei de estimare:

$$\varepsilon = \left(1 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{C_{22}}{n}}\right)^{-1} - \left(1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{C_{22}}{n}}\right)^{-1}. \quad (1.69)$$

Știind că $z_{1-\alpha} = -z_{\alpha}$, prin rezolvarea în funcție de n a ecuației (1.69), se obține restricția:

$$n > \frac{C_{22} \cdot \varepsilon^2 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{(1 - \sqrt{1 + \varepsilon^2})^2}. \quad (1.70)$$

Valorile coeficientului C_{22} , în funcție de raportul de cenzurare (r/n), se pot calcula, utilizând regresia:

$$C_{22} = a \cdot \left(\frac{r}{n}\right)^b, \quad (1.71)$$

în care: $a = 0,79845$ și $b = -1,08926$. Relația (1.71) asigură un raport de corelație $R^2 = 0,9992$ și o abatere medie standard $s = 0,11131$.

b4. Precizia estimării parametrului η , al repartiției Weibull.

Pentru a putea exprima sub formă matematică această condiție, se definește precizia de estimare sub forma [CAT 83], [KEC 93]:

$$\begin{cases} Pr\left(\frac{\hat{\eta} - \eta}{\eta} > \tau\right) = \alpha/2 \\ Pr\left(\frac{\eta - \hat{\eta}}{\eta} > \tau\right) = \alpha/2 \end{cases} \quad (1.72)$$

Estimarea parametrului de formă, cu o precizie dată $\beta \pm \varepsilon/2$ ne permite să facem aproximarea: $\beta = \hat{\beta}$. În aceste condiții, prin schimbarea de variabilă aleatorie: $Y = T^{\hat{\beta}}$, repartiția Weibull biparametrică se transformă într-o repartiție exponențială:

$$\frac{1}{\lambda} = \eta^\beta$$

Valoarea estimată prin metoda verosimilității maxime ($\hat{\eta}$) a parametrului η are proprietatea [CRO 95]:

$$\frac{2 \cdot r \cdot \hat{m}}{m} \propto \chi^2(x, 2 \cdot r). \quad (1.73)$$

În ecuația (1.73), prin m s-a notat valoarea:

$$m = \eta^\beta.$$

Proprietatea (1.73), scrisă sub forma ecuației (1.9) conduce la următorul rezultat:

$$Pr \left[\left(\frac{2 \cdot r}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \right)^{1/\beta} \cdot \hat{\eta} \leq \eta \leq \left(\frac{2 \cdot r}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \cdot \hat{\eta} \right)^{1/\beta} \right] = 1 - \alpha. \quad (1.74)$$

Din compararea ecuațiilor (1.72) și (1.74), prin identificare, rezultă valorile preciziei de estimare:

$$\begin{cases} \left(\frac{2 \cdot r}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \right)^{1/\beta} = \frac{1}{1 + \tau} \\ \left(\frac{2 \cdot r}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \right)^{1/\beta} = \frac{1}{1 - \tau} \end{cases} \quad (1.75)$$

Relațiile (1.75) prin împărțire conduc la:

$$\frac{1 - \tau}{1 + \tau} = \left(\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \right)^{1/\beta}. \quad (1.76)$$

Pentru simplificarea calculelor se utilizează relația aproximativă [KEC 93]:

$$\chi_{\alpha, \nu}^2 = \nu \cdot \left[1 - \frac{2}{9 \cdot \nu} + z_\alpha \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot \nu} \right)^{1/2} \right]^3, \quad (1.77)$$

care exprimă legătura între cuantilele repartiției normale, z_α și cuantilele repartiției hi-pătrat, $\chi_{\alpha, \nu}^2$.

Utilizând aproximația (1.77), ecuația (1.76) rezultă sub forma:

$$\frac{1 - \tau}{1 + \tau} = \left[\frac{1 - \frac{2}{9 \cdot \nu} + \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot \nu}\right)^{1/2}}{1 - \frac{2}{9 \cdot \nu} - \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot \nu}\right)^{1/2}} \right]^3 \quad (1.78)$$

Deoarece, numărul gradelor de libertate $\nu = r_{min}$, ecuația (1.78) devine:

$$\frac{1 - \tau}{1 + \tau} = \left[\frac{1 - \frac{2}{9 \cdot r_{min}} + \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot r_{min}}\right)^{1/2}}{1 - \frac{2}{9 \cdot r_{min}} - \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot r_{min}}\right)^{1/2}} \right]^{3/\beta} \quad (1.79)$$

Rezolvarea acestei ecuații pentru valori impuse ale nivelului de încredere $(1 - \alpha)$ și ale preciziei de estimare (τ) permite obținerea valorii nivelului de cenzurare (r_{min}) .

Luând în considerare aspectele teoretice tratate la punctul a și b, modelul matematic al problemei de optimizare rezultă sub forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot \eta \cdot \left[-\ln \left(1 - \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \right) \right]^{1/\beta} + (C_2 - C_3) \cdot (n + r - 1) + C_4 \rightarrow \min. \\ \frac{1 - \tau}{1 + \tau} = \left[\frac{1 - \frac{2}{9 \cdot r_{min}} + \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot r_{min}}\right)^{1/2}}{1 - \frac{2}{9 \cdot r_{min}} - \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \left(\frac{2}{9 \cdot r_{min}}\right)^{1/2}} \right]^{3/\beta} \\ \ln n \leq \ln N_{max} \\ \ln r \leq \ln n \\ \ln r \geq \ln r_{min} \\ \ln n \geq \frac{b}{1 + b} \cdot \ln r + \frac{\ln a + 2 \cdot \ln \varepsilon + 2 \cdot \ln z_{\alpha} - 2 \cdot \ln(1 - \sqrt{1 + \varepsilon^2})}{1 + b} \end{array} \right. \quad (1.80)$$

Pentru simplificarea rezolvării, sistemul inecuațiilor care formează restricțiile problemei de optimizare (1.80) au fost liniarizate prin logaritmare.

Analiza relațiilor (1.80) ne conduc la concluzia că metoda de optimizare propusă reprezintă o problemă de optimizare neliniară, în numere întregi, a parametrilor r și n , care definesc încercările cenzurate ale produselor.

c. Exemplu numeric

Rezolvarea problemei de optimizare (1.80) a fost realizată numeric, utilizând un program scris în MathCAD 14 Professional.

Valorile numerice utilizate sunt:

$$\begin{array}{llll} \tau = 15\% & N_{max} = 120 & C_3 = 5 & \beta = 1.75 \\ 1 - \alpha = 90\% & C_1 = 50 & C_4 = 20 & \eta = 800 \\ m = 100 & C_2 = 15 & \frac{z_{\alpha}}{2} = -1.645 & \varepsilon = 30\% \end{array}$$

Soluția ecuației (1.80), calculată cu precizie de 10^{-12} , este:

$$r_{min} = 40.$$

Regiunea soluțiilor posibile ale problemei, așa cum rezultă ea cu valorile numerice prezentate anterior, este reprezentată în fig. 1.18, iar reprezentarea grafică a valorilor funcției obiectiv este prezentată în fig. 1.19.

Planul optim de încercare rezultat este:

- volumul eșantionului: $n = 120$ produse;
- nivelul de cenzurare: $r = 40$ produse,

care asigură costul minim al încercării:

$$C_T(N, r) = 2.226 \cdot 10^4.$$

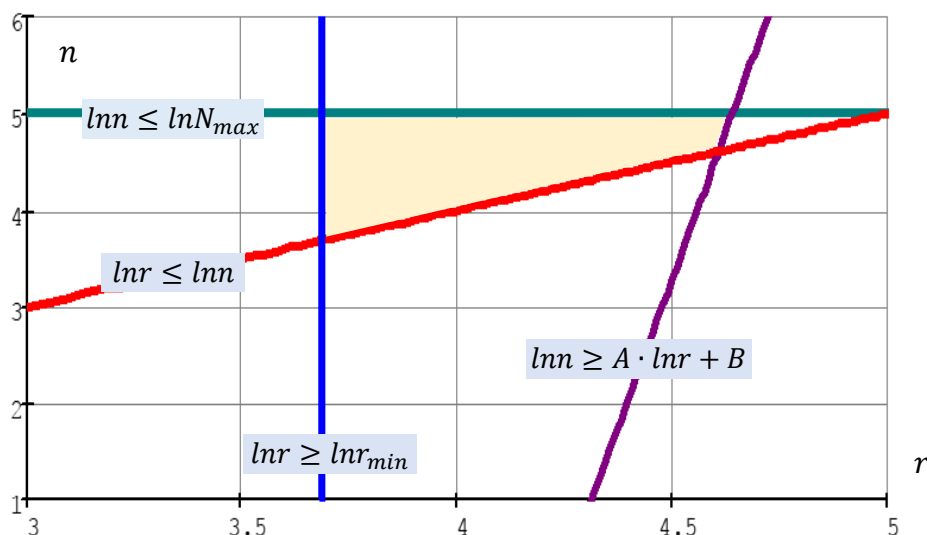


Fig. 1.18 Regiunea soluțiilor posibile ale problemei de optimizare [MCO 02]

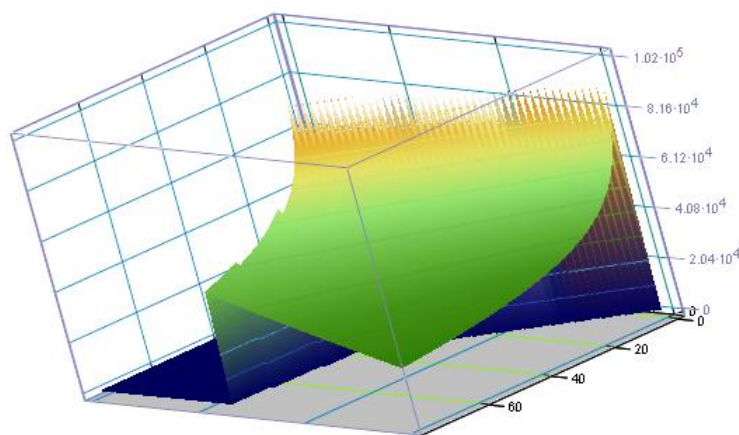


Fig. 1.19 Reprezentarea grafică a valorilor funcției obiectiv $C_T(N, r)$

1.2.3 INFERENȚE STATISTICE ÎN CAZUL REZULTATELOR EXPERIMENTALE OBȚINUTE PE BAZA ÎNCERCĂRILOR TRUNCHIATE

Încercările de fiabilitate trunchiate, deși se utilizează mai rar la testarea produselor, constituie o metodă alternativă pe baza căreia se pot lua decizii privind calitatea elementelor testate, în condițiile unor durate a încercărilor, stabilite aprioric.

Spre deosebire de cazul încercărilor cenzurate sau complete, la care s-au pus la punct tehnici de realizare a inferențelor și verificarea ipotezelor statistice [MCO 04e], pornind de la estimațiile punctuale ale parametrilor repartiției Weibull și prin utilizarea metodei verosimilității maxime, în situația încercărilor trunchiate, aceste proceduri nu se pot aplica datorită specificului acestui tip de

încercare.

Încercările de fiabilitate trunchiate presupun un eșantion de volum n , care se supune încercării, iar aceasta se desfășoară până la parcurgerea unei durate t_c stabilită anterior. Singura metodă de estimare parametrică, care folosește întreaga informație furnizată de acest tip de încercare, este metoda verosimilității maxime [MCO 08a]. Dacă se notează cu r numărul de produse deteriorate în intervalul de timp $[0, t_c)$ funcția de verosimilitate corespunzătoare este:

$$\mathcal{L}(t_i, \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \prod_{i=1}^n f(t_i) \cdot [1 - F(t_c)]^{n-r}. \quad (1.81)$$

Particularizând ecuația (1.81) pentru cazul repartiției Weibull, $W(x, \beta, \eta)$, se obține:

$$\mathcal{L}(t_i, \beta, \eta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{\beta^r}{\eta^r} \cdot \left[\prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^{\beta-1} \right] \cdot e^{-\frac{1}{\eta^\beta} [\sum_{i=1}^r t_i^\beta + (n-r) \cdot t_c^\beta]}. \quad (1.82)$$

Prin logaritizarea relației (1.82):

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(t_i, \beta, \eta, \gamma) = \ln \left[\frac{n!}{(n-r)!} \right] + r \cdot \ln \beta - \beta \cdot r \cdot \ln \eta + (\beta - 1) \cdot \sum_{i=1}^r \ln t_i - \\ - \frac{1}{\eta^\beta} \cdot \left[\sum_{i=1}^r t_i^\beta + (n-r) \cdot t_c^\beta \right]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

și apoi din condiția maximizării funcției de verosimilitate (1.27), rezultă sistemul ecuațiilor de verosimilitate maximă:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln t_i - \frac{\sum_{i=1}^r t_i^{\hat{\beta}} \cdot \ln t_i + (n-r) \cdot t_c^{\hat{\beta}} \cdot \ln t_c}{\sum_{i=1}^r t_i^{\hat{\beta}} + (n-r) \cdot t_c^{\hat{\beta}}} = 0 \\ \hat{\eta}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{r} \cdot \left[\sum_{i=1}^r t_i^{\hat{\beta}} + (n-r) \cdot t_c^{\hat{\beta}} \right] \end{cases}. \quad (1.84)$$

Estimatorii punctuali de verosimilitate maximă ai parametrilor repartiției Weibull se obțin ca soluție a sistemului de ecuații (1.84).

Realizarea inferențelor și verificarea ipotezelor statistice în cazul încercărilor cenzurate și complete, efectuate pe eșantioane de volum redus, presupun utilizarea [MCC 74a], [MCC 75], [MCO 04e], unei serii de două variabile aleatorii $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$ și $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$.

Valorile acestor variabile aleatorii se obțin prin simulare numerică Monte-Carlo, în cazul încercărilor cenzurate, pentru o repartiție Weibull biparametrică având $\beta = 1$ și $\eta = 1$. Algoritmul utilizat [MCO 04a], este cel prezentat în fig. 1.20.

Folosirea acestor variabile aleatorii și în cazul încercărilor trunchiate presupune, în primul rând, demonstrarea existenței lor, în această situație. În acest scop, se utilizează schimbarea de variabilă aleatorie:

$$X = \left(\frac{T}{\eta} \right)^\beta. \quad (1.85)$$

Folosind relația (1.85), duratele t_i ale timpilor de funcționare până la deteriorare, obținute în urma unei încercări trunchiate, se mai pot scrie:

$$t_i = \eta \cdot (x_i)^{\frac{1}{\beta}}, i = \overline{1, r}. \quad (1.86)$$

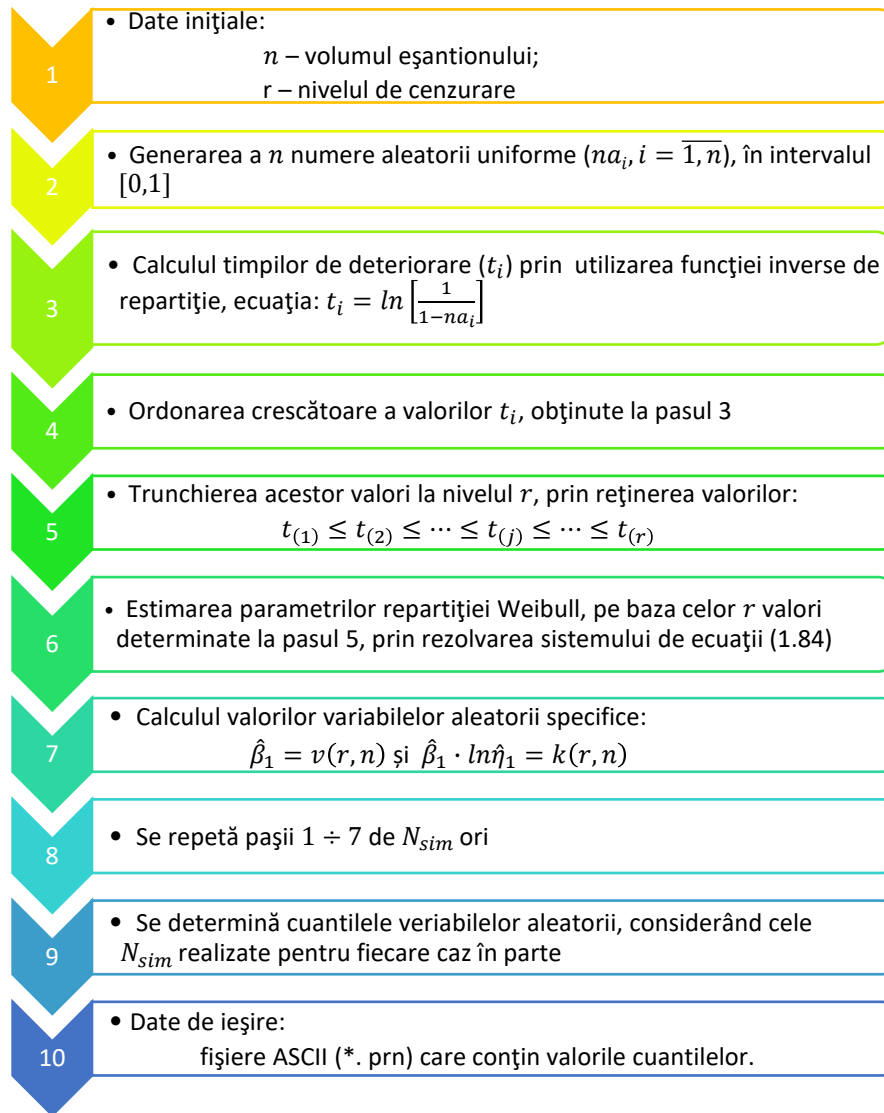


Fig. 1.20 Algoritm de calcul utilizat pentru simularea încercărilor cenzurate și estimarea parametrilor folosind metoda verosimilității maxime [MCO 04a]

Substituind valorile t_i din sistemul de ecuații (1.84), rezultă:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln(\eta \cdot x_i^{1/\hat{\beta}}) - \frac{\sum_{i=1}^r \eta^{\hat{\beta}} \cdot x_i^{\hat{\beta}/\hat{\beta}} \cdot \ln(\eta \cdot x_i^{1/\hat{\beta}}) + (n-r) \cdot \eta^{\hat{\beta}} \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\beta}} \cdot \ln(\eta \cdot x_c^{1/\hat{\beta}})}{\sum_{i=1}^r \eta^{\hat{\beta}} \cdot x_i^{\hat{\beta}/\hat{\beta}} + (n-r) \cdot \eta^{\hat{\beta}} \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\beta}}} = 0 \\ \hat{\eta}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{r} \cdot \left[\sum_{i=1}^r (\eta^{\hat{\beta}} \cdot x_i^{\hat{\beta}/\hat{\beta}}) + (n-r) \cdot \eta^{\hat{\beta}} \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\beta}} \right] \end{cases} \quad (1.87)$$

După o serie de prelucrări, sistemul (1.87) va rezulta de forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\beta}/\hat{\eta}} + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^r \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\beta}/\hat{\eta}} \cdot \ln x_i + (n-r) \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\eta}} \cdot \ln x_c}{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\beta}/\hat{\eta}} + (n-r) \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\eta}}} = 0 \\ \hat{\beta} \cdot \ln \frac{\hat{\eta}}{\eta} = \ln \left[\frac{\sum_{i=1}^r x_i^{\hat{\beta}/\hat{\eta}} + (n-r) \cdot x_c^{\hat{\beta}/\hat{\eta}}}{r} \right] \end{cases} \quad (1.88)$$

Dacă se analizează sistemul de ecuații (1.88), comparativ cu sistemul de ecuații (1.84), rezultă că variabilele aleatorii $\hat{\beta}/\hat{\eta} = v(r, n)$ și $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$ sunt repartizate independent de β și η .

De asemenea, se observă că valorile lor sunt dependente doar de parametrii încercării trunchiate: r și x_c .

Inferențele statistice, în cazul încercărilor trunchiate, se pot realiza pe baza acestor variabile aleatorii, însă trebuie să se țină seama de specificul încercării.

Determinarea intervalelor de încredere pentru parametrii și cuantilele repartiției Weibull, precum și testarea ipotezelor statistice referitoare la parametrii repartiției se poate face acoperitor, ținând seama de faptul că durata t_c a încercării se poate considera ca fiind cuprinsă între duratele unor încercări cenzurate la nivel r , respectiv $r + 1$ deteriorări. Pe baza acestei ipoteze relațiile de calcul al limitelor superioare de încredere se modifică prin înlocuirea cuantilelor corespunzătoare unui nivel de cenzurare r , cu cele corespunzătoare unui nivel $r + 1$. Rezultă:

Pentru parametrul de formă, β

Variabila aleatorie $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$ permite obținerea:

1.1. Intervalului de încredere unilateral, cu o limită inferioară, și care corespunde unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr[v(r, n) = \hat{\beta}/\beta > v_{1-\alpha}(r + 1, n)] = 1 - \alpha. \quad (1.89)$$

Rezolvând ecuația (1.89), se obține:

$$\frac{\hat{\beta}}{v_{1-\alpha}(r + 1, n)} < \beta. \quad (1.90)$$

1.2. Intervalului de încredere unilateral, cu o limită superioară, și care corespunde unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr[v(r, n) = \hat{\beta}/\beta < v_{\alpha}(r, n)] = 1 - \alpha. \quad (1.91)$$

Rezolvând ecuația (1.91), se obține:

$$\beta < \frac{\hat{\beta}}{v_{\alpha}(r, n)}. \quad (1.92)$$

1.3. Intervalului de încredere bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr\left[v_{\frac{\alpha}{2}}(r, n) < v(r, n) = \hat{\beta}/\beta < v_{1-\frac{\alpha}{2}}(r + 1, n)\right] = 1 - \alpha. \quad (1.93)$$

Intervalul de încredere rezultă sub forma:

$$\frac{\hat{\beta}}{v_{1-\frac{\alpha}{2}}(r + 1, n)} < \beta < \frac{\hat{\beta}}{v_{\frac{\alpha}{2}}(r, n)}. \quad (1.94)$$

1.4. Testarea ipotezelor statistice referitoare la parametrul de formă, față de o valoare de referință β_0 .

În tabelul 1.6 sunt prezentate ipotezele alternative și condițiile de acceptare a ipotezei nule, pentru un risc de gradul I egal cu α .

Pentru parametrul de scală, η

Variabila aleatorie $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$ permite obținerea:

2.1. Intervalului de încredere unilateral, cu o limită inferioară, și care corespunde unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

Tabelul 1.6 Verificarea ipotezelor statistice pentru parametrul de formă [MCO 04e]

Ipoteza alternativă $H_1:$	Ipoteza nulă $H_0: \beta = \beta_0$ se acceptă, dacă:
$\beta < \beta_0$	$v_\alpha(r, n) < \hat{\beta}/\beta_0$
$\beta > \beta_0$	$\hat{\beta}/\beta_0 < v_{1-\alpha}(r+1, n)$
$\beta \neq \beta_0$	$v_{\alpha/2}(r, n) < \hat{\beta}/\beta_0 < v_{1-\alpha/2}(r+1, n)$

$$Pr \left[k(r, n) = \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right) < k_{1-\alpha}(r+1, n) \right] = 1 - \alpha. \quad (1.95)$$

Rezolvând ecuația (1.95), se obține:

$$\hat{\eta} \cdot \left[\exp \left(\frac{-k_{1-\alpha}(r+1, n)}{\hat{\beta}} \right) \right] < \eta. \quad (1.96)$$

2.2. Intervalului de încredere unilateral, având o limită superioară și care corespunde unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[k(r, n) = \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right) > k_\alpha(r, n) \right] = 1 - \alpha. \quad (1.97)$$

Rezolvând ecuația (1.97), se obține:

$$\eta < \hat{\eta} \cdot \left[\exp \left(\frac{-k_\alpha(r, n)}{\hat{\beta}} \right) \right]. \quad (1.98)$$

2.3. Intervalului de încredere bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[k_{\frac{\alpha}{2}}(r, n) < k(r, n) = \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right) < k_{1-\frac{\alpha}{2}}(r+1, n) \right] = 1 - \alpha. \quad (1.99)$$

Intervalul de încredere rezultă sub forma:

$$\hat{\eta} \cdot \left[\exp \left(\frac{-k_{1-\frac{\alpha}{2}}(r+1, n)}{\hat{\beta}} \right) \right] < \eta < \hat{\eta} \cdot \left[\exp \left(\frac{-k_{\frac{\alpha}{2}}(r, n)}{\hat{\beta}} \right) \right]. \quad (1.100)$$

2.4. Testarea ipotezelor statistice referitoare la parametrul de scală, față de o valoare de referință η_0 .

În tabelul 1.7 sunt prezentate ipotezele alternative și condițiile de acceptare a ipotezei nule pentru un risc de gradul I egal cu α .

Tabelul 1.7 Verificarea ipotezelor statistice pentru parametrul de scală [MCO 04e]

Ipoteza alternativă $H_1:$	Ipoteza nulă $H_0: \eta = \eta_0$ se acceptă, dacă:
$\eta < \eta_0$	$k_\alpha(r, n) < \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta_0} \right).$
$\eta > \eta_0$	$\hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta_0} \right) < k_{1-\alpha}(r+1, n)$
$\eta \neq \eta_0$	$k_{\frac{\alpha}{2}}(r, n) < \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta_0} \right) < k_{1-\frac{\alpha}{2}}(r+1, n)$

Exemplu numeric

Considerăm un eșantion de volum n , supus testării. În urma încercărilor pe stand, trunchiate la durata $t_c = 300$ ore, se constată deteriorarea a $r = 10$ produse în intervalul de testare $(0, 300)$.

Estimatorii punctuali de verosimilitate maximă, ai repartiției Weibull, determinați prin rezolvarea sistemului de ecuații (1.84), pe baza celor 10 durate de funcționare până la deteriorare sunt:

$$\begin{cases} \hat{\beta} = 1.22 \\ \hat{\eta} = 268 \end{cases}$$

Realizarea inferențelor statistice pentru valorile estimate ale celor doi parametri presupun cunoaștere valorilor variabilelor aleatorii $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$ și $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$. Aceste valori sunt prezentate în tabelul 1.8 și 1.9.

Tabelul 1.8 Valorile variabilei aleatorii $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$ [MCO 04e]

N	r	Cuantilele variabilei aleatorii $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$											
		$v_{2.5}$	$v_{0.5}$	$v_{10.0}$	$v_{20.0}$	$v_{30.0}$	$v_{50.0}$	$v_{70.0}$	$v_{80.0}$	$v_{90.0}$	$v_{95.0}$	$v_{97.5}$	v_m
15	3	0.5493	0.6455	0.7771	1.003	1.217	1.769	2.650	3.532	5.544	8.205	11.810	2.897
	4	0.5586	0.6400	0.7563	0.933	1.102	1.463	2.027	2.498	3.496	4.754	6.383	1.946
	5	0.5806	0.6499	0.7509	0.9096	1.043	1.331	1.751	2.105	2.733	3.515	4.345	1.621
	6	0.5993	0.6653	0.7528	0.8931	1.013	1.251	1.596	1.860	2.348	2.872	3.475	1.451
	7	0.6123	0.6785	0.7623	0.8859	0.991	1.206	1.484	1.706	2.079	2.487	2.941	1.348
	8	0.6316	0.6918	0.7723	0.881	0.9798	1.169	1.419	1.614	1.927	2.242	2.552	1.284
	9	0.6458	0.703	0.7757	0.884	0.9738	1.144	1.363	1.527	1.804	2.082	2.338	1.235
	10	0.6617	0.7198	0.7843	0.8845	0.9666	1.124	1.327	1.471	1.711	1.953	2.179	1.201
	11	0.6705	0.7279	0.7917	0.8855	0.9647	1.107	1.287	1.416	1.631	1.836	2.083	1.174
	12	0.6866	0.7346	0.7996	0.8894	0.9595	1.097	1.263	1.377	1.572	1.758	1.932	1.152
	13	0.6994	0.7476	0.8094	0.8893	0.9584	1.087	1.234	1.339	1.515	1.682	1.836	1.133
	14	0.7100	0.7591	0.8186	0.8917	0.9547	1.076	1.216	1.315	1.473	1.623	1.787	1.118
	15	0.7245	0.7674	0.8244	0.898	0.9537	1.068	1.198	1.286	1.428	1.565	1.708	1.105

Ele au fost determinate folosind un program scris în Mathcad 14. Algoritmul programului este cel din fig. 1.20, în care:

$$N_{sim} = 10000.$$

Conform ecuației (1.93) și utilizând valorile din tabelul 1.8, pentru un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.90$, intervalul bilateral simetric, al parametrului de formă, va avea valoarea:

$$\frac{1.22}{1.836} = 0.664 < \beta < \frac{1.22}{0.7198} = 1.695.$$

Conform ecuației (1.100), intervalul bilateral simetric, al parametrului de scală, va avea valoarea, pentru un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.90$:

$$268 \cdot \left[\exp\left(\frac{-0.4755}{1.22}\right) \right] = 181.496 < \eta < 268 \cdot \left[\exp\left(\frac{-0.876}{1.22}\right) \right] = 549.731.$$

Tabelul 1.9 Valorile variabilei aleatorii $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$ [MCO 04e]

N	r	Cuantilele variabilei aleatorii $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$											
		$k_{2.5}$	$k_{0.5}$	$k_{10.0}$	$k_{20.0}$	$k_{30.0}$	$k_{50.0}$	$k_{70.0}$	$k_{80.0}$	$k_{90.0}$	$k_{95.0}$	$k_{97.5}$	k_m
15	3	-20.640	-13.700	-8.457	-4.756	-3.067	-1.374	-0.3880	0.0334	0.4506	0.7049	0.8810	-3.529
	4	-8.353	-5.879	-3.949	-2.392	-1.624	-0.707	-0.1140	0.1552	0.4523	0.6413	0.7795	-1.474
	5	-4.830	-3.574	-2.447	-1.505	-1.031	-0.422	-0.0060	0.1938	0.4294	0.5880	0.7090	-0.831
	6	-3.193	-2.383	-1.654	-1.046	-0.705	-0.268	0.0557	0.2148	0.4010	0.5352	0.6462	-0.515
	7	-2.172	-1.688	-1.210	-0.771	-0.523	-0.179	0.0762	0.2151	0.3839	0.5068	0.6088	-0.336
	8	-1.681	-1.305	-0.943	-0.605	-0.406	-0.129	0.0914	0.2145	0.378	0.4918	0.5896	-0.234
	9	-1.346	-1.051	-0.764	-0.485	-0.313	-0.092	0.1014	0.2178	0.3615	0.4798	0.5773	-0.162
	10	-1.083	-0.876	-0.647	-0.409	-0.269	-0.070	0.1132	0.2125	0.3575	0.4818	0.5860	-0.115
	11	-0.949	-0.749	-0.558	-0.361	-0.234	-0.047	0.1232	0.2207	0.3596	0.4755	0.5896	-0.080
	12	-0.830	-0.657	-0.491	-0.320	-0.208	-0.036	0.1267	0.2249	0.3641	0.4813	0.5919	-0.055
	13	-0.729	-0.590	-0.449	-0.292	-0.191	-0.029	0.1317	0.2296	0.3693	0.4870	0.5965	-0.035
	14	-0.668	-0.549	-0.417	-0.276	-0.174	-0.020	0.1392	0.2344	0.3724	0.4890	0.6015	-0.021
	15	-0.630	-0.511	-0.389	-0.259	-0.168	-0.014	0.1443	0.2390	0.3791	0.4942	0.6069	-0.010

1.2.4 METODELE BAYESIENE DE ESTIMARE PARAMETRICĂ

Analiza preciziei de estimare a metodelor clasice de estimare demonstrează [KEC 82], că atingerea unei precizii rezonabile a estimațiilor parametrice presupune un volum ridicat de rezultate experimentale, greu de atins în aplicațiile curente, în care atât eșantionul supus încercării, cât și durata acestuia sunt limitate, din considerente economice.

O modalitate de ridicare a preciziei estimărilor se bazează pe ideea că, înainte de efectuarea unei încercări de fiabilitate a unui produs, există anumite informații asupra fiabilității acestuia, informații care dacă nu ar fi neglijate, ar contribui la caracterizarea sa mai precisă.

Calculul estimațiilor parametrice bayesiene, având la bază modelul [SOL 68], [SOL 69], [MCO 98b], presupune parcurgerea următoarelor etape:

a. **Alegerea modelului repartiției condiționale** (a tipului de proces analizat) – $f(t)$

Acest model reprezintă de fapt repartiția statistică a timpilor de funcționare până la deteriorare a elementelor analizate. În cazul testării anumitor produse, repartiția condițională este modelul repartiției Weibull. Pentru comoditatea efectuării calculelor, se utilizează ca model al timpilor de deteriorare repartiția biparametrică Weibull, $\mathcal{W}(t, \beta, \lambda)$, având funcția densitate de probabilitate de forma ecuației:

$$f(t) = \beta \cdot \lambda \cdot t^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t^{\beta}}. \quad (1.101)$$

Legătura care există între parametrul λ al acestei repartiții și parametrul de scală poate fi exprimată prin relația:

$$\lambda = \frac{1}{\eta^{\beta}}. \quad (1.102)$$

b. **Specificarea repartițiilor apriorice**

Se utilizează în cazul:

- parametrului de formă (β) o repartiție discretă:

$$Pr(\beta = \beta_i) = p_i, \quad (1.103)$$

în care: $i = \overline{1, k}$ și $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

- parametrului de scală (λ) repartiția Gama, având funcția densitate de probabilitate, condiționată de valorile parametrului de formă (1.103), și anume:

$$h(\lambda|\beta_i) = \frac{\alpha_i^{q_i} \cdot \lambda^{q_i-1}}{\Gamma(q_i)} \cdot e^{-\lambda\alpha_i}, \quad (1.104)$$

cu $i = \overline{1, k}$, $0 \leq \lambda < \infty$, $0 \leq q_i$, $\alpha_i < \infty$.

Din relația (1.104) se observă că repartiția apriorică a lui λ , $h(\lambda|\beta_i)$, depinde de β_i , prin intermediul parametrilor α_i și q_i .

c. Determinarea probabilității condiționate (a funcției de verosimilitate)

Presupunem că se realizează o încercare de fiabilitate de tip cenzurat, la nivelul r . Cu cele n produse supuse încercării se înregistrează următorii timpi de deteriorare:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(j)} \leq \dots \leq t_{(r)}$$

Variabila aleatorie T , care modelează fenomenul de deteriorare, are funcția densitate de probabilitate dată de ecuația (1.101).

Repartiția condiționată sau verosimilitatea eșantionului este:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda, \beta|t_j) &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \left[\prod_{j=1}^r f(t_j) \right] \cdot [1 - F(t_r)]^{n-r} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \lambda^r \cdot \beta^r \cdot (t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_r)^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda \cdot [\sum_{j=1}^r t_j^\beta + (n-r) \cdot t_r^\beta]} = \\ &= C \cdot \lambda^r \cdot \beta^r \cdot u^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda \cdot v}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

În relația (1.105) s-au notat:

$$\begin{cases} C = \frac{n!}{(n-r)!} \\ u = \prod_{j=1}^r t_j \\ v = -\lambda \cdot \left[\sum_{j=1}^r t_j^\beta + (n-r) \cdot t_r^\beta \right] \end{cases}. \quad (1.106)$$

d. Teorema lui Bayes

Utilizând teorema lui Bayes, aplicată funcțiilor densitate de probabilitate și celor de probabilitate, definite anterior, se obține funcția densitate de probabilitate bidimensională a posteriori, pentru o valoare particulară a parametrului de forma, $\beta = \beta_i$, a cărei probabilitate de apariție este p_i :

$$g(t_1, t_2, \dots, t_r | \lambda, \beta_i) = \frac{p_i \cdot h(\lambda|\beta_i) \cdot \mathcal{L}(\lambda, \beta|t_j)}{\int_0^\infty \sum_{i=1}^k p_i \cdot h(\lambda|\beta_i) \cdot \mathcal{L}(\lambda, \beta|t_j) \cdot d\lambda} = \quad (1.107)$$

$$= \frac{p_i \cdot \lambda^r \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot e^{-\lambda \cdot v_i} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i} \cdot \lambda^{q_i-1}}{\Gamma(q_i)} \cdot e^{-\lambda \cdot \alpha_i}}{\sum_{i=1}^r \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \right] \cdot \int_0^\infty \lambda^{r+q_i-1} \cdot e^{-\lambda \cdot (v_i + \alpha_i)} \cdot d\lambda}$$

Deoarece,

$$\int_0^\infty \lambda^{r+q_i-1} \cdot e^{-\lambda \cdot (v_i + \alpha_i)} \cdot d\lambda = \frac{\Gamma(r + q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}} \quad (1.108)$$

numitorul ecuației (1.108) poate fi scris sub forma:

$$Pr(S) = \sum_{i=1}^r \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \right] \cdot \frac{\Gamma(r + q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}} \quad (1.109)$$

Folosind notația (1.109), densitatea de probabilitate bidimensională a posteriori se mai poate scrie:

$$g(t_1, t_2, \dots, t_r | \lambda, \beta) = \frac{p_i \cdot \lambda^r \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot e^{-\lambda \cdot v_i} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i} \cdot \lambda^{q_i-1}}{\Gamma(q_i)} \cdot e^{-\lambda \cdot \alpha_i}}{Pr(S)} \quad (1.110)$$

Densitatea de probabilitate (1.110) reprezintă o funcție de variabilă aleatorie bidimensională (λ și β_i). Pe baza ei se pot determina repartițiile de probabilitate marginale ale celor două variabile aleatorii. Acestea reprezintă repartițiile a posteriori pentru cei doi parametri necunoscuți (λ și β_i) ai procesului Weibull analizat:

$$\begin{aligned} Pr(\beta = \beta_i | t_j) &= p_{pi} = \int_0^\infty g(t_1, t_2, \dots, t_r | \lambda, \beta_i) \cdot d\lambda = \\ &= \frac{p_i \cdot \beta_i^{r+1} \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \frac{\Gamma(r + q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}}}{Pr(S)}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

și

$$\begin{aligned} g(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_r) &= \sum_{i=1}^k g(t_j | \lambda, \beta_i) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot e^{-\lambda \cdot (v_i + \alpha_i)} \cdot \lambda^{r+q_i-1} \right]}{Pr(S)}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Pentru o valoare $\beta = \beta_i$, repartiția a posteriori a parametrului de scală rezultă din ecuația (1.112), sub forma:

$$g_p(\lambda | t_j, \beta_i) = \frac{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i} \cdot \lambda^{r+q_i-1}}{\Gamma(r + q_i)} \cdot e^{-\lambda \cdot (v_i + \alpha_i)}. \quad (1.113)$$

e. Estimații parametrice bayesiane

Dacă se adoptă o funcție de pierderi de forma [CAN 70]:

$$\mathbb{L}(\hat{\theta}_{\mathfrak{B}}, \theta) = (\hat{\theta}_{\mathfrak{B}} - \theta)^2, \quad (1.114)$$

estimatorul bayesian parametric ($\hat{\theta}_{\mathfrak{B}}$) al parametrului necunoscut θ îl reprezintă media repartiției

a posteriori.

În cazul procesului analizat:

- a. estimatorul bayesian al parametrului de formă se obține prin utilizarea repartiției a posteriori (1.111), din condiția:

$$\hat{\beta}_{\mathfrak{B}} = E(\beta|t_j) = \sum_{i=1}^k p_{pi} \cdot \beta_i = \frac{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^{r+1} \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \frac{\Gamma(r+q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}} \right]}{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \frac{\Gamma(r+q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}} \right]}. \quad (1.115)$$

- b. estimatorul bayesian al parametrului de scală se obține prin utilizarea repartiției a posteriori (1.112), din condiția:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{\mathfrak{B}} = E(\lambda|t_j) &= \int_0^{\infty} \lambda \cdot g_p(\lambda|t_j) \cdot d\lambda = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot (v_i + \alpha_i)} \cdot \lambda^{r+q_i} \cdot d\lambda \right]}{Pr(S)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \frac{\Gamma(r+q_i+1)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i+1}} \right]}{\sum_{i=1}^k \left[p_i \cdot \beta_i^r \cdot u^{\beta_i-1} \cdot \frac{\alpha_i^{q_i}}{\Gamma(q_i)} \cdot \frac{\Gamma(r+q_i)}{(v_i + \alpha_i)^{r+q_i}} \right]}. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Introducând în relația (1.102) valoarea lui $\hat{\lambda}_{\mathfrak{B}}$, determinată cu relația (1.116), se obține estimăția punctuală bayesiană pentru parametrul de scală ($\hat{\eta}_{\mathfrak{B}}$):

$$\hat{\eta}_{\mathfrak{B}} = \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_{\mathfrak{B}}} \right)^{1/\hat{\beta}_{\mathfrak{B}}}. \quad (1.117)$$

Succesul utilizării metodelor bayesiene, de estimare parametrică, depinde de modalitatea de exprimare a informației anterioare disponibile, privind fiabilitatea produsului analizat, sub forma repartițiilor apriorice.

Calculul estimațiilor punctuale $\hat{\beta}_{\mathfrak{B}}$ și $\hat{\eta}_{\mathfrak{B}}$, prin intermediul ecuațiilor (1.115) și (1.116), presupune cunoașterea parametrilor β_i , p_i , α_i , și q_i , $i = \overline{1, k}$.

În continuare [MCO 00a], se propune o metodă de specificare completă a repartițiilor apriorice pe baza unor informații obiective obținute în urma încercărilor la fiabilitate, coroborate cu rezultatele obținute prin simulare numerică Monte - Carlo. Metoda utilizează proprietățile estimatorilor liniari de tip BLIE ai repartiției Weibull, cea care modelează fenomenul de deteriorare a produselor.

Utilizarea estimatorilor de tip BLIE, (1.33), la estimarea parametrilor repartiției biparametrice Weibull are la bază următoarea afirmație [KEC 93], [MAN 74]: dacă variabila aleatorie T urmează o repartiție biparametrică Weibull, atunci variabila aleatorie X , în care $X = \ln T$, urmează o repartiție [KRI 06], a valorilor extreme minime de tip I (repartiție Gumbel), dată de ecuația:

$$f(x) = \frac{1}{\delta} \cdot e^{\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \delta > 0. \quad (1.118)$$

Între parametrii celor două repartiții se pot stabili următoarele relații de echivalență:

$$\begin{cases} \delta = 1/\beta \\ \gamma = \ln\eta \\ x = \ln t \end{cases} \quad (1.119)$$

Astfel, estimațiile parametrice punctuale ale parametrilor repartiției Weibull se obțin din sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{BLIE} = A(n, r, 1) \cdot \ln t_1 + A(n, r, 2) \cdot \ln t_2 + \dots + A(n, r, r) \cdot \ln t_r \\ \hat{\delta}_{BLIE} = C(n, r, 1) \cdot \ln t_1 + C(n, r, 2) \cdot \ln t_2 + \dots + C(n, r, r) \cdot \ln t_r \end{cases} \quad (1.120)$$

și relațiile de echivalență:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{BLIE} = \frac{1}{\hat{\delta}_{BLIE}} \\ \hat{\eta}_{BLIE} = e^{\hat{\gamma}_{BLIE}} \end{cases} \quad (1.121)$$

Metoda propusă, în continuare, permite:

a) Estimarea parametrilor β_i și p_i :

Pentru realizarea acestei operații se consideră că informația apriorică referitoare la parametrul de formă se prezintă sub forma unei valori estimate, $\hat{\beta}_{BLIE}$, obținute în urma prelucrării statistice a rezultatelor unei încercări anterioare experimentului propriu-zis. Această încercare se consideră efectuată, utilizând un eșantion de volum n_a cenzurat la nivelul r_a .

De asemenea, metoda utilizează proprietatea estimatorilor liniari de tip BLIE: $\beta/\hat{\beta}_{BLIE} = W(r, n)$.

Prin combinarea informației apriorice, $\hat{\beta}_{BLIE}$, cu parametrii corespunzători ai repartiției de frecvență a variabilei aleatorii $W(r, n)$, rezultă valorile necunoscute ale parametrilor β_i și p_i . În acest scop se utilizează algoritmul din fig. 1.21 [MCO 09]. Astfel, se simulează N_{sim} eșantioane de volum n , cenzurate la nivelul r și se determină valorile variabilei aleatorii $W(r_a, n_a)$.

Din relația de definiție a lui $W(r, n)$, se obține seria statistică:

$$W_{(1)}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE} \leq W_{(2)}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE} \leq \dots \leq W_{(N_{sim})}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE}, \quad (1.122)$$

care combină informația apriorică cu rezultatele numerice simulate.

- Determinarea amplitudinii seriei statistice (R):

$$R = W_{(N_{sim})}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE} - W_{(1)}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE}. \quad (1.123)$$

- Determinarea numărului de clase (k), utilizând formula lui Sturges:

$$k = 1 + \frac{10}{3} \cdot \ln N_{sim}. \quad (1.124)$$

- Determinarea amplitudinii unei clase (w):

$$w = \frac{R}{k} \quad (1.125)$$

- Calculul limitelor claselor ($y_i, i=0,1,\dots,k$):

$$y_0 = W_{(1)}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE}$$

.....

$$y_i = y_{i-1} + i \cdot w$$

.....

$$y_k = y_{k-1} + k \cdot w = W_{(N_{sim})}(r_a, n_a) \cdot \hat{\beta}_{BLIE}$$

- Calculul valorii centrale a claselor ($y'_i, i = \overline{1, k}$):

$$y'_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \quad (1.126)$$

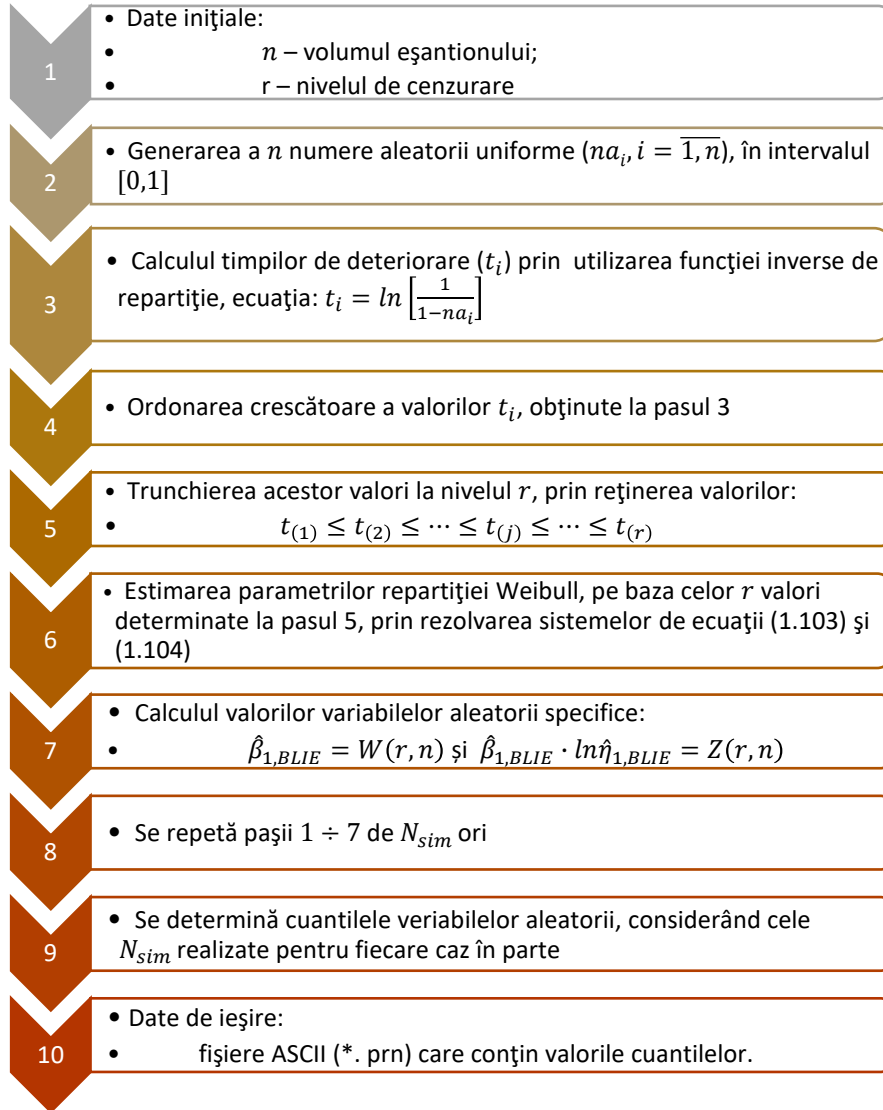


Fig. 1.21 Algoritm de calcul utilizat pentru simularea încercărilor cenzurate și estimarea parametrilor folosind estimatorii liniari tip BLIE [MCO 09]

- Determinarea frecvențelor absolute ($n_i, i = \overline{1, k}$). Acestea indică numărul de valori ale seriei statistice cuprinse în fiecare clasă.
- Calculul frecvențelor relative ($f_i, i = \overline{1, k}$):

$$f_i = \frac{n_i}{N_{sim}} \quad (1.127)$$

Cu valorile astfel determinate se pot estima parametrii repartiției apriorice (1.103), utilizând relațiile:

$$\begin{cases} \beta_i = y_i' \\ p_i = f_i \end{cases} \quad (1.128)$$

b) Estimarea parametrilor α_i și q_i ai repartiției Gama, pentru $\beta = \beta_i$, se realizează făcând apel la proprietăților de care se bucură repartiția Weibull.

Fie T variabila aleatorie Weibull biparametric repartizată. Prin schimbarea de variabilă aleatorie, $X = T^{\beta_i}$, în care β_i ($i = \overline{1, k}$) reprezintă valorile specificate anterior ale parametrului de formă, noua variabilă aleatorie, X , este repartizată exponențial

$$f(x) = \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i \cdot x} \quad (1.129)$$

Estimația de verosimilitate maximă a parametrului λ_i :

$$\hat{\lambda}_i = r_a \cdot \left[\sum_{j=1}^{r_a} x_j + (n_a - r_a) \cdot x_r \right]^{-1}, \quad (1.130)$$

are proprietatea:

$$\frac{2 \cdot r \cdot \lambda_i}{\hat{\lambda}_i} \propto \chi^2(x, 2 \cdot r), \quad (1.131)$$

Funcția densitate de probabilitate a repartiției Hi-pătrat, cu ν grade de libertate, este de forma:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot x^{\nu/2-1} \cdot e^{-x/2}. \quad (1.132)$$

Prin schimbarea de variabilă aleatorie, $Y = \sigma^2 \cdot X$, aplicată relației (1.132), se obține:

$$\begin{aligned} F(y) = Pr(Y \leq y) &= Pr(\sigma^2 \cdot X \leq y) = Pr\left(X \leq \frac{y}{\sigma^2}\right) = \\ &= \int_0^{\frac{y}{\sigma^2}} \frac{1}{(2 \cdot \sigma^2)^{\nu/2} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot y^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot dy. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Relația (1.133) reprezintă, de asemenea, funcția de repartiție a modelului statistic gama, $\chi^2(y, \nu, \sigma^2)$. Prin alegerea convenabilă a parametrului σ^2 ($\sigma^2 = \hat{\lambda}_i / 2 \cdot r$), se obține:

$$y = \sigma^2 \cdot X = \frac{\hat{\lambda}_i}{2 \cdot r} \cdot \frac{2 \cdot r \cdot \lambda_i}{\hat{\lambda}_i} = \lambda_i, \quad (1.134)$$

Introducând relația (1.134) în repartiția (1.133), rezultă:

$$f(\lambda_i) = \frac{1}{\left(\frac{\hat{\lambda}_i}{r}\right)^r \cdot \Gamma(r)} \cdot \lambda_i^{r-1} \cdot \exp(-r \cdot \lambda_i / \hat{\lambda}_i). \quad (1.135)$$

Între repartiția parametrului λ_i , dată de relația (1.135) și repartiția $\mathcal{G}(x, \alpha_i, q_i)$, din ecuația (1.104), se pot stabili următoarele relații de echivalență:

$$\begin{cases} q_i = r \\ \alpha_i = \frac{r}{\hat{\lambda}_i} \end{cases} \quad (1.136)$$

Cea de-a doua ecuație din (1.136) poate fi scrisă în funcție de valoarea apriorică a parametrului de scală ($\hat{\eta}_{ai}$) și de valorile, β_i , ale repartiției apriorice pentru parametrul de formă:

$$\alpha_i = r \cdot \hat{\eta}_{a_i}^{\beta_i} \quad (1.137)$$

Parametrii q_i și α_i , astfel obținuți, reprezintă valorile estimate ale parametrilor repartiției apriorice pentru parametrul de scală.

Rezultate numerice simulate

Pentru a demonstra eficacitatea metodei de specificare completă a repartițiilor apriorice utilizate la estimarea parametrilor modelului Weibull, în tabelul 1.10 este prezentată o serie de rezultate obținute prin simulare numerică, comparativ cu rezultatele obținute prin utilizarea metodei estimatorilor liniari de tip BLIE.

Tabelul 1.10 Rezultate comparative obținute prin simulare numerică [MCO 00a]

Încercare n/r	Estimator		$\bar{\theta}$	θ_{min}	θ_{max}	R_{θ}	s_{θ}^2
5/5	BLIE	β	1.422	0.460	6.915	6.455	0.625
		η	1.173	0.181	3.802	3.620	0.284
	\mathfrak{B}	β	1.339	1.178	3.758	2.582	0.101
		η	0.995	0.538	2.139	1.600	0.059
10/5	BLIE	β	1.556	0.376	8.431	8.054	0.854
		η	1.160	0.209	7.823	7.614	0.457
	\mathfrak{B}	β	1.370	0.831	3.695	2.864	0.159
		η	0.998	0.613	1.836	1.223	0.036
10/10	BLIE	β	1.178	0.488	5.419	4.930	0.159
		η	1.098	0.270	2.496	2.225	0.121
	\mathfrak{B}	β	1.304	0.954	2.297	1.342	0.051
		η	1.196	0.761	1.801	1.039	0.026
20/5	BLIE	β	1.654	0.390	9.856	9.465	1.199
		η	1.028	0.056	11.650	11.595	1.104
	\mathfrak{B}	β	1.711	1.587	5.514	3.926	0.159
		η	0.562	0.365	1.467	1.102	0.016
20/10	BLIE	β	1.216	0.451	3.872	3.421	0.188
		η	1.049	0.250	3.502	3.252	0.169
	\mathfrak{B}	β	1.352	0.653	2.109	1.617	0.060
		η	0.957	0.669	1.728	0.977	0.019
20/20	BLIE	β	1.081	0.586	1.919	1.332	0.042
		η	1.051	0.522	1.946	1.424	0.057
	\mathfrak{B}	β	1.089	0.839	1.447	0.608	0.010
		η	0.847	0.592	1.234	0.641	0.011

Rezultatele prezentate s-au obținut prin prelucrarea statistică a estimațiilor bayesiene (\mathfrak{B}) și BLIE calculate pentru $N_{sim} = 1000$ de eșantioane ($n = r = 5; 10; 20$), aparținând unei populații Weibull

cu parametri $\beta = \eta = 1$. Pentru a evidenția proprietățile estimatorilor analizați s-au calculat: amplitudinea (R_{θ}), media aritmetică ($\bar{\theta}$), valoarea minimă (θ_{min}) și valoarea maximă (θ_{max}) precum și dispersia (s_{θ}^2) estimatorilor.

Parametrii repartițiilor apriorice utilizate s-au stabilit pe baza unui eșantion având $n_a = n$ și $r_a = r$, aparținând aceleiași populații Weibull.

Analiza rezultatelor, prezentate în tabelul 1.10, ne permite să tragem următoarele concluzii:

- Împrăștierea estimatorilor bayesieni (R_{θ} și s_{θ}^2) este substanțial mai mică decât cea a estimatorilor liniari BLIE. Această concluzie este susținută și de figurile 1.22 și 1.23, în care sunt reprezentate alurile repartițiilor apriorice și a posteriori, ale celor doi parametri, β și η în cazul $n = 20$ și $r = 15$.

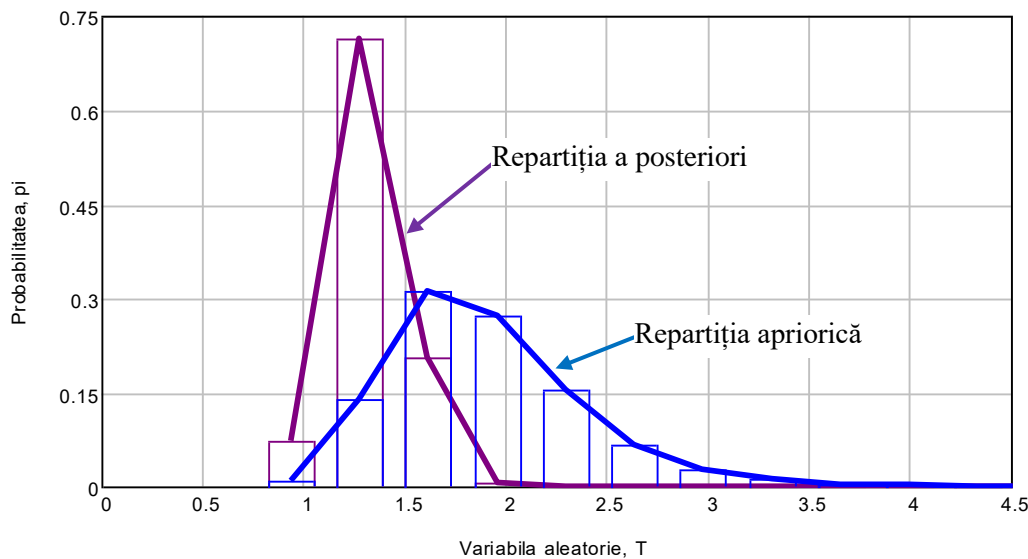


Fig. 1.22 Alura repartițiilor apriorice și a posteriori pentru parametrul de formă [MCO 00a]

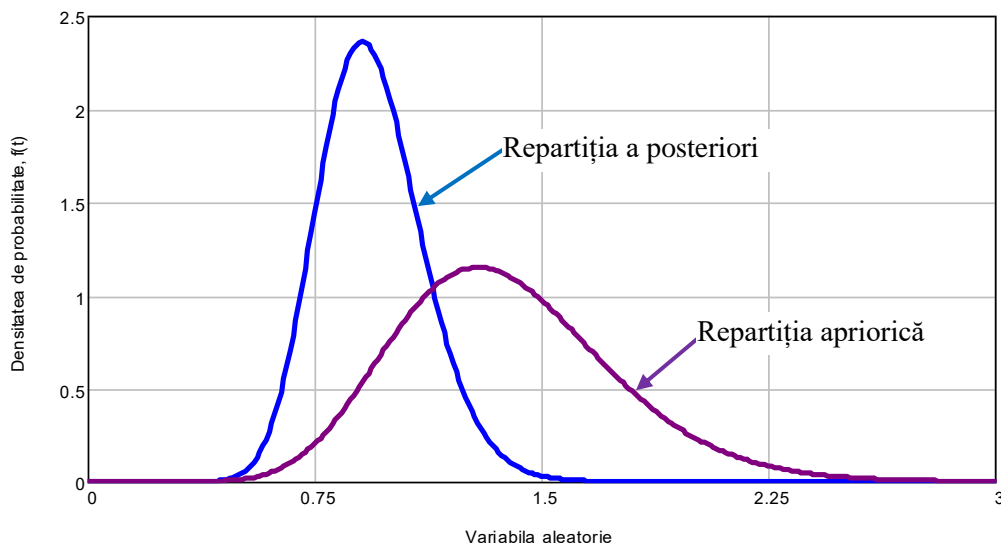


Fig. 1.23 Alura repartițiilor apriorice și a posteriori pentru parametrul de scală [MCO 00a]

- Valoarea parametrului de poziționare a estimațiilor ($\bar{\theta}$), aproximativ egală în cele două cazuri analizate, indică faptul că deplasarea inițială introdusă de estimatorii liniari se conservă în timpul operației de estimare bayesiană.

1.3 CERCETĂRI PRIVIND ESTIMAREA PARAMETRILOR ȘI INDICATORILOR DE FIABILITATE ÎN CAZUL REPARTIȚIEI EXPONENȚIALE

O variabilă aleatorie continuă, T , este exponențial repartizată cu parametrul λ , dacă funcția densitate de probabilitate este de forma [KRI 06], [HAH 67]:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \text{ pentru } \lambda > 0, x \geq 0. \quad (1.138)$$

și se notează, $X \sim \mathcal{E}(t, \lambda)$.

Alura funcției densitate de probabilitate, a repartiției exponențiale, pentru diferite valori ale parametrului λ , este prezentată în fig. 1.24. Se constată că pentru valoarea variabilei aleatorii $x = 0$, valoarea funcției densitate de probabilitate este, $f(0) = \lambda$.

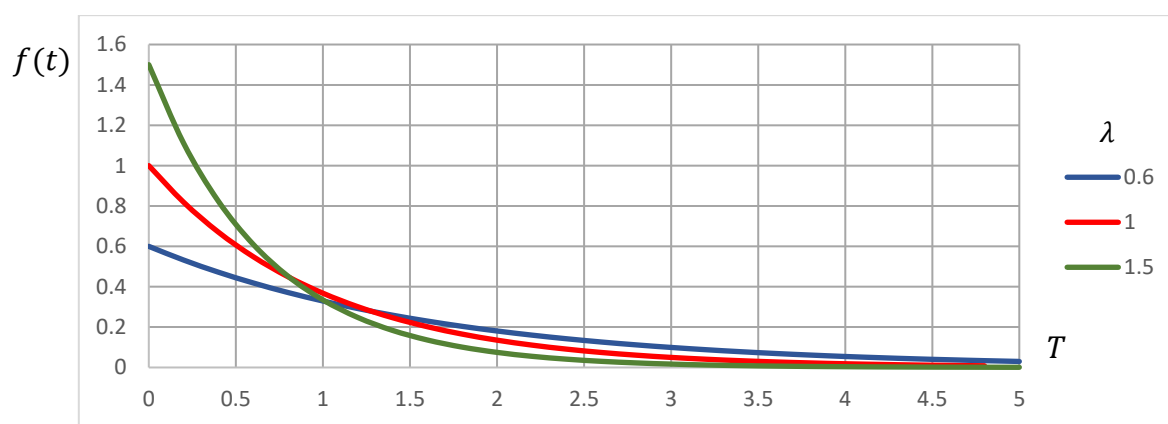


Fig. 1.24 Alura funcției densitate de probabilitate a repartiției exponențiale [MCO 10]

În tabelul 1.11 sunt prezentate expresiile indicatorilor de fiabilitate ai repartiției exponențiale.

Tabelul 1.11 Indicatorii de fiabilitate ai repartiției exponențiale [MCO 10]

Nr. crt.	Indicatorul de fiabilitate	Expresia matematică
1.	Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t},$ $\lambda > 0, t \geq 0.$
2.	Funcția de fiabilitate	$R(t) = Pr(T > t) = e^{-\lambda \cdot t}$
3.	Funcția de nonfiabilitate	$F(t) = Pr(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$
4.	Rata (intensitatea) de defectare	$z(t) = \lambda$
5.	Media variabilei aleatorii	$\mu_T = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda}$
6.	Dispersia variabilei aleatorii	$\sigma_T^2 = \lambda \int_0^{\infty} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda^2}$

Domeniile de utilizare ale repartiției exponențiale [MCO 14], [KEC 91], [KEC 94]:

- teoria așteptării, pentru modelarea timpului dintre intrările în procesele stocastice de tip Poisson;

- variabila aleatorie exponențială poate fi utilizată, de asemenea, în situațiile în care evenimentele se produc cu o probabilitate constantă pe unitate de timp, de distantă, de suprafață sau de volum;
- datorită expresiei matematice, relativ simplă, repartiția exponențială se utilizează pe scară largă la determinarea fiabilității previzionale a componentelor mecanice, componentelor electrice și electronice, a elementelor de automatizare hidraulice și pneumatice;
- modelarea defectărilor în perioada duratei de viață utilă a produselor industriale complexe, având mai mult de 200 de componente;
- modelarea duratei activităților de mentenanță preventivă și a duratelor activității de reparații curente a produselor industriale complexe;
- simularea numerică Monte-Carlo a comportării produselor industriale complexe;
- modelarea unor fenomene naturale, caracterizate prin rată de apariție constantă, de exemplu, rata de sosire de particulelor alfa din radiațiile cosmice;
- modelarea duratei de viață utilă a produselor industriale a căror defectare este datorată arderii, spargerii, sau a altor tipuri de defectări accidentale.

În studiile de fiabilitate sunt multe situații în care estimatorii punctuali ai parametrilor și indicatorilor de fiabilitate sunt foarte dificil de calculat și intervalele de încredere sunt imposibil de obținut prin expresii analitice. Pentru aceste situații, în care expresiile de calcul sunt foarte complicate, calculul intervalelor de încredere se bazează pe proprietățile asimptotice ale estimatorilor de verosimilitate maximă. După cum rezultă, însă, de la punctul 1.1 aceste proprietăți asimptotice nu sunt recomandate a fi utilizate în cazul eșantioanelor de volum mic și puternic cenzurate. De aceea, în ultimii ani a fost dezvoltată o nouă tehnică de estimare bazată pe utilizarea intensivă a calculatoarelor și poartă numele de estimări tip *bootstrap*. Această metodă se adresează, în special, rezolvării unor astfel de situații conducând la obținerea unor interval de încredere cu o acuratețe deosebită.

Deci, această metodă de estimare se recomandă a fi utilizată pentru determinarea, cu un nivel de încredere $1 - \alpha$, a intervalelor în care s-ar găsi valoarea adevărată a unui parametru necunoscut θ , în situațiile în care estimatorul punctual $\hat{\theta}$ este suficient de complicat de calculat și în care teoria statistică obișnuită nu poate fi aplicată pentru obținerea unor expresii matematice.

Tehnica utilizării estimațiilor de tip bootstrap presupune [MON 03], [DEV 10], existența unei populații care trebuie modelată printr-o funcție densitate de probabilitate $f(x, \theta)$ și a unui eșantion de volum n :

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n,$$

prelevat din această populație.

Această metodă presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Utilizarea metodelor clasice de estimare parametrică, vezi punctul 1.1, pentru determinarea estimatorului punctual, $\hat{\theta}$, al parametrilor necunoscuți. Se preferă, totuși, estimațiile de verosimilitate maximă datorită proprietăților remarcabile pe care acestea le au.
2. Se determină prin simulare numerică N eșantioane din această populație, $f(x, \hat{\theta})$, fiecare având același volum de eșantion n :

$$\begin{cases} x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{i,1}, \dots, x_{n,1} \\ x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{i,2}, \dots, x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{1,N}, x_{2,N}, \dots, x_{i,N}, \dots, x_{n,N} \end{cases}.$$

Se recomandă ca aceste eșantioane bootstrap să fie în număr de minim $= 100 \div 200$. Odată cu creșterea numărului de eșantioane simulate crește și acuratețea de estimare.

3. Pentru fiecare dintre cele N eșantioane simulate anterior se calculează estimăția tip bootstrap $\hat{\theta}^*$ a parametrului θ :

$$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_i^*, \dots, \hat{\theta}_N^*.$$

Aceste valori formează populația statistică a estimatorului $\hat{\theta}$ și vor fi utilizate în continuare la determinarea intervalului de încredere $(1 - \alpha)$.

4. Calculul limitelor intervalului de încredere:

$$\hat{\lambda}_L^* = \hat{\theta} - [\hat{\theta} - \theta]_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (1.139)$$

și

$$\hat{\lambda}_U^* = \hat{\theta} - [\hat{\theta} - \theta]_{\frac{\alpha}{2}} \quad (1.140)$$

În ecuațiile (1.139) și (1.140) prin $[\hat{\theta} - \theta]_p$ s-a notat cuantila p a variabilei aleatorii $\hat{\theta} - \theta$.

Deoarece, valoarea adevărată a parametrului θ este necunoscută, aceasta va fi estimată prin utilizarea ecuației:

$$\theta = \bar{\theta}^* = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i^*}{N} \quad (1.141)$$

În ecuația (1.141), $\bar{\theta}^*$ reprezintă valoarea medie a estimațiilor parametrului θ .

Presupunând că avem simulate N eșantioane tip bootstrap și s-au determinat pentru fiecare estimațiile punctuale, precum și valoarea medie a acestora:

$$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_i^*, \dots, \hat{\theta}_N^* \text{ and } \bar{\theta}^*.$$

În continuare se determină diferențele:

$$\hat{\theta}_1^* - \bar{\theta}^*, \hat{\theta}_2^* - \bar{\theta}^*, \dots, \hat{\theta}_N^* - \bar{\theta}^*.$$

Cuantilele date de ecuațiile (1.139) și (1.140), care reprezintă limitele intervalului de încredere pentru o probabilitate $(1 - \alpha)$, se pot calcula direct folosindu-ne de cele N diferențe determinate anterior.

Acest algoritm se poate aplica, cu modificări nesemnificative și în cazul eșantioanelor incomplete.

Pentru a studia precizia estimațiilor de tip bootstrap s-a ales modelul repartiției exponențiale din mai multe considerente [MCO 12b]:

- Repartiția are o expresie matematică relativ simplă.
- Datorită proprietăților pe care le prezintă o variabilă aleatorie exponențial repartizată realizarea inferențelor statistice de verosimilitate maximă nu prezintă dificultăți majore de calcul.

Considerăm o variabilă aleatorie, X , exponențial repartizată, conform ecuației (1.138):

$$X \sim \mathcal{E}(x, \lambda).$$

și un eșantion de volum n prelevat din această populație: x_1, x_2, \dots, x_n . Expresia funcției de verosimilitate (1.25), pentru acest caz, va avea expresia:

$$\mathcal{L}(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \quad (1.142)$$

Estimația de verosimilitate maximă a parametrului necunoscut, λ , se determină din condiția de

maxim al funcției (1.142):

$$\frac{\partial[\mathcal{L}(x_i, \lambda)]}{\partial \lambda} = 0.$$

Deoarece este mult mai comod să operăm cu logaritmul funcției de verosimilitate, acesta va avea expresia:

$$\ln \mathcal{L}(x_i, \lambda) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Din condiția de maxim a logaritmului funcției de verosimilitate, se obține:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \mathcal{L}(x_i, \lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad (1.143)$$

Rezolvând ecuația (1.143), se obține expresia de calcul a estimației punctuale pentru parametrul λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}, \quad (1.144)$$

În [KEC 93] se demonstrează că statistica:

$$\frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\lambda} \sim \chi^2(x, 2 \cdot n),$$

este hi-pătrat repartizată cu $2 \cdot n$ grade de libertate. Intervalul de încredere bilateral simetric, pentru o probabilitate $(1 - \alpha)$, al parametrului λ se determină cu ajutorul ecuației (1.9) și este de forma:

$$Pr \left[\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2 \leq \frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\lambda} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2 \right] = 1 - \alpha.$$

După o serie de prelucrări, ecuația anterioară devine:

$$Pr \left[\frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2} \leq \lambda \leq \frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2} \right] = 1 - \alpha,$$

iar cele două limite vor avea expresiile:

$$\hat{\lambda}_L = \frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2} \quad (1.145)$$

și

$$\hat{\lambda}_U = \frac{2 \cdot n \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot n}^2}. \quad (1.146)$$

În cazul eșantioanelor de volum n , cenzurate la nivelul $r, r \leq n$, funcția de verosimilitate este de forma:

$$\mathcal{L}(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^r f(x_i) \cdot [1 - F(t_r)]^{n-r} = \lambda^r \cdot e^{-\lambda \cdot [\sum_{i=1}^n x_i + (n-r) \cdot t_r]}, \quad (1.147)$$

iar, logaritmul funcției (1.147):

$$\ln \mathcal{L}(x_i, \lambda) = r \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^r x_i + (n-r) \cdot t_r \right]. \quad (1.148)$$

Din condiția de maxim a logaritmului funcției de verosimilitate, se obține:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_i, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^r x_i - (n-r) \cdot t_r = 0.$$

Rezultă:

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^r x_i + (n-r) \cdot t_r} \quad (1.149)$$

Ecuția (1.149) reprezintă expresia de calcul al estimatorului punctual de verosimilitate maximă pentru parametrul λ .

Și în acest caz se poate demonstra că statistica:

$$\frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\lambda} \sim \chi^2(x, 2 \cdot r),$$

este hi-pătrat repartizată cu $2 \cdot r$ grade de libertate [KEC 93]. Intervalul de încredere bilateral simetric, pentru o probabilitate $(1 - \alpha)$, al parametrului λ se determină cu ajutorul ecuației (1.9) și este de forma:

$$Pr \left[\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2 \leq \frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\lambda} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2 \right] = 1 - \alpha.$$

După o serie de prelucrări, ecuația anterioară devine:

$$Pr \left[\frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \leq \lambda \leq \frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \right] = 1 - \alpha.$$

Cele două limite ale intervalului de încredere vor avea expresiile:

$$\hat{\lambda}_L = \frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2} \quad (1.150)$$

și

$$\hat{\lambda}_U = \frac{2 \cdot r \cdot \hat{\lambda}}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot r}^2}. \quad (1.151)$$

Studiu de caz

Pentru a ilustra modul de utilizare al estimatorilor de tip bootstrap, precum și precizia lor pentru diferite tipuri de eșantioane exponențial repartizate, au fost generate prin simulare numerică trei eșantioane de volum $n = 10, 20, 30$. Valorile eșantionaj sunt prezentate în tabelul 1.12.

Testarea concordanței acestor eșantioane, cu modelul repartiției exponențiale s-a realizat grafic utilizând rețelele de probabilitate, construite în Minitab. Ele sunt prezentate în fig. 1.25.

De asemenea, pentru calculul estimațiilor de tip bootstrap a fost realizat un program Mathcad 14. Schema logică a acestui program este prezentată în fig. 1.26.

Tabelul 1.12 Eșantioane exponențial repartizate [MCO 12b]

<p><u>Eșantionul nr. 1, $n = 10$:</u> 5.6, 21.0, 25.5, 43.2, 64.0, 76.0, 125.5, 141.7, 166.7, 214.8</p>
<p><u>Eșantionul nr. 2, $n = 20$:</u> 5.2, 8.1, 24.3, 44.0, 44.5, 71.2, 115.9, 121.7, 129.5, 139.0, 189.8, 235.5, 243.8, 254.6, 270.6, 322.2, 339.0, 417.9, 496.5, 531.3</p>
<p><u>Eșantionul nr. 3, $n = 30$:</u> 0.9, 3.7, 4.6, 5.9, 6.8, 9.0, 9.9, 13.0, 16.1, 20.1, 24.9, 27.0, 27.7, 30.2, 34.2, 39.5, 41.0, 45.2, 51.8, 58.8, 60.1, 63.1, 66.9, 66.9, 76.9, 91.3, 93.7, 109.6, 131.3, 171.9</p>

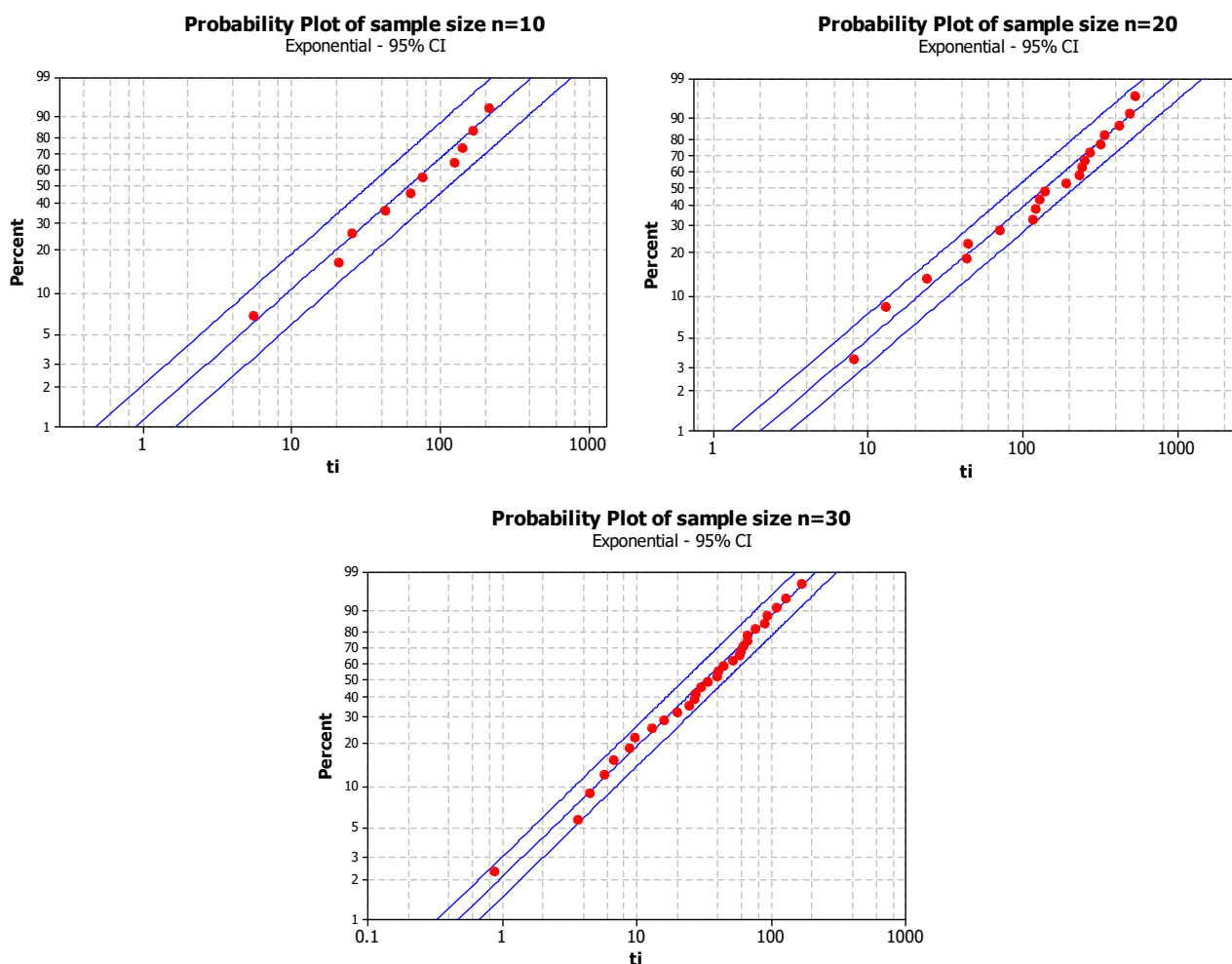


Fig. 1.25 Rețelele de probabilitate pentru eșantioanele din tabelul 1.11 [MCO 12b]

Rezultatele comparative obținute pe baza celor trei eșantioane, cu diferite niveluri de cenzurare, sunt prezentate în tabelul 1.13. S-au folosit estimatorii de verosimilitate maximă și cei de tip bootstrap, calculați pe baza a $N = 10000$ de simulări. Nivelul de încredere a fost stabilit la valoarea $1 - \alpha = 0.90$.

Analiza rezultatelor obținute permit formularea următoarelor concluzii:

- Metoda estimatorilor de tip bootstrap conduce la rezultate asemănătoare cu estimațiile de verosimilitate maximă la eșantioane complete și foarte slab cenzurate, sau pentru situațiile în care estimațiile $\hat{\theta}^*$ nu sunt deplasate.

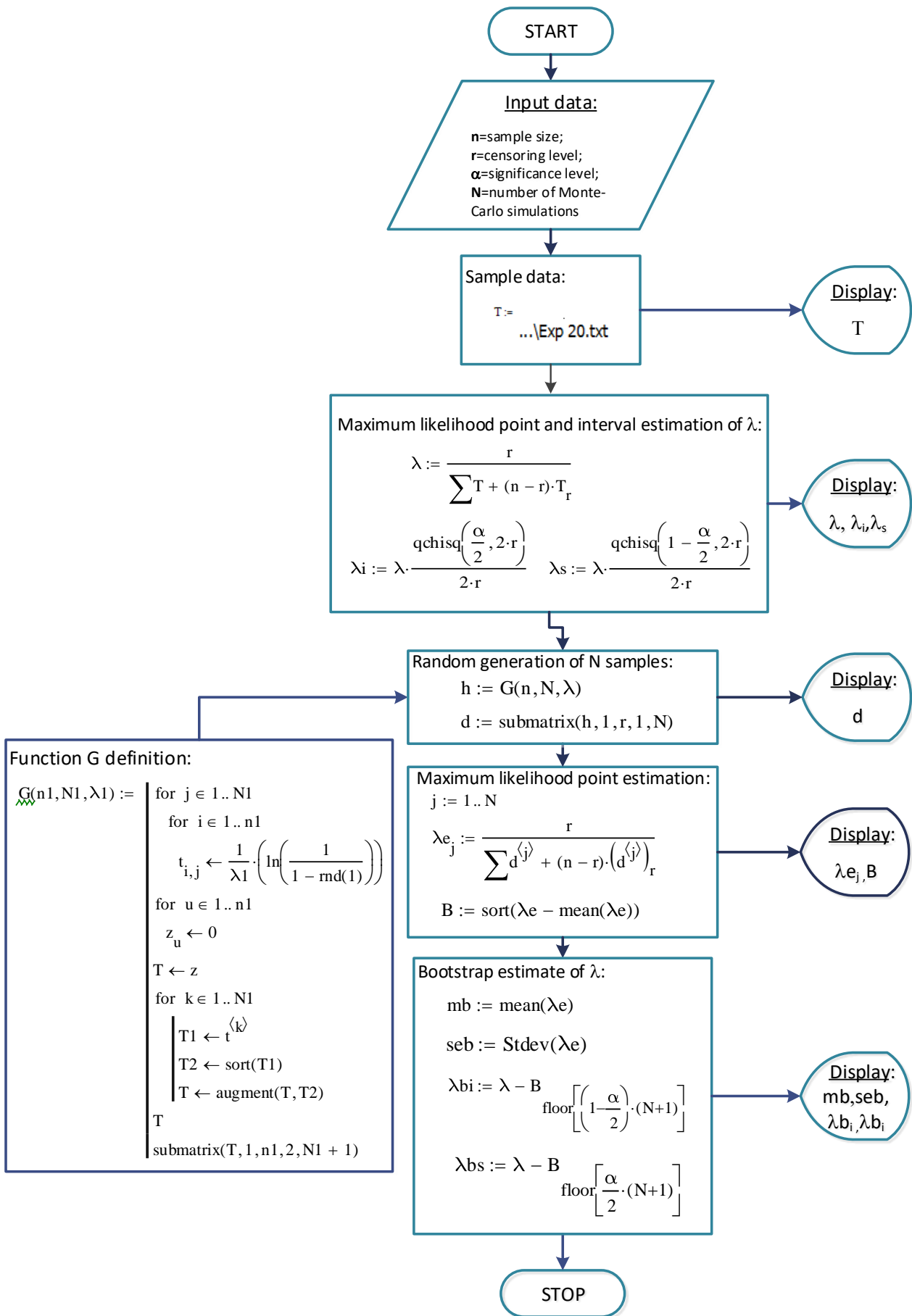
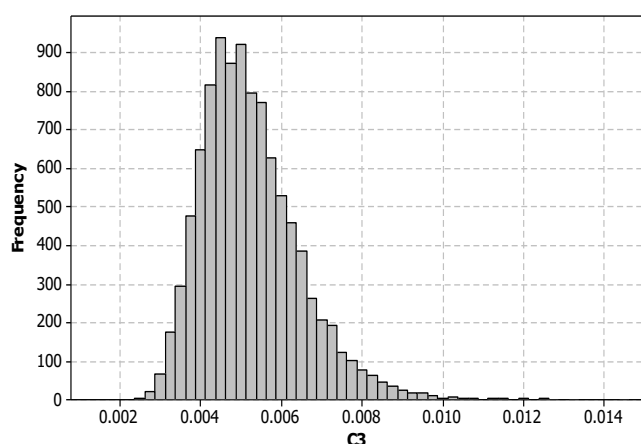
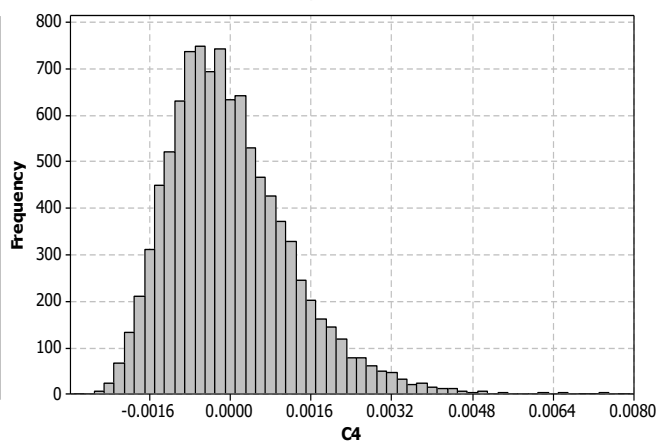


Fig. 1.26 Schema logică a programului Mathcad [MCO 12b]

Tabelul 1.13 Rezultate comparative [MCO 12b]

Planul de testare	Estimator punctual de verosimilitate maximă, $\hat{\lambda}$	Maximum likelihood ($1 - \alpha$) confidence interval			Bootstrap ($1 - \alpha$) confidence interval		
		$\hat{\lambda}_L$	$\hat{\lambda}_U$	$R_{\hat{\lambda}}$	$\hat{\lambda}_L^*$	$\hat{\lambda}_U^*$	$R_{\hat{\lambda}^*}$
Eșantionul nr. 1, $n = 10$							
$r = 5$	0.01043	0.00411	0.01910	0.01499	0.00000	0.01775	0.01775
$r = 10$	0.01131	0.00614	0.01777	0.01163	0.00304	0.01667	0.01363
Eșantionul nr. 2, $n = 20$							
$r = 5$	0.00630	0.00248	0.01153	0.00905	0.00000	0.01074	0.01074
$r = 10$	0.00478	0.00259	0.00750	0.00491	0.00131	0.00704	0.00573
$r = 15$	0.00461	0.00284	0.00673	0.00389	0.00204	0.00639	0.00435
$r = 20$	0.00499	0.00331	0.00696	0.00365	0.00276	0.00665	0.00389
Eșantionul nr. 3, $n = 30$							
$r = 5$	0.02606	0.01027	0.04770	0.03743	0.00000	0.04471	0.04471
$r = 10$	0.02033	0.01103	0.03192	0.02089	0.00542	0.03006	0.02465
$r = 15$	0.02008	0.01238	0.02930	0.01692	0.00908	0.02784	0.01875
$r = 20$	0.01890	0.01252	0.02634	0.01382	0.01032	0.02521	0.01489
$r = 25$	0.02103	0.01462	0.02839	0.01377	0.01265	0.02735	0.01470
$r = 30$	0.02140	0.01540	0.02820	0.01280	0.01379	0.02717	0.01338

- în celelalte cazuri, intervalul de încredere obținut pe baza estimațiilor de tip bootstrap are o amplitudine un pic mai mare deoarece estimațiile de verosimilitate maximă sunt asimptotic nedepășite. Acest aspect rezultă din histogramele prezentate în figurile 1.27 și 1.28, tratate în cazul $n = r = 20$ și respectiv $n = 20$ și $r = 5$.
- tehnica de estimare bazată pe metoda bootstrap poate fi aplicată cu succes și în cazurile eșantioanelor incomplete

a) Histograma estimațiilor $\hat{\theta}_i^*$ b) Histograma estimațiilor $\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*$ Fig. 1.27. Histograma estimațiilor de tip bootstrap pentru eșantioane complete $n = 20$

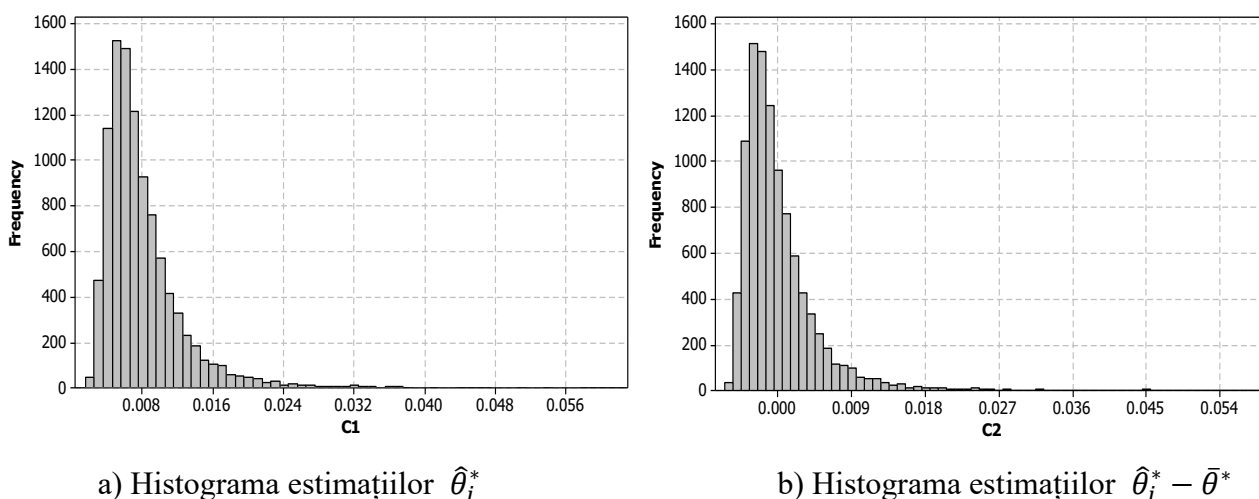


Fig. 1.28 Histograma estimațiilor de tip bootstrap pentru eșantioane cenzurate, $n = 20$ și $r = 5$

1.4 CERCETĂRI PRIVIND ESTIMAREA PARAMETRILOR ȘI INDICATORILOR DE FIABILITATE ÎN CAZUL REPARTIȚIEI RAYLEIGH

O variabilă aleatorie continuă, T , este Rayleigh repartizată cu parametrul η , dacă funcția densitate de probabilitate este de forma [KRI 06], [HAH 67]:

$$f(t) = \frac{t}{\eta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^2}, \eta > 0, T > 0. \quad (1.152)$$

și se notează, $X \sim \mathcal{R}(t, \eta)$.

Alura funcției densitate de probabilitate, a repartiției Rayleigh, pentru diferite valori ale parametrului η este prezentată în fig. 1.29.

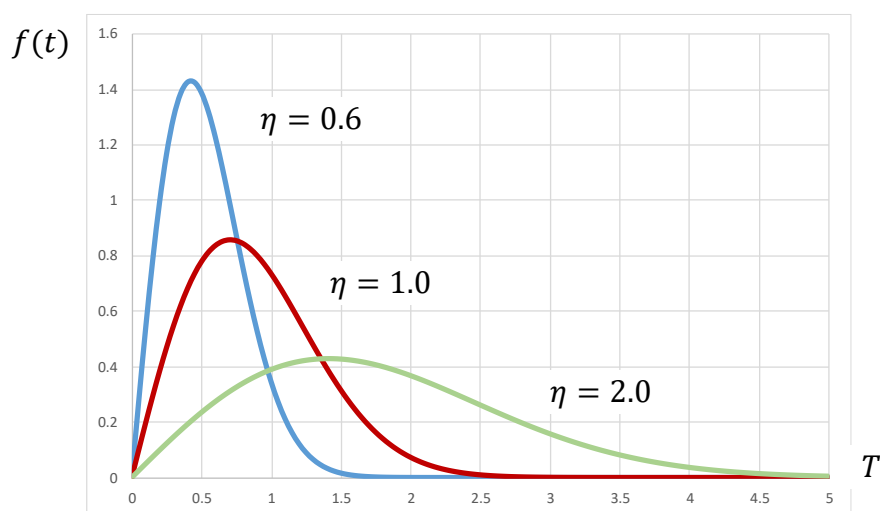


Fig. 1.29 Funcția densitate de probabilitate a repartiției Rayleigh [MCO 10]

În tabelul 1.14 sunt prezentate expresiile indicatorilor de fiabilitate ai repartiției Rayleigh.

Tabelul 1.14 Indicatorii de fiabilitate ai repartiției Rayleigh [MCO 10]

Nr. crt.	Indicatorul de fiabilitate	Expresia matematică
1.	Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare	$f(t) = \frac{t}{\eta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^2}, \eta > 0$
2.	Funcția de fiabilitate	$R(t) = Pr(T > t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^2}$
3.	Funcția de nonfiabilitate	$F(t) = Pr(T \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^2}$
4.	Rata (intensitatea) de defectare	$z(t) = \frac{t}{\eta^2}$
5.	Media variabilei aleatorii	$\mu_T = \left(\frac{\pi \cdot \eta^2}{2}\right)^{1/2}$
6.	Dispersia variabilei aleatorii	$\sigma_T^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta^2 = 0.4292 \cdot \eta^2$

Domeniile de utilizare ale repartiției Rayleigh [MCO 14], [KEC 93]:

- Modelarea repartiției erorilor radiale, atunci când erorile pe două axe, reciproc perpendiculare, sunt independente și normal repartizate cu media zero și dispersiile egale.

Fie Y_1 și Y_2 , două variabile aleatorii independente, normal repartizate, $Y_{1,2} \sim N(y, 0, \sigma)$, fiecare având media $\mu = 0$ și dispersiile egale, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Atunci variabila aleatorie X :

$$X = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}. \quad (1.153)$$

este Rayleigh repartizată.

- Modelarea erorilor de fabricație obținute în urma prelucrării pe mașini-unelte cu comandă numerică independentă, după două axe carteziene.
- Modelarea preciziei de ochire a echipamentelor militare.
- Modelarea preciziei de tragere la țintă a rachetelor balistice și a proiectilelor.
- Teoria statistică a comunicațiilor.
- Studiul fenomenelor de uzură la sculele așchietoare de tipul frezelor melc.
- Modelarea înfășurătorii amplitudinii unui zgomot, atunci când se utilizează un detector liniar.
- Investigarea comportamentului sub sarcină a structurilor aeronautice sau a celor de autovehicule, în ipoteza că variația instantanee a sarcinii, la un moment dat, este normal repartizată.
- Descrierea valorilor de vârf a solicitărilor, în ipoteza că acestea sunt normal repartizate.

În continuare se prezintă o modalitate de realizare a inferențelor statistice pentru parametrii repartiției Rayleigh, bazată pe proprietățile asimptotice a estimatorilor punctuali de verosimilitate maximă, aspect foarte puțin tratat și rezolvat în literatura de specialitate.

Relațiile de calcul dezvoltate, pe parcursul acestui subcapitol [MCO 00b], permit verificarea ipotezelor statistice și construirea intervalelor de încredere în cazul eșantioanelor complete și incomplete (cenzurare sau trunchiate). În finalul lucrării este prezentat și un exemplu numeric de calcul, care ilustrează modul de utilizare al acestei metode dezvoltate în lucrare.

Fie $x_i, i = \overline{1, n}$, un eșantion de volum n , prelevat dintr-o populație Rayleigh. Funcția de verosimilitate (1.25), în acest caz, este de forma:

$$\mathcal{L}(x_i, \eta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \eta^{-2 \cdot n} \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \eta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.154)$$

Logaritmul funcției de verosimilitate, $\ln \mathcal{L}(x_i, \eta)$, rezultă:

$$\ln \mathcal{L}(x_i, \eta) = -2 \cdot n \cdot \ln \eta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2 \cdot \eta^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (1.155)$$

Estimația punctuală de verosimilitate maximă a parametrului de scală, $\hat{\eta}$, se obține din condiția de maxim a funcției de verosimilitate sau, mai comod, utilizând logaritmul funcției de verosimilitate, $\ln \mathcal{L}(x_i, \eta)$, adică:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_i, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{2 \cdot n}{\eta^3} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \eta^2 \right) = 0, \quad (1.156)$$

Rezolvând ecuația (1.156), se obține:

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{2 \cdot n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (1.157)$$

Relația (1.157) reprezintă estimația punctuală de verosimilitate maximă în cazul eșantioanelor complete.

În cazul eșantioanelor de volum n , cenzurate la nivelul r , funcția de verosimilitate (1.25), devine:

$$\mathcal{L}(x_i, \eta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \prod_{i=1}^n f(x_i) \cdot [1 - F(x_r)]^{n-r}. \quad (1.158)$$

Dacă în ecuația (1.158) înlocuim densitatea de probabilitate și funcția de repartiție Rayleigh, rezultă:

$$\mathcal{L}(x_i, \eta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \eta^{-2 \cdot r} \cdot \left(\prod_{i=1}^r x_i \right) \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \eta^2} [\sum_{i=1}^r x_i^2 + (n-r) \cdot x_r^2]}. \quad (1.159)$$

Logaritmul funcției de verosimilitate, $\ln \mathcal{L}(x_i, \eta)$ va avea acest caz expresia:

$$\ln \mathcal{L}(x_i, \eta) = -2 \cdot r \cdot \ln \eta + \sum_{i=1}^r \ln x_i - \frac{1}{2 \cdot \eta^2} \left[\sum_{i=1}^r x_i^2 + (n-r) \cdot x_r^2 \right] \quad (1.160)$$

și

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_i, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{2 \cdot r}{\eta^3} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \sum_{i=1}^r x_i^2 + \frac{(n-r)}{2 \cdot r} \cdot x_r^2 - \eta^2 \right), \quad (1.161)$$

iar estimația punctuală de verosimilitate maximă rezultă de forma:

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \left[\sum_{i=1}^r x_i^2 + (n-r) \cdot x_r^2 \right]}. \quad (1.162)$$

În cazul eșantioanelor trunchiate la durata x_c , expresiile funcțiilor $\mathcal{L}(x_i, \eta)$, $\ln \mathcal{L}(x_i, \eta)$ și $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(x_i, \eta)}{\partial \eta}$, se obțin prin înlocuirea duratei x_r cu x_c , iar estimația de verosimilitate maximă va avea forma:

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \left[\sum_{i=1}^r x_i^2 + (n-r) \cdot x_c^2 \right]}, \quad (1.163)$$

în care r reprezintă numărul de observații înregistrate în intervalul de testare $(0, x_c)$.

Pentru simplificarea relațiilor de calcul a estimațiilor punctuale, introducem notația, \mathcal{T}_{Σ}^2 , pentru suma pătratelor valorilor variabilei aleatorii, adică:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\Sigma}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \text{ în cazul eșantioanelor complete} \\ \mathcal{T}_{\Sigma}^2 = \sum_{i=1}^r x_i^2 + (n-r) \cdot x_{r,c}^2, \text{ în cazul eșantioanelor incomplete} \end{cases}, \quad (1.164)$$

Cu această notație, estimația de verosimilitate maximă este de forma:

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{2 \cdot n, r} \cdot \mathcal{T}_{\Sigma}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.165)$$

indiferent de tipul încercării analizate.

Estimațiile punctuale obținute cu una din relațiile (1.157), (1.162), sau (1.163) permit caracterizarea populației din care a fost prelevat eșantionul, însă nu oferă informații privind incertitudinea de estimare, incertitudine legată de volumul eșantionului, nivelul de cenzurare sau truncchiere.

Pentru ca prelucrarea statistică să fie completă, este necesară estimarea intervalelor de încredere și/sau verificarea ipotezelor statistice referitoare la parametrii populației.

Pentru a realiza această etapă, din prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale, este necesar să se facă apel la proprietățile asimptotice ale estimațiilor punctuale de verosimilitate maximă, vezi capitolul 1.1.

Din rațiuni de calcul, pentru rezolvarea cazurilor practice, în locul matricei informației Fisher se utilizează matricea *informației observate*:

$$\mathbf{I}_0(\hat{\theta}) = \|\| I_{i,j}(\hat{\theta}) \|\|, i, j = \overline{1, q}, \quad (1.166)$$

în care:

$$I_{i,j}(\hat{\theta}) = E \left[- \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}(x, \hat{\theta}_j)}{\partial \theta_i \cdot \partial \theta_j} \right]_{\theta_j = \hat{\theta}_j}. \quad (1.167)$$

Pe baza matricei *informației observate*, precum și a proprietăților asimptotice ale estimatorilor de verosimilitate maximă:

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\left\{ [I_0(\hat{\theta})]_{i,i}^{-1} \right\}^{1/2}} \propto \mathcal{N}(z, 0, 1). \quad (1.168)$$

Pentru repartiția Rayleigh, în care:

$$\theta = \eta,$$

valoarea dispersiei estimației de verosimilitate maximă, $V(\hat{\eta})$, a parametrului de scală, este:

$$V(\hat{\eta}) = \left[- \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(x_i, \eta)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta = \hat{\eta}}^{-1} = \left[\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{T}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right) \right]^{-1}. \quad (1.169)$$

Folosind relațiile (1.169) și (1.9), intervalul de încredere bilateral simetric, corespunzător unei probabilități $1 - \alpha$, pentru parametrul de scală, va rezulta de forma:

$$\hat{\eta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}} \leq \eta \leq \hat{\eta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}} \quad (1.170)$$

Expresiile (1.168) și (1.69) prezentate anterior se utilizează în cazul eșantioanelor cenzurate sau trunchiate. În cazul eșantioanelor complete aceste inecuații se modifică prin înlocuirea lui r cu n .

Calculul intervalelor de încredere pentru valoarea medie, cuantile sau pentru diferite valori ale funcției de fiabilitate și nonfiabilitate, corespunzătoare unei valori particulare, x_0 , a variabilei aleatorii X , se poate realiza prin utilizarea metodei Delta [CRO 95].

Astfel, dacă avem o funcție:

$$\hat{\Phi} = g(\hat{\theta}), \quad (1.171)$$

Având ca argument valoarea estimăției de verosimilitate maximă a parametrului repartiției, abaterea medie pătratică, $\sigma_{\hat{\Phi}} = \sqrt{V(\hat{\Phi})}$, se determină cu ecuația:

$$\sigma_{\hat{\Phi}} = \left| \frac{dg(\hat{\theta})}{d\hat{\theta}} \right| \cdot \sqrt{V(\hat{\theta})}, \quad (1.172)$$

Iar intervalul de încredere, al funcției, $g(\hat{\theta})$, rezultă de forma:

$$\hat{\Phi} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{\Phi}} \leq \Phi \leq \hat{\Phi} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{\Phi}}. \quad (1.173)$$

Obținem astfel:

1. Pentru media repartiției Rayleigh, conform tabelului

$$\hat{\mu} = \left(\frac{\pi \cdot \hat{\eta}^2}{2} \right)^{1/2} = 1.253 \cdot \hat{\eta} \quad (1.174)$$

și o valoare a abaterii medii pătratice:

$$\sigma_{\hat{\mu}} = \frac{1.253 \cdot \hat{\eta}}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}} \quad (1.175)$$

Intervalul de încredere bilateral simetric, va avea expresia:

$$\hat{\mu} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{\mu}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{\mu}}. \quad (1.176)$$

2. Pentru cuantila p a repartiției Rayleigh, x_p :

$$x_p = \hat{\eta} \cdot \left(2 \cdot \ln \frac{1}{1-p} \right)^{1/2}, \quad (1.177)$$

și o valoare a abaterii medii pătratice:

$$\sigma_{\hat{x}_p} = \hat{\eta} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \ln \frac{1}{1-p}}{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}} \quad (1.178)$$

Intervalul de încredere bilateral simetric va avea în acest caz, expresia:

$$\hat{x}_p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{x}_p} \leq x_p \leq \hat{x}_p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{x}_p}. \quad (1.179)$$

3. Pentru funcția de fiabilitate, R_0 , corespunzătoare unei valori x_0 a variabilei aleatorii:

$$\hat{R}_0 = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\hat{\eta}} \right)^2} \quad (1.180)$$

și o valoare a abaterii medii pătratice, în acest caz este de forma:

$$\sigma_{\hat{R}_0} = \frac{x_0}{\hat{\eta}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\hat{\eta}} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}}, \quad (1.181)$$

iar intervalul de încredere bilateral simetric va avea expresia:

$$\hat{R}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{R}_0} \leq R_0 \leq \hat{R}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{R}_0}. \quad (1.182)$$

4. Pentru funcția de nonfiabilitate, F_0 :

$$\hat{F}_0 = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\hat{\eta}} \right)^2}, \quad (1.183)$$

valoarea abaterii medii pătratice, în acest caz, este de forma:

$$\sigma_{\hat{F}_0} = \frac{x_0}{\hat{\eta}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{\hat{\eta}} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\hat{\eta}^2} \cdot \left(\frac{3}{\hat{\eta}^2} \cdot \mathcal{J}_{\Sigma}^2 - 2 \cdot r \right)}}, \quad (1.184)$$

iar intervalul de încredere bilateral simetric va avea expresia:

$$\hat{F}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{F}_0} \leq F_0 \leq \hat{F}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{F}_0}. \quad (1.185)$$

Exemplu numeric:

Considerăm un eșantion de volum $n = 20$, cenzurat la nivelul $r = 15$ și

$$\mathcal{J}_{\Sigma}^2 = \left[\sum_{i=1}^r x_i^2 + (20 - 15) \cdot x_c^2 = 135 \right].$$

Conform ecuației (1.162), estimăția punctuală a parametrului de scală este:

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{2 \cdot 15} \cdot 135 \right)^{\frac{1}{2}} = 2.121.$$

Considerând un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.90$, cuantilele repartiției normale normate au valorile $z_{0.95} = -z_{0.05} = 1.645$, iar intervalul de încredere bilateral simetric, al parametrului de scală, conform ecuației (1.170), va rezulta de forma:

$$1.670 \leq \eta \leq 2.572.$$

Pentru:

- media repartiției se va obține: $\hat{\mu} = 2.658$, cu un interval de încredere:

$$2.093 \leq \mu \leq 3.222,$$

- cuantila 0.90 a repartiției vom obține: $\hat{x}_{0.90} = 4.522$, cu un interval de încredere:

$$1.891 \leq \hat{x}_{0.90} \leq 7.242.$$

- funcția de supraviețuire, corespunzătoare unei valori $x_0 = 1.0$, rezultă $R_0 = 0.895$ și:

$$0.805 \leq R_0 \leq 0.984.$$

- funcția de nonfiabilitate, corespunzătoare unei valori $x_0 = 1.0$, rezultă $F_0 = 0.105$ și:

$$0.016 \leq F_0 \leq 0.195.$$

În concluzie, putem afirma că:

- metoda se poate utiliza cu succes doar în cazul eșantioanelor de volum mediu slab cenzurate și în cazul eșantioanelor de volum mare;
- în cazul eșantioanelor de volum redus sau puternic cenzurate și trunchiate, datorită simetriei, intervalele de încredere rezultă foarte largi.

1.5 CERCETĂRI PRIVIND ESTIMAREA PARAMETRILOR ȘI INDICATORILOR DE FIABILITATE ÎN CAZUL REPARTIȚIEI LOGNORMALE

O variabilă aleatorie continuă T , este lognormal repartizată cu parametrii μ și σ , dacă funcția densitate de probabilitate este de forma [KRI 06], [HAH 67]:

$$f(T) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2}, \quad (1.186)$$

pentru $t > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ și $\sigma > 0$.

și se notează, $X \sim \mathcal{L}n(x, \mu, \sigma)$.

O variabilă aleatorie continuă T , este lognormal repartizată cu parametrii μ și σ , dacă logaritmul ei, $\ln T$, este normal repartizat cu parametrii μ și σ .

Alura funcției densitate de probabilitate, a repartiției lognormale, pentru diferite valori ale parametrilor μ și σ este prezentată în fig. 1.30.

În tabelul 1.15 sunt prezentate expresiile indicatorilor de fiabilitate ale repartiției lognormale.

Domeniile de utilizare ale repartiției lognormale [MCO 14], [KEC 93], [KEC 91]:

- Repartiția log-normală se utilizează, cu bune rezultate, la modelarea unei game largi de procese legate îndeosebi de uzura materialelor, de solicitările de durată, de studiul durabilității materialelor.
- Modelul log-normal se utilizează în domeniul poluării atmosferei, pentru descrierea concentrării unor particule poluante în diferite zone industriale.
- Modelarea concentrației unor elemente din scoarța terestră și a radioactivității lor.
- Caracterizează rezistența la rupere a materialelor.
- Modelarea unor fenomene biologice.
- Perioada de incubație (de la infectare până la debut) a bolilor infecțioase.
- Modelarea durabilității unor tranzistori.
- Modelarea duratei de viață după solicitări extreme.
- Analize economice asupra distribuției veniturilor și a altor indicatori economici.
- Modelarea cifrelor de afaceri ale întreprinzătorilor.
- Caracterizarea unor structuri în domeniul tehnologiei alimentare și cel al proceselor din domeniul ingineriei alimentare.

Tabelul 1.15 Indicatorii de fiabilitate ai repartiției lognormale [MCO 10]

Nr. crt.	Indicatorul de fiabilitate	Expresia matematică
1.	Densitatea de probabilitate a timpului de funcționare	$f(T) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2},$ $t > 0, -\infty < \mu < \infty$ și $\sigma > 0$
2.	Funcția de fiabilitate	$R(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_t^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln u - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot du$
3.	Funcția de nonfiabilitate	$F(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^t \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln u - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot du$
4.	Rata (intensitatea) de defectare	$z(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2}}{\int_t^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln u - \mu}{\sigma} \right)^2} \cdot du}$
5.	Media variabilei aleatorii	$\mu_T = e^{\mu + \frac{1}{2} \sigma^2}$
6.	Dispersia variabilei aleatorii	$\sigma_T^2 = e^{2 \cdot \mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$

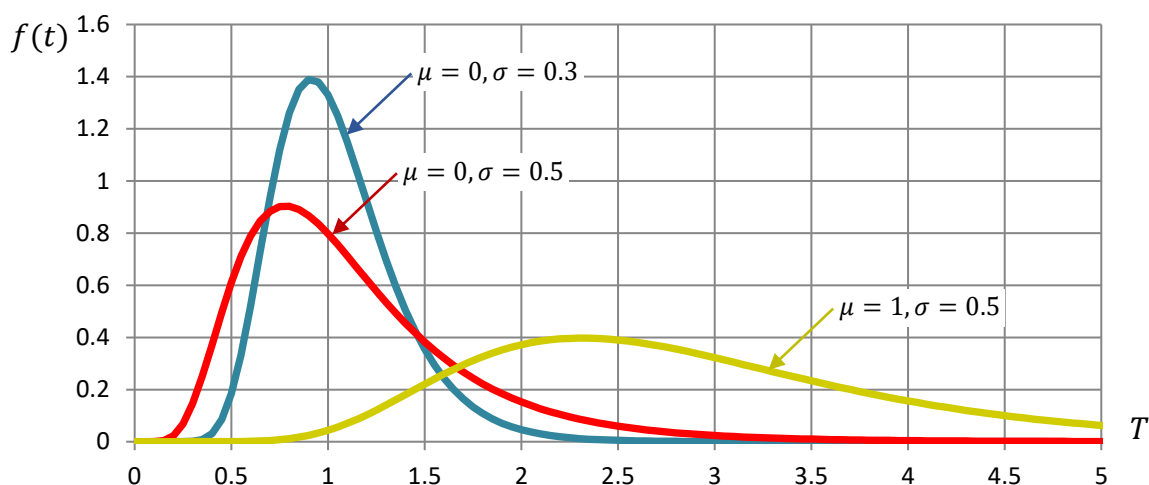


Fig. 1.30 Funcția densitate de probabilitate a repartiției lognormale [MCO 10]

Organizarea și desfășurarea încercărilor la durabilitate/fiabilitate a produselor reprezintă activități complexe din punct de vedere organizatoric și totodată mari consumatoare de resurse. De aceea, în continuare se prezintă o modalitate de calcul a duratei de testare a fiabilității produselor, prin utilizarea modelului repartiției lognormale, care permite estimarea duratei mediane a unui test cenzurat și/sau complet, precum și a intervalelor de încredere pentru această durată. Cunoașterea acestor valori permite planificarea și alocarea corespunzătoare a resurselor pentru activitățile de testare. De asemenea, corectitudinea rezultatelor obținute, prin utilizarea metodologiei de calcul propusă, a fost verificată prin simulare Monte-Carlo.

Relațiile de calcul ale duratei unei încercări de fiabilitate complete sau cenzurate au la bază ecuațiile (1.14), (1.15) și (1.16) care permit estimarea funcției empirice de repartiție. Pentru efectuarea acestui calcul se ia în considerare probabilitatea celui de-al n -lea produs deteriorat, respectiv celui de-al r -lea produs care se defectează în cazul testării [MCO 11], [MCO 12a], [MCO 13]. Astfel, ecuația:

$$F_n(t_r) = \frac{r}{n+1}, \quad (1.187)$$

furnizează valori medii ale funcției empirice de repartiție.

Valori mediane, ale funcției empirice de repartiție, se pot obține cu relațiile:

$$F_n(t_r) = \frac{r - 0.3}{n + 0.4}, \quad (1.188)$$

sau:

$$F_n(t_r) = \frac{r - 0.30685 - 0.3863 \cdot \left(\frac{r-1}{n-1}\right)}{n}, \quad (1.189)$$

pentru $n > 20$ și:

$$F_n(t_r) = 1 - 2^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{r-1}{n-1}\right) \cdot \left[2^{\left(1-\frac{1}{n}\right)} - 1\right], \quad (1.190)$$

pentru $n \leq 20$.

Valoarea duratei unei încercări de fiabilitate, cenzurate la nivelul r , se obține pornind de la funcția inversă de repartiție a modelului statistic considerat.

În cazul repartiției lognormale funcția inversă de repartiție se poate obține ținând cont de relația de legătură ce există între repartiția normală și cea lognormală, precum și de relația dintre repartiția normală și repartiția normală normată (funcția integrală Gauss-Laplace).

Astfel, dacă o variabilă aleatorie T este lognormal repartizată [MCO 10]:

$$T \sim \mathcal{LN}(t, \mu, \sigma),$$

cu parametrii μ și σ , atunci o nouă variabilă aleatorie Y , egală cu:

$$Y = \ln T, \quad (1.191)$$

va fi normal repartizată cu parametrii μ și σ :

$$Y \sim \mathcal{N}(\ln t, \mu, \sigma).$$

De asemenea, dacă considerăm o variabilă aleatorie, Y , normal repartizată, cu media μ și abaterea standard σ :

$$Y \sim \mathcal{N}(y, \mu, \sigma),$$

printr-o nouă transformare de variabilă aleatorie:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma},$$

variabila aleatorie Z va fi tot normal repartizată, dar cu media:

$$\mu_Z = 0$$

și abaterea standard:

$$\sigma_Z = 1.$$

Funcția de repartiție a variabilei aleatorii Z va fi funcția integrală Laplace, $\Phi(z)$. Deci:

$$\Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) = F(y).$$

Dacă asupra ecuației anterioare aplicăm inversa funcției Laplace, rezultă:

$$\frac{y - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}[F(y)]. \quad (1.192)$$

Din ecuațiile (1.191) și (1.192), după o serie de transformări se obține expresia funcției inverse de repartiție a modelului statistic lognormal:

$$t = e^{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}[F(t)]}. \quad (1.193)$$

Deci, durata unei încercări de fiabilitate, cenzurate la nivelul r , pentru cazul repartiției lognormale, rezultă:

$$\mathcal{T}_{r/n} = e^{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}[F_n(t_r)]}, \quad (1.194)$$

Ecuația (1.194) se obține din ecuația (1.193) la care în locul lui $F(t)$ s-a înlocuit valoarea determinată prin utilizarea uneia dintre relațiile (1.187) ÷ (1.190). Astfel se obțin fie valori medii, fie valori mediane ale duratei de testare.

Pentru cazul încercărilor complete, în relațiile de calcul (1.187) ÷ (1.190), parametrul r se înlocuiește cu valoarea volumului de eșantion utilizat, n .

Valoarea obținută pentru o încercare de fiabilitate nu oferă totuși informații consistente privind durata reală a unui test, deoarece perioada de funcționare până la deteriorare, a unui produs testat, reprezintă o variabilă aleatorie. Pentru o astfel de situație, o soluție favorabilă constă în determinarea intervalelor de încredere ale duratei încercării.

Aceste intervale conțin, de altfel, valoarea reală a încercării, cu o probabilitate $1 - \alpha$:

$$Pr(\mathcal{T}_L \leq \mathcal{T}_{r/n} \leq \mathcal{T}_U) = 1 - \alpha, \quad (1.195)$$

Calculul intervalelor de încredere se realizează în condițiile unei extrageri bernoulline (schema urnei cu bile revenite). Astfel, valoarea mediană a probabilității la care, din n produse supuse testării se deteriorează r , rezultă ca soluție a ecuației (1.16).

Dificultățile de calcul care pot apare la rezolvarea acestei ecuații (1.16), în funcție de $F_n(x_{(i)})$, pot fi înlăturate prin utilizarea unei valori aproximative, dată de ecuația (1.17).

Utilizarea soluției $F_n(x_{(i)})$, obținută prin rezolvarea uneia dintre ecuațiile (1.16) sau (1.17), împreună cu ecuația (1.194), conduce la obținerea valorii mediane a duratei testului de fiabilitate.

De fapt, ecuațiile (1.187) ÷ (1.190), nu reprezintă altceva decât niște relații de regresie ale soluțiilor ecuației (1.16), pentru diferite combinații ale parametrilor n și r .

Deoarece, prin definiție funcția de repartiție reprezintă o funcție crescătoare, intervalul de încredere al duratei de testare, rezultă prin utilizarea soluțiilor ecuațiilor:

$$\sum_{i=r}^n C_n^i \cdot F_L^i \cdot (1 - F_L)^{n-i} = \frac{\alpha}{2} \quad (1.196)$$

și

$$\sum_{i=r}^n C_n^i \cdot F_U^i \cdot (1 - F_U)^{n-i} = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad (1.197)$$

împreună cu ecuația (1.194), adică:

$$\mathcal{T}_L = e^{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}[F_L]} \quad (1.198)$$

și

$$\mathcal{J}_U = e^{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}[F_U]}, \quad (1.199)$$

O valoare similară a probabilităților F_L și F_U se poate obține aproximând repartiția binomială prin intermediul repartiției Fisher-Snedecor, conform ecuațiilor (1.18) și (1.19), Adică:

$$F_U = \frac{1}{1 + \frac{n-r+1}{r} \cdot \mathcal{F}_{1-\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-r+1), 2 \cdot r}}, \quad (1.200)$$

$$F_L = \frac{1}{1 + \frac{n-r+1}{r} \cdot \mathcal{F}_{\frac{\alpha}{2}, 2 \cdot (n-r+1), 2 \cdot r}} \quad (1.201)$$

Pentru cazul încercărilor complete, în relațiile de calcul corespunzătoare, parametrul r se înlocuiește cu valoarea volumului de eșantion utilizat, n .

Pentru a ilustra modul de utilizare al metodologiei de calcul prezentate anterior, în continuare sunt prezentate câteva studii de caz, determinate pentru diferite valori ale parametrilor repartiției lognormale, μ și σ , precum și pentru diferite scheme de testare, n și r .

Rezolvarea ecuațiilor (1.16), (1.197) și (1.198) s-a realizat utilizând funcțiile specializate existente în Mathcad 14. Precizia de rezolvare a acestor ecuații a fost stabilită la 10^{-15} . În paralel, sunt prezentate și valorile obținute prin utilizarea relațiilor aproximative (1.17), (1.200) și (1.201).

Corectitudinea rezultatelor obținute, prin utilizarea metodologiei de calcul propusă, a fost verificată prin simulare Monte Carlo. Pentru acest caz a fost realizată o aplicație Mathcad 14 care permite obținerea valorii mediane, medii și a intervalelor de încredere, corespunzătoare unui nivel de încredere $1 - \alpha = 0.90$ ale duratei încercărilor de fiabilitate, pe baza unei simulări Monte Carlo ce utilizează un număr $N=20000$ de încercări de fiabilitate, pentru fiecare caz în parte. Schema logică a programului de calcul este prezentată în fig. 1.31.

Realizarea simulărilor, prin metoda Monte – Carlo, a unei încercări de fiabilitate, presupune stabilirea următoarelor date de intrare:

- N , numărul de simulări;
- n , volumul eșantionului;
- r , nivelul de cenzurare;
- μ și σ , valorile celor doi parametri ai repartiției lognormale;
- α , nivelul de încredere ales.

Programul generează o matrice având n linii \times N coloane, folosind generatorul de numere aleatorii uniforme și continue în intervalul $[0,1]$, astfel încât care fiecare coloană reprezintă o încercare de fiabilitate.

Valorile timpilor de deteriorare, simulați, se obțin prin utilizarea funcției inverse de repartiție a modelului statistic Weibull:

$$t = e^{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}[\text{rnd}(1)]}$$

Pentru a determina durata unor încercări cenzurate la nivelul r , programul de calcul ordonează crescător coloanele matricei generate anterior. De asemenea, este extrasă, în final, linia r a acestei matrice. Cele N valori conținute în această linie reprezintă duratele simulate ale încercărilor de fiabilitate ($t_{r,i}$).

Calculul valorilor mediane și medii ale duratei de încercare, se realizează prin determinarea mediane și mediei acestor valori:

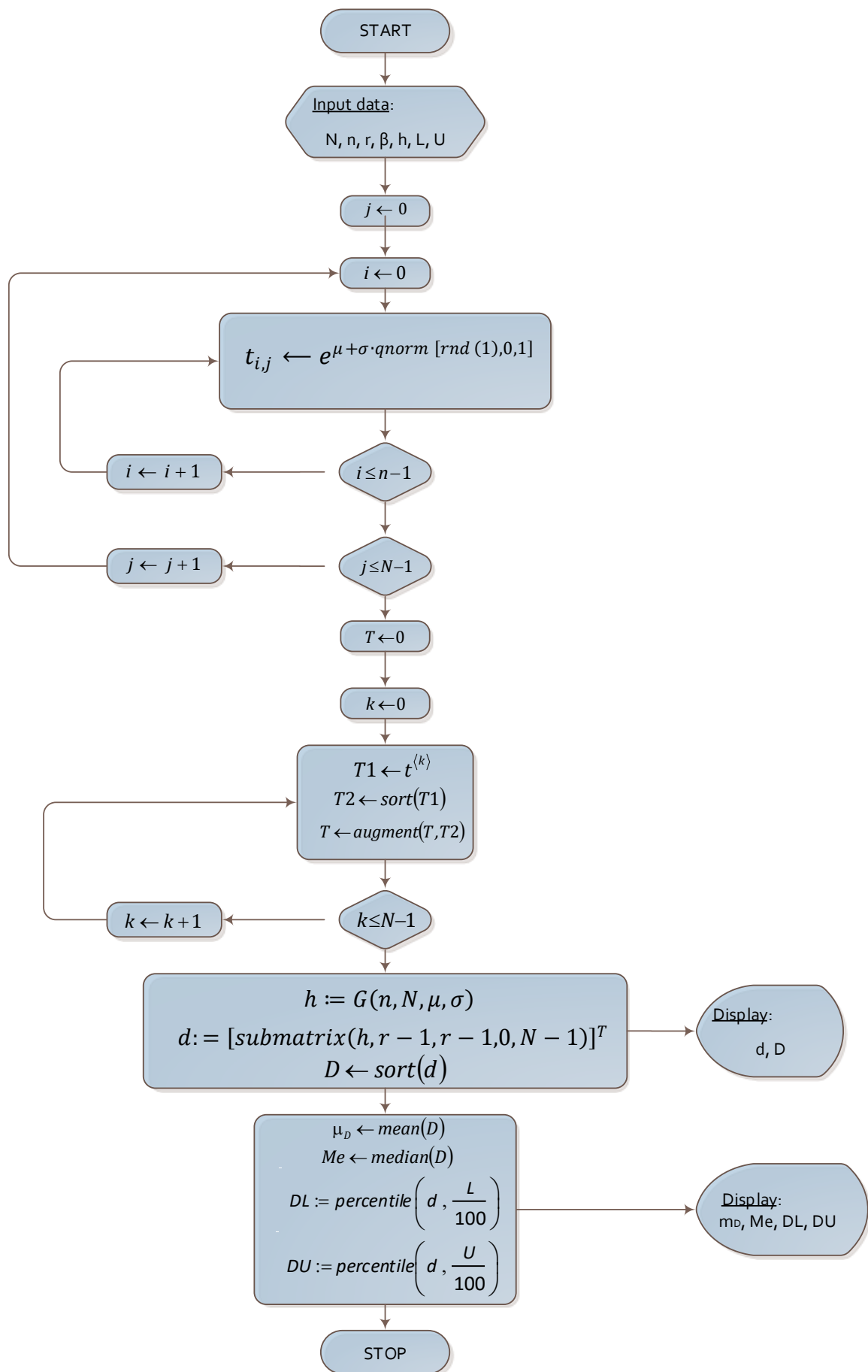


Fig. 1.31 Schema logică a programului de calcul [MCO 12a]

$$t_{Me} = \begin{cases} t_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{dacă } N \text{ este par} \\ \frac{t_{\left(\frac{n}{2}\right)} + t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{dacă } N \text{ este impar} \end{cases}$$

și

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N t_{r,i}}{N}.$$

În ecuațiile anterioare prin $t_{(p)}$, s-a notat statistica de ordine p , a variabilei t .

Determinarea limitelor de încredere pentru durata încercărilor se realizează prin determinarea cuantilelor $t_{L/100}$ și $t_{U/100}$ a duratelor de trunchiere pentru cele N încercări simulate.

Metoda de calcul utilizată pentru determinarea cuantilelor de ordinul p , folosește ecuația:

$$t_p = t_{(p \cdot (N+1))}$$

Dacă expresia $p \cdot (n + 1)$ nu rezultă cu valoare întreagă, atunci pentru determinarea cuantilei p se recomandă utilizarea interpolării liniare.

Presupunem că după evaluarea expresiei $p \cdot (n + 1)$, constatăm că valoarea cuantilei t_p este cuprinsă în intervalul $[t_{(k)}, t_{(k+1)}]$.

Pentru determinarea valorii cuantilei t_p , se utilizează relația:

$$t_p = t_{(k)} + [p \cdot (n + 1) - k] \cdot [t_{(k+1)} - t_{(k)}].$$

Pentru volume mari de eșantion (cum este cazul aplicației realizare), în locul relației anterioare se poate utiliza ecuația simplificată:

$$t_p = t_{[p \cdot (N+1)]}.$$

În ecuația anterioară prin $t_{[]}$, s-a notat partea întreagă a valorii expresiei dintre paranteze.

Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul 1.16.

Tabelul 1.16 Rezultatele obținute prin simulare numerică [MCO 12a]

Planul de testare		Durata calculată a încercării de fiabilitate						Valori obținute prin simulare numerică			
		$\mathcal{T}_{r/n}$		\mathcal{T}_L		\mathcal{T}_U		$\mathcal{T}_{r/n}$	\mathcal{T}_L	\mathcal{T}_U	$\bar{\mathcal{T}}_{r/n}$
n	r	ec. (1.16)	ec. (1.17)	ec. (1.196)	ec. (1.200)	ec. (1.197)	ec. (1.201)	-	-	-	-
$\mu = 1.0; \sigma = 1.0$											
10	5	2.41	2.41	1.27	1.27	4.55	4.55	2.42	1.27	4.56	2.60
10	10	12.17	12.17	5.19	5.19	35.44	35.44	12.10	5.21	35.56	15.26
20	5	1.30	1.30	0.77	0.77	2.12	2.12	1.29	0.77	2.12	1.35
20	10	2.56	2.56	1.62	1.62	4.03	4.03	2.56	1.62	4.05	2.66
20	15	4.89	4.89	3.04	3.04	8.02	8.02	4.90	3.03	8.07	5.14
20	20	16.85	16.85	8.04	8.04	44.67	44.67	17.00	8.09	45.15	20.56
30	5	0.98	0.98	0.61	0.61	1.52	1.52	0.98	0.61	1.51	1.01
30	10	1.70	1.70	1.14	1.14	2.49	2.49	1.70	1.15	2.49	1.74
30	15	2.61	2.61	1.79	1.79	3.79	3.79	2.60	1.80	3.77	2.67
30	20	3.98	3.98	2.72	2.72	5.86	5.86	3.98	2.72	5.83	4.09
30	25	6.62	6.62	4.35	4.35	10.33	10.33	6.60	4.38	10.34	6.88
30	30	20.05	20.05	10.08	10.08	50.78	50.78	20.15	10.15	51.00	24.07

Tabelul 1.16(continuare) Rezultatele obținute prin simulare numerică [MCO 12a]

Planul de testare		Durata calculată a încercării de fiabilitate						Valori obținute prin simulare numerică			
		$\mathcal{T}_{r/n}$		\mathcal{T}_L		\mathcal{T}_U		$\mathcal{T}_{r/n}$	\mathcal{T}_L	\mathcal{T}_U	$\bar{\mathcal{T}}_{r/n}$
n	r	ec. (1.16)	ec. (1.7)	ec. (1.196)	ec. (1.200)	ec. (1.197)	ec. (1.201)	-	-	-	-
$\mu = 1.0; \sigma = 2.0$											
10	5	2.13	2.13	0.59	0.59	7.60	7.60	2.11	0.57	7.46	2.84
10	10	54.46	54.46	9.91	9.91	462.09	462.09	54.36	10.01	483.86	140.77
20	5	0.62	0.62	0.22	0.22	1.65	1.65	0.62	0.22	1.64	0.74
20	10	2.40	2.40	0.96	0.96	5.97	5.97	2.42	0.97	5.94	2.81
20	15	8.78	8.78	3.40	3.40	23.68	23.68	8.78	3.39	23.64	10.55
20	20	104.41	104.41	23.78	23.78	733.94	733.94	104.65	23.75	748.59	224.26
30	5	0.35	0.35	0.14	0.14	0.85	0.85	0.35	0.14	0.83	0.40
30	10	1.06	1.06	0.48	0.48	2.28	2.28	1.06	0.49	2.28	1.18
30	15	2.50	2.50	1.18	1.18	5.28	5.28	2.50	1.19	5.29	2.77
30	20	5.82	5.82	2.73	2.73	12.64	12.64	5.81	2.74	12.64	6.51
30	25	16.10	16.10	6.97	6.97	39.28	39.28	16.06	6.89	39.13	18.63
30	30	147.92	147.92	37.37	37.37	948.67	948.67	146.97	37.27	959.88	298.02
$\mu = 2.0; \sigma = 3.0$											
10	5	5.13	5.13	0.75	0.75	34.56	34.56	5.18	0.74	34.68	10.05
10	10	662.69	662.69	51.45	51.45	16376.9	16376.9	674.59	51.56	16531.9	7392.50
20	5	0.80	0.80	0.17	0.17	3.48	3.48	0.79	0.17	3.48	1.18
20	10	6.14	6.14	1.56	1.56	24.07	24.07	6.16	1.54	23.82	8.64
20	15	42.91	42.91	10.33	10.33	189.99	189.99	43.31	10.27	187.28	64.78
20	20	1758.98	1758.98	191.14	191.14	32782.0	32782.0	1773.29	196.39	33197.5	10780.0
30	5	0.35	0.35	0.08	0.08	1.28	1.28	0.35	0.08	1.27	0.47
30	10	1.80	1.80	0.55	0.55	5.68	5.68	1.80	0.55	5.63	2.29
30	15	6.53	6.53	2.12	2.12	20.00	20.00	6.54	2.13	20.13	8.24
30	20	23.16	23.16	7.42	7.42	74.13	74.13	23.27	7.36	74.04	29.79
30	25	106.49	106.49	30.32	30.32	405.93	405.93	106.94	30.51	402.89	149.61
30	30	2966.13	2966.13	376.58	376.58	48175.1	48175.1	2951.49	382.10	46593.2	16122.8

Pe baza rezultatelor prezentate în tabelul 1 se pot trage următoarele concluzii:

- modelul de calcul prezentat permite obținerea unor valori corecte, deoarece diferențele față de valorile simulate este foarte mică; Dacă numărul simulărilor ar crește diferențele rezultate ar fi ne semnificative;
- relațiile aproximative utilizate, (1.17), (1.200) și (1.201) conduc la obținerea unor valori, care nu diferă față de valorile adevărate obținute prin intermediul ecuațiilor (1.16), (1.196) și (1.197);
- pe baza rezultatelor prezentate se constată și importante economii de timp ce pot fi realizate prin utilizarea planurilor de testare cenzurate;
- metoda de calcul prezentată se pretează foarte bine pentru cazul în care există informații apriorice privind valorile parametrilor repartiției statistice ce modelează fenomenele studiate.

Capitolul 2. CERCETĂRI PRIVIND FIABILITATEA PRODUSELOR INDUSTRIALE

2.1 FIABILITATEA PREVIZIONALĂ A RULMENȚILOR

Utilizarea rulmenților în domenii, foarte diferite, caracterizate prin condiții reale de funcționare cu o apreciabilă varietate, face ca și formele de deteriorare a rulmenților să prezinte o tipologie diversificată. Scopul utilizării modelelor de fiabilitate și a metodelor statistice la analiza rezultatelor experimentale, obținute prin observarea tipurilor de defectare și a fenomenelor de deteriorare, îl constituie evaluarea fiabilității previzionale a produselor. În consecință, aprecierea de ansamblu a duratei de viață a produselor trebuie să permită considerarea globală a posibilităților de defectare, prin îmbinarea realistă a cauzelor accidentale de deteriorare cu cele controlate, determinate. Imaginea trebuie completată cu aspectul ei statistic. Este de la sine înțeles că dezabilitățile previzionale calculate trebuie considerate ca mărimi statice cu repartiții rezultante, având în vedere că toate condițiile de funcționare (ciclu, precizie, temperatură, mediu etc.), solicitările exterioare, dimensiunile și proprietățile materialelor prezintă o variabilitate specifică.

Analiza factorilor care influențează durabilitatea și conduc la deteriorarea rulmenților, în cazul unei aplicații concrete, este mult îngreunată de varietatea formelor de deteriorare existente, precum și de multitudinea cauzelor care conduc la defectare, de interacțiunea lor și de suprapunerea lor de efecte [ESC 85].

În prima fază a deteriorării, un incident datorat unei combinații de factori nefavorabili și imprevizibili poate oferi o imagine generală și informații privind cauzele și factorii care au generat distrugerea. Procesul de deteriorare evoluează rapid, din acest moment, cu apariția unor fenomene noi de defectare care conduc întotdeauna la o exfoliere profundă, la ruperi de material, și, deci, la distrugerea completă a rulmenților [GAF 85].

Apariția, tipul și evoluția fenomenelor de deteriorare în rulmenți sunt determinate de următoarele grupe de factori, fig. 2.1:

- factori constructivi (geometrie internă și dimensiuni);
- factori de material (omogenitate, structură, compoziție);
- factori tehnologici (operații și regimuri tehnologice);
- factori de montaj (ajustaje și metode de montaj);
- factori de exploatare (sarcină, turație, temperatură, contaminare sau îmbătrânirea lubrifianțului, umiditate, etanșare etc.).

Dintre aceștia, factorii de material sunt de o importanță deosebită [GAF 85], dat fiind că influența acestora nu mai poate fi modificată prin tehnologiile ulterioare din procesul de fabricație a rulmenților.

Cea mai mare parte dintre factorii, menționați anterior, este controlabilă teoretic sau pe cale experimentală, fapt care face posibilă abordarea proiectării, realizării și utilizării rulmenților în strânsă relație cu cerințele moderne de fiabilitate.

În condiții normale, în ceea ce privește factorii amintiți anterior, adică pentru un oțel cu o compoziție și structură considerate omogene, geometrie și dimensiuni uzuale, tehnologie și montaj corespunzătoare, exploatare corectă, (fără suprasarcini, turație moderată și ungere abundentă cu lubrifianți recomandați), se apreciază că deteriorarea rulmenților se produce prin oboseala de contact

cu rostogolire a materialului. Din această cauză, în cazul rulmenților, conținutul noțiunii de durabilitate/fiabilitate a fost corelat, mult timp, numai cu posibilitatea de funcționare până la apariția deteriorărilor prin oboseala de contact.

Factorii care determină apariția, tipul și evoluția fenomenelor de deteriorare în rulmenți

Factori constructivi	Factori de material	Factori tehnologici	Factori de exploatare	Factori de montaj
(geometrie internă și dimensiuni)	(omogenitate, structură, compoziție)	(operații și regimuri tehnologice)	(sarcină, turație, temperatură, contaminare sau îmbătrânirea lubrifiantului, umiditate, etanșare etc.)	(ajustaje și metode de montaj)

Fig. 2.1 Factorii care determină apariția, tipul și evoluția fenomenelor de deteriorare în rulmenți [MCO 15]

În numeroase aplicații, însă, înlocuirea rulmenților este dictată și de alte motive: aspectul suprafețelor, jocul, vibrațiile și zgomotul, neuniformitatea de rotire sau blocarea, calitatea lubrifiantului, creșterea temperaturii, rezultate ale altor fenomene și tipologii de deteriorare. Deci, noțiunea de deteriorare a rulmenților nu se referă doar la distrugerea completă a rulmenților ci, în funcție de specificul aplicației, ea se referă și la reducerea, scăderea sau înrăutățirea capacității de funcționare, sau a performanțelor.

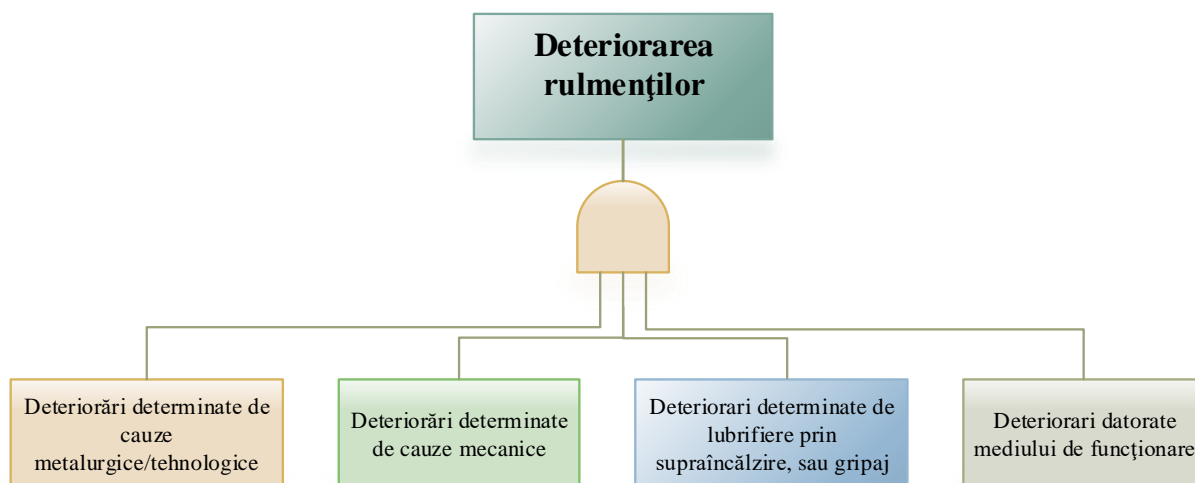
Ținând cont de faptul că unele fenomene de defectare au o evoluție rapidă și nu lasă timp pentru deciziile de inspecție-înlocuire și că altele evoluează încet și, deci, pot fi urmărite în timp, diagnosticarea cauzelor și factorii care au condus la deteriorare se recomandă a fi desfășurată în următoarea succesiune:

- inspecție fără demontare: prin vibrații, zgomot, temperatură, rotire uniformă;
- inspecție cu demontare și eventuala remontare cu aprecieri calitative și cantitative asupra defectelor.

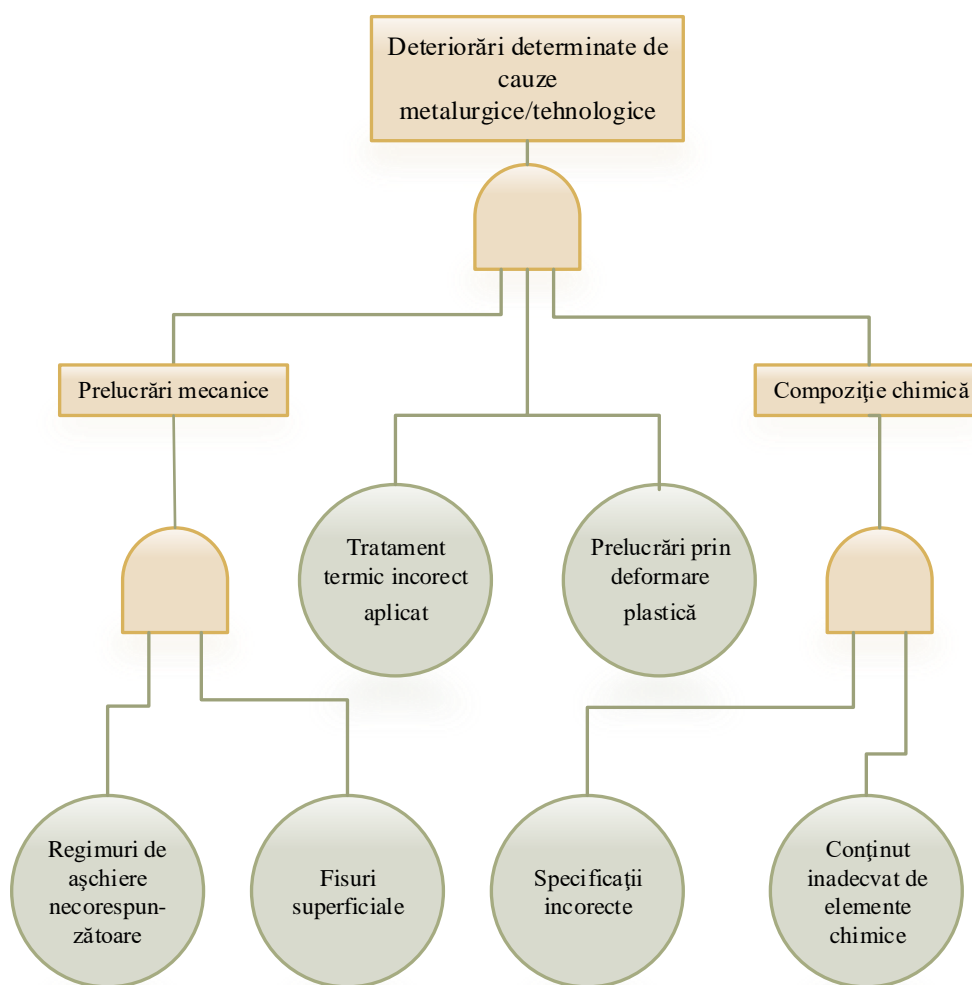
Este, de asemenea, recomandat ca această analiză să nu fie efectuată singular, ci numai în legătură cu condițiile concrete de lucru [CHA 91], [HAR 91]. Diagnosticarea cauzelor se dovedește, în aceste condiții, o acțiune deosebit de dificilă.

Deteriorarea rulmenților, precum și factorii care influențează durabilitatea, se pot studia din punct de vedere calitativ prin intermediul analizei arborescente ce constă în determinarea modurilor de defectare și identificarea combinațiilor de evenimente nedorite (de inițiere) care influențează asupra comportării generale. Metoda se numește arborele de evenimente și defecțiuni.

Procedura de analiză constă [CAT 83], [MOT 94], în specificarea unor evenimente, numite evenimente inițiale, ce au influență asupra funcționării sistemului și în estimarea setului de evenimente ce decurg din acesta, utilizând o serie de operatori sau porți logice. În fig. 2.2 este prezentat arborele de defectare [MCO 15], specific unui rulment, în cazul general.



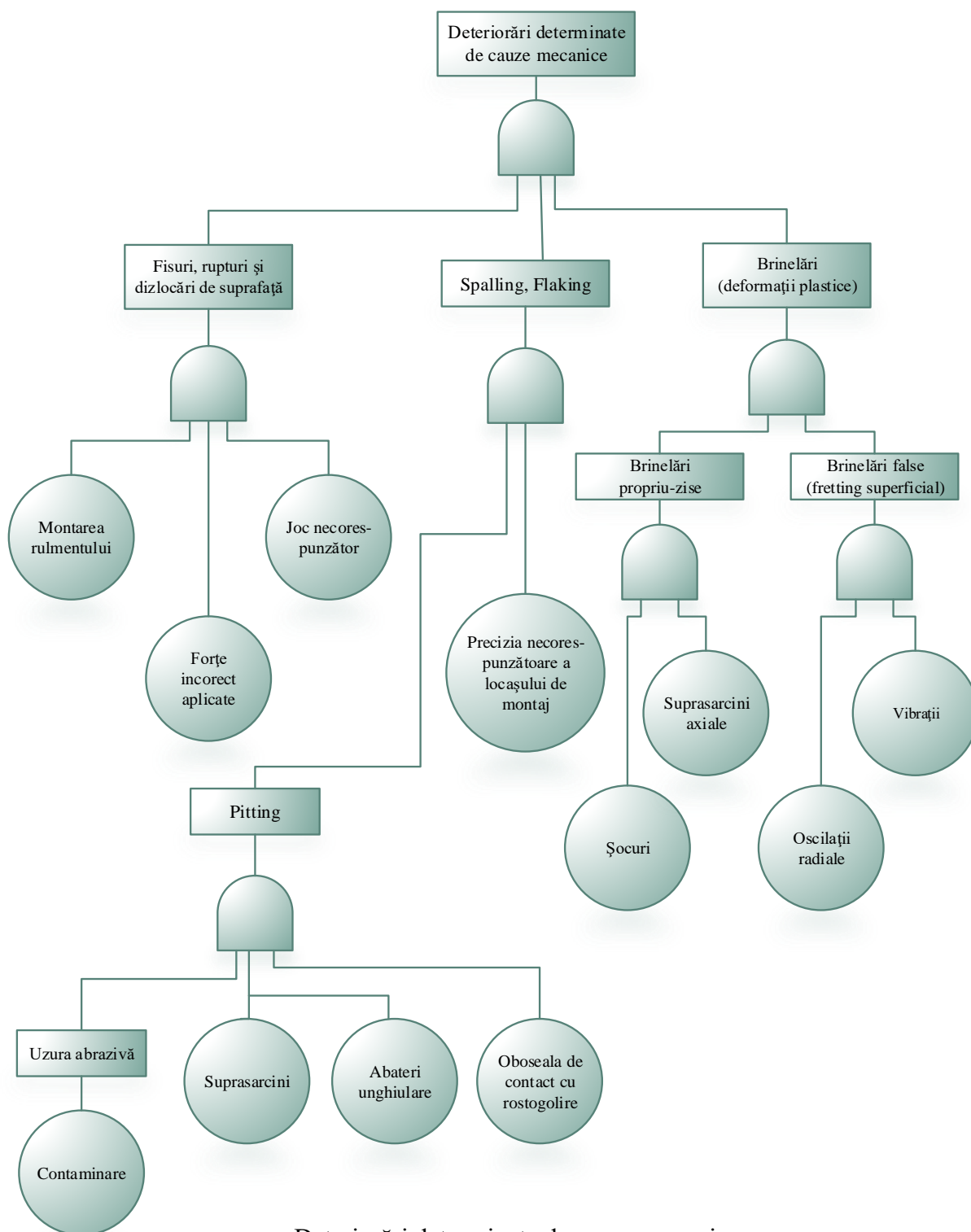
a. Mecanisme de defectare ale rulmenților



b. Deteriorări determinate de cauze metalurgice / tehnologice

Fig. 2.2 Mecanisme de defectare ale rulmenților [MCO 15]

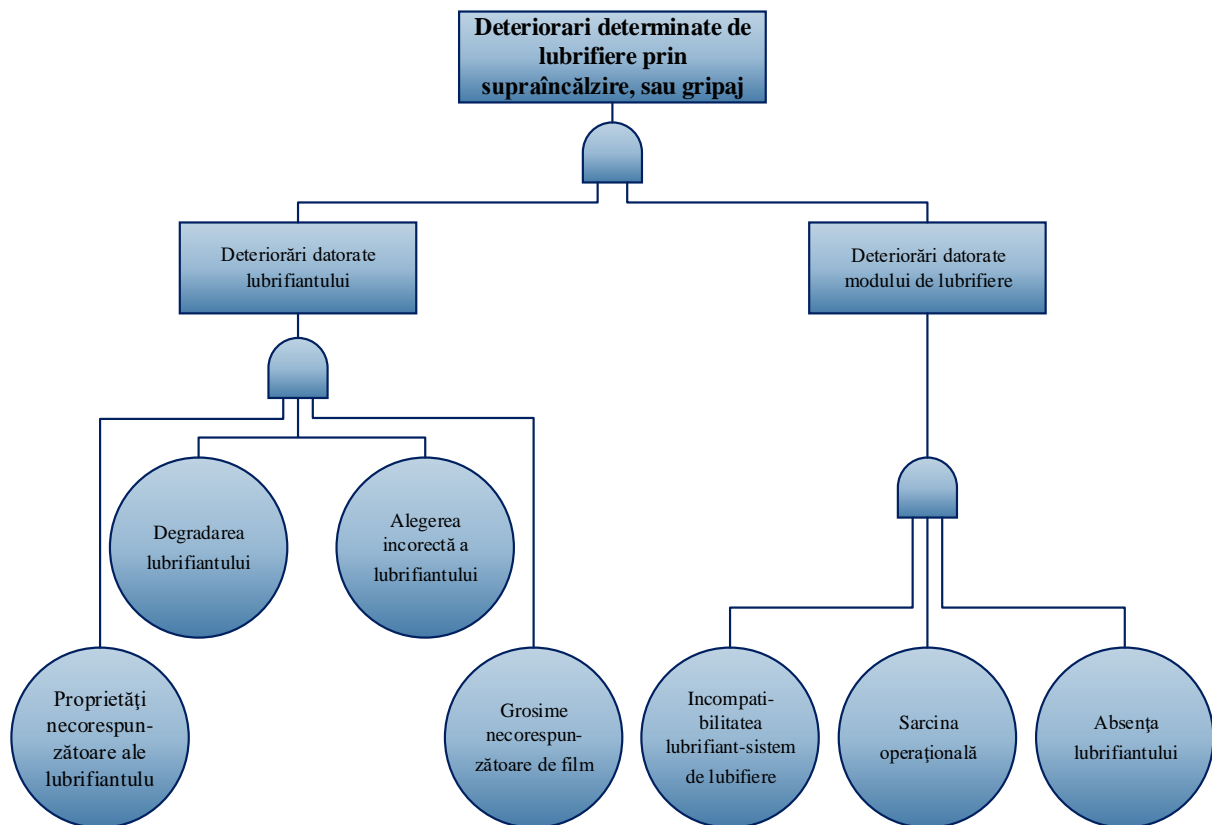
Această metodă se recomandă la analiza produselor la care evenimentele nedorite, cele care declanșează deteriorarea, sunt interdependente, fiind eficientă în determinarea calitativă a relațiilor dintre mecanismele de deteriorare. Arborele de evenimente / defecțiuni se poate utiliza și pentru a obține exprimări cantitative. În acest caz este necesară completarea analizei cu probabilități sau frecvențe de deteriorare.



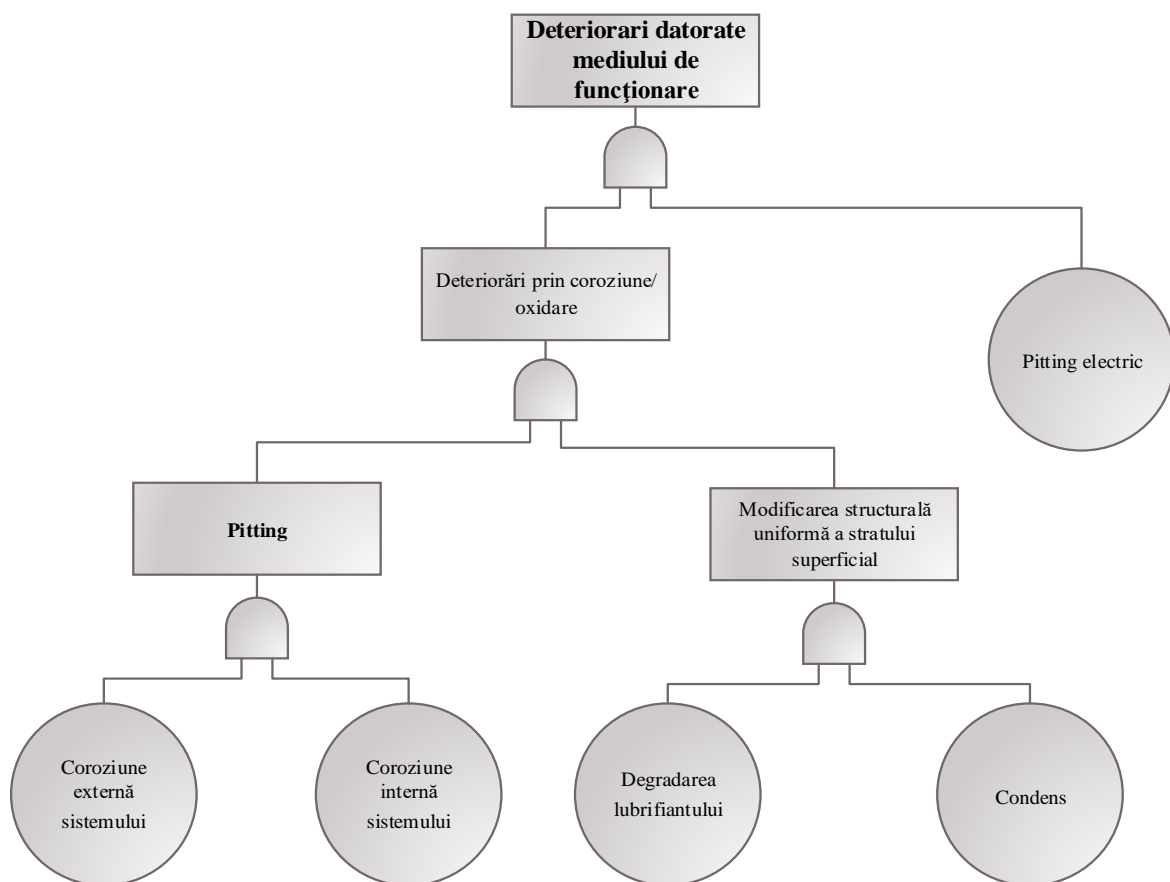
c. Deteriorări determinate de cauze mecanice

Fig. 2.2 (continuare) Mecanisme de defectare ale rulmenților [MCO 15]

În cazul rulmenților, lipsa de date suficiente pentru definirea repartițiilor referitoare la fiecare tip de deteriorare face ca, deocamdată, calculul obișnuit să considere distinct, în relație cu durabilitatea, fie oboseala de contact [CHA 91], [GAF 85], [HAR 91], fie uzura de tip abraziv [GAF 85], [ESC 85]. În rest, se stabilesc condiții limită, recomandări și specificații adecvate. Dacă în cazul fenomenului deteriorării prin oboseala de contact, durabilitatea rulmenților se determină ținând cont de caracterul statistic al inițierii și dezvoltării defectului, în cazul uzării de tip abraziv calculul este determinist [ESC 85], [GAF 85].



d. Deteriorări determinate de lubrifiere prin supraîncălzire, sau gripaj



e. Deteriorări datorate mediului de funcționare

Fig. 2.2 (continuare) Mecanisme de defectare ale rulmenților [MCO 15]

Evaluarea fiabilității previzionale a rulmenților se efectuează, în general, ca etapă inițială de calcul al fiabilității elementelor componente ale unui sistem mecanic complex.

Modelul de evaluare a fiabilității previzionale a rulmenților, ce va fi descris în continuare, are la bază următoarele ipoteze:

1. Evaluarea fiabilității previzionale a rulmenților se realizează pentru perioada operațională normală a produselor, perioadă caracterizată printr-o rată de defectare constantă.
2. Modelul statistic utilizat pentru caracterizarea fiecărui tip distinct de deteriorare, ce poate deveni efectiv în timpul funcționării rulmenților, este repartiția exponențială.
3. Sistemul de fiabilitate al unui rulment, obținut prin considerarea tuturor mecanismelor de deteriorare tipologic distincte ce pot deveni efective ca urmare a unor condiții concrete de funcționare este un sistem serie. Acest lucru rezultă din analiza arborelui de defectare specific cazului unui rulment (fig. 2.2). Se constată că inițierea unui mecanism de defectare conduce, în timp, la defectarea invariabilă a rulmentului.
4. Pentru simplificarea calculului, interdependențele, combinațiile și suprapunerile de efecte ce pot apărea în cazul diferitelor tipologii de deteriorare se neglijează.

Fiabilitatea rulmentului, cu considerarea tuturor posibilităților cumulative de defectare, se poate calcula cu relația [ESC 85]:

$$R_C(t) = R_1(t) \cdot \dots \cdot R_m(t) = \prod_{i=1}^m R_i(t) \quad (2.1)$$

și este vizibil influențată de numărul defectărilor ($i = \overline{1, m}$) tipologic distincte.

Pe baza ipotezelor simplificatoare, prezentate anterior, relația (2.1) poate fi scrisă sub forma:

$$R_C(t) = e^{-\lambda_C t} = e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_{ci} t}, \quad (2.2)$$

în care:

λ_C – reprezintă valoarea efectivă a ratei de defectare;

λ_{ci} - reprezintă valoarea ratei de defectare pentru fiecare tip de deteriorare considerat.

Deci, pentru evaluarea fiabilității este necesară stabilirea valorilor λ_{ci} , $i = \overline{1, m}$. Acest lucru se poate realiza fie în condițiile existenței unei baze de date ce conține informații de natură cantitativă obținute prin urmărirea în exploatare a produselor similare, ce funcționează în condiții asemănătoare rulmentului analizat, fie pe baza unor recomandări și normative adecvate.

În cazul fenomenului de deteriorare prin oboseală de contact, modelarea durabilității rulmenților se realizează prin utilizarea repartiției Weibull [GAF 85]. Pentru valorile uzuale ale parametrului de formă ($\beta = 10/9$ la rulmenții cu bile și $\beta = 9/8$ pentru rulmenții cu role) funcția de fiabilitate a rulmenților [MCO 08c] se poate scrie:

$$R_{OC}(L) = e^{\ln(0.9) \cdot \left(\frac{L}{L_{10}}\right)^{1.1}}, \quad (2.3)$$

iar funcția rata defectărilor:

$$z_{OC}(L) = -\frac{\ln(0.9) \cdot 1.1}{L_{10}} \cdot \left(\frac{L}{L_{10}}\right)^{0.1}. \quad (2.4)$$

Relația (2.4) indică o funcție ușor crescătoare pentru rata defectării. În studiile de fiabilitate previzională a rulmenților, repartiția Weibull cu parametrul de formă $\beta = 1.1$ se poate aproxima prin repartiția exponențială, pentru $\beta = 1.0$.

Rezultă, în acest caz:

$$R_{OC}(L) = e^{\ln(0.9) \cdot \left(\frac{L}{L_{10}}\right)^{1.1}} = e^{-\lambda_{OC} \cdot t} \quad (2.5)$$

și

$$z_{OC}(L) = -\frac{\ln(0.9)}{L_{10}} = \lambda_{OC} \quad (2.6)$$

În relațiile (2.3) ÷ (2.6), L_{10} reprezintă durabilitatea nominală a rulmentului analizat. Această mărime se calculează pe baza valorii de catalog a sarcinii dinamice de bază (C) și a sarcinii dinamice echivalente (P). Aceasta din urmă se apreciază pe baza forțelor, Fr și Fa , care solicită rulmentul în timpul exploatarei.

Pe lângă modalitatea de cuantificare globală a influenței condițiilor concrete de funcționare și de mediu asupra fiabilității rulmenților, se mai pot utiliza și valorile ratei de defectare, specifice celorlalte mecanisme de deteriorare.

În acest caz, este necesară o analiză preliminară care să evidențieze restul mecanismelor de deteriorare ce pot apărea ca urmare a condițiilor concrete în care funcționează rulmentul analizat. Valoarea efectivă a ratei de defectare se calculează cu relația:

$$\lambda_C = \lambda_{OC} + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_{ci}, \quad (2.7)$$

pe baza valorilor individuale ale ratei de defectare λ_{ci} , corespunzătoare celorlalte forme de deteriorare.

Studiu de caz

Pentru exemplificarea utilizării algoritmului propus, în continuare, este prezentat un exemplu teoretic simplificat, de calcul al fiabilității previzionale, pentru un rulment radial cu bile tip 6307 utilizat la lăgăruirea unui arbore din construcția echipamentului de material rulant. Acest tip de rulment a fost ales din condiția unei durabilități impuse: $L_h = 50\,000$ ore,

Calculul fiabilității rulmentului din condiția oboselii de contact cu rostogolire, prin utilizarea relațiilor (2.5) și (2.6):

$$z_{OC} = \lambda_{OC} = -\frac{\ln(0.9)}{50000} = 2.107 \cdot 10^{-6} \text{ defectări/oră.}$$

Informațiile de natură cantitativă privind restul mecanismelor de deteriorare ce pot apărea ca urmare a condițiilor concrete în care funcționează rulmenții pentru material rulant au fost preluate din [GAF 85]. Principalele deteriorări întâlnite sunt:

▪ Ciupire (PITTING):	7.01 %	▪ Fisuri, ruperi:	1.25 %
▪ Uzură abrazivă:	12.06 %	▪ Curent electric:	57.75 %
▪ Amprente:	2.09 %	▪ Alte deteriorări:	5.47 %
▪ Coroziune:	14.38 %		

Valorile ratelor de deteriorare ($\lambda_{ci}, i = \overline{1, m-1}$) se pot determina pornind de la rata de defectare (λ_{OC}), calculată anterior din condiția oboselii de contact, știind că aceasta are o pondere de 7.01 % din totalul defectărilor. Rezultă:

Mecanismul de deteriorare:	Rata de defectare, λ_{ci} , [10 ⁻⁶ defectări/oră]	Mecanismul de deteriorare:	Rata de defectare, λ_{ci} , [10 ⁻⁶ defectări/oră]
▪ Uzură abrazivă:	3.625	▪ Fisuri, ruperi:	0.373
▪ Amprente:	0.628	▪ Curent electric:	17.360
▪ Coroziune:	4.323	▪ Alte deteriorări:	1.644

Fiabilitatea rulmenților datorată degradărilor cumulative, pentru cazul analizat, se obține prin utilizarea relațiilor (2.1) și (2.2):

$$R_C(t) = e^{-30.06 \cdot 10^{-6} \cdot t}$$

Fiabilitatea previzională a rulmenților rezultă și prin considerarea fiabilității cauzată de defectările accidentale [POP 76]:

$$\lambda_{Ac} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ defectări/oră.}$$

Conform ecuației (2.2), expresia fiabilității previzionale a rulmentului considerat, este:

$$R(t) = e^{130.06 \cdot 10^{-6} \cdot t}$$

Cunoscând expresia funcției de fiabilitate calculul fiabilității rulmentului considerat, pentru o anumită durată de viață, devine foarte simplu. Valoarea fiabilității rulmentului **6307**, după o durată de exploatare de $t = 500$ ore, este:

$$R(500) = 0.937.$$

În urma cercetărilor desfășurate, în vederea evaluării fiabilității previzionale a rulmenților, se pot desprinde următoarele concluzii:

- 1) algoritmul elaborat pentru aprecierea fiabilității previzionale a rulmenților permite considerarea globală a tuturor posibilităților de deteriorare ce pot deveni efective în cazul unei aplicații concrete;
- 2) pentru evaluarea fiabilității previzionale a rulmenților, ca elemente componente ale unui sistem mecanic complex, acest model consideră inclusiv variabilitatea specifică condițiilor de funcționare din perioada operațională normală;
- 3) metoda de calcul propusă permite, de asemenea, aprecierea durabilității globale a unui ansamblu prin considerarea contribuției tuturor rulmenților la deteriorarea sistemului;
- 4) acest model poate constitui un instrument foarte util de calcul și analiză a fiabilității unui sistem mecanic, mai ales în faza de proiect tehnic.

2.2 DETERMINAREA INDICATORILOR DE FIABILITATE AI RULMENȚILOR UTILIZÂND DATE EXPERIMENTALE OBȚINUTE PRIN ÎNCERCĂRI EFECTUATE PRIN METODA LINIEI DEFECTELOR PRIMARE

Informațiile privind fiabilitatea se obțin, în principal, prin urmărirea comportării produselor în exploatarea reală. Pe lângă acestea, informații privind fiabilitatea se pot obține în urma încercărilor efectuate pe standuri sau în laboratoare adecvate.

Prin test (încercarea) de fiabilitate se înțelege un experiment organizat în vederea determinării indicatorilor de fiabilitate pentru un produs bine precizat.

Încercările uzuale la durabilitate/fiabilitate ale rulmenților sunt realizate pe standuri specializate, proiectate astfel încât să îndeplinească următoarele condiții:

- să asigure condiții identice de funcționare pentru toți rulmenții de încercat;
- să reproducă condițiile de funcționare a rulmenților în conformitate cu ipotezele de calcul pentru sarcina dinamică de bază (turații moderate, încărcare cu sarcină pur radială/axială, să asigure o lubrifiere corespunzătoare cu lubrifianți recomandați, necontaminați sau degradați chimic și mecanic, să asigure o răcire corespunzătoare, inelul interior rotitor și inelul exterior fix) și să permită montarea și demontarea ușoară a rulmenților;
- să fie prevăzute cu aparatură de măsurare a temperaturii, vibrațiilor, pentru a putea depista momentul deteriorării.

După scopul încercării, în cadrul fabricației de rulmenți se realizează, frecvent, *încercări pentru controlul indicatorilor de fiabilitate a rulmenților*. Aceasta încercare se mai numește și încercare de tip și se repetă periodic, la intervale bine precizate de timp.

Prin această încercare se verifică dacă durabilitatea nominală, a rulmenților, se menține la nivelurile cerute prin normative. Rolul lor este de efectuare a auditului producției prin aprecierea globală a calității materialelor utilizate și a procedurilor tehnologice aplicate.

Principalul indicator de fiabilitate asociat funcționării rulmenților, este:

- durabilitate nominală, L_{10} , definită pentru un rulment individual sau o grupă de rulmenți aparent identici și care funcționează în aceleași condiții, durabilitate asociată unei fiabilități de 90%, la o calitate convențională a materialului și a fabricației și în condiții de funcționare, de asemenea, convenționale:

$$L_{10} = \gamma + \eta \cdot \left[\ln \left(\frac{1}{1 - 0.10} \right) \right]^{1/\beta} \quad (2.8)$$

Din analiza definiției corespunzătoare, împreună cu relația (2.8), se constată că durabilitatea nominală reprezintă, de fapt, cuantila 0,10 a timpului de funcționare până la defectare.

Pentru caracterizarea durabilității rulmenților se utilizează mai rar și noțiunile:

- durabilitatea mediană, L_{50} - care reprezintă durabilitatea asociată unei probabilități de 0.50;
- durabilitatea medie, L_m - care reprezintă media duratelor de viață a rulmenților.

După procedura de încercare, producătorii de rulmenți utilizează teste cenzurate, trunchiate (mai rar) și încercări prin metoda liniei defectelor primare (Sudden Death Test) [POP 79].

Metoda constă în gruparea la întâmplare a celor n produse supuse testării, în ℓ submulțimi și considerarea fiecărei submulțimi ca un ansamblu de m ($n = \ell \cdot m$) elemente în serie (fig. 2.3).

După o astfel de grupare, testarea continuă până la apariția și înregistrarea timpului la care s-a defectat primul element din fiecare ansamblu în parte, restul de $m - 1$ elemente se suspendă. Timpii de deteriorare înregistrați $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{s\ell}$ reprezintă prima statistică de ordine, în cazul unui eșantion de volum m , prelevat dintr-o populație Weibull. Dacă cele n elemente se prelevează dintr-o populație Weibull având $f(t)$ dată de relația (1.43), pentru $\gamma = 0$, atunci timpii de deteriorare înregistrați, corespunzătorii liniei defectelor primare, au funcția de repartiție [KEC 94], [CHA 91]:

$$F_s(t) = 1 - [1 - F(t)]^m = 1 - e^{-\left(\frac{t}{m^{-\frac{1}{\beta} \cdot \eta}}\right)^\beta} \quad (2.9)$$

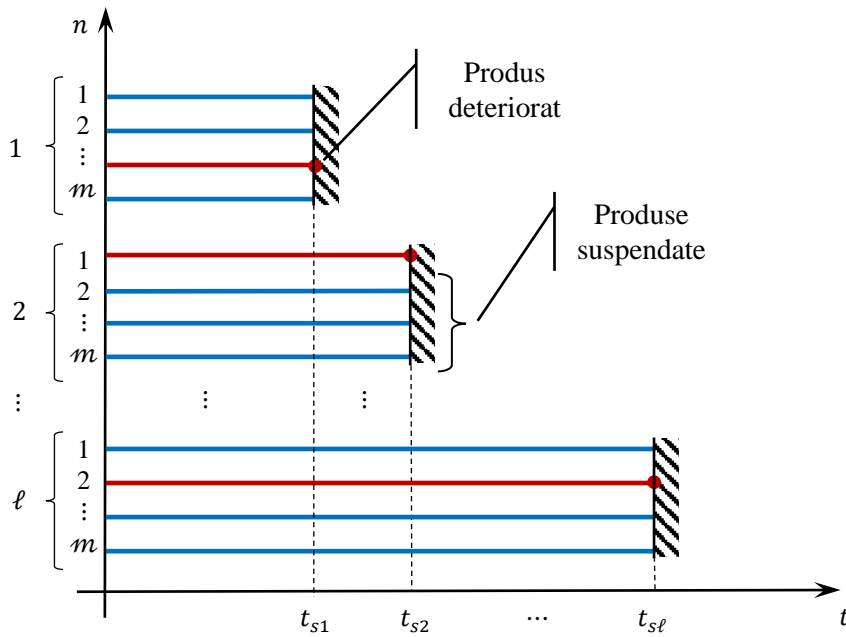


Fig. 2.3 Schema desfășurării încercărilor efectuate prin metoda liniei defectelor primare [MCO 17b]

Deci, dacă variabila aleatorie T este repartizată $\mathcal{W}(t, \beta, \eta)$, atunci prima statistică de ordine T_s corespunzătoare unui eșantion de volum m este repartizată $\mathcal{W}\left(t_s, \beta, m^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \eta\right)$.

Între parametrii populației și cei ai liniei defectelor primare există relațiile [KEC 93]:

$$\begin{cases} \beta_s = \beta \\ \eta_s = m^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \eta \\ t_{sp} = m^{-\frac{1}{\beta}} \cdot t_p \end{cases} \quad (2.10)$$

În [MCC 74b] se demonstrează că în cazul estimatorilor de verosimilitate maximă, aplicați timpilor de deteriorare obținuți prin metoda liniei defectelor primare, se pot stabili următoarele variabile aleatorii, independente de parametrii populației:

$$\begin{cases} \frac{\hat{\beta}_s}{\beta} = v(\ell, \ell) \\ \hat{\beta}_s \cdot \ln\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right) = s(\ell, m) \\ \hat{\beta}_s \cdot \ln\left(\frac{\hat{t}_{0.10}}{t_{0.10}}\right) = q(\ell, m, 0.10) \end{cases} \quad (2.11)$$

Acest procedeu reprezintă o metodă alternativă utilizată la încercările de fiabilitate a rulmenților care asigură o împrăștiere mai mică a valorilor estimate ale indicatorilor de fiabilitate. Această afirmație se poate demonstra prin expresia raportului dispersiilor liniei defectelor primare și a populației [CHA 81]:

$$\frac{V(T_s)}{V(T)} = m^{-\frac{1}{\beta}} \quad (2.12)$$

Reprezentând grafic relația (2.12), se observă, vezi fig. 2.4, că pentru valorile uzuale ale parametrului de formă, specifice funcționării rulmenților ($0.8 \leq \beta \leq 2.8$) și $m > 1$, împrăștierea estimatorilor astfel obținuți este mai mică decât a celor obținuți prin metodele clasice de încercare, ($m = 1$).

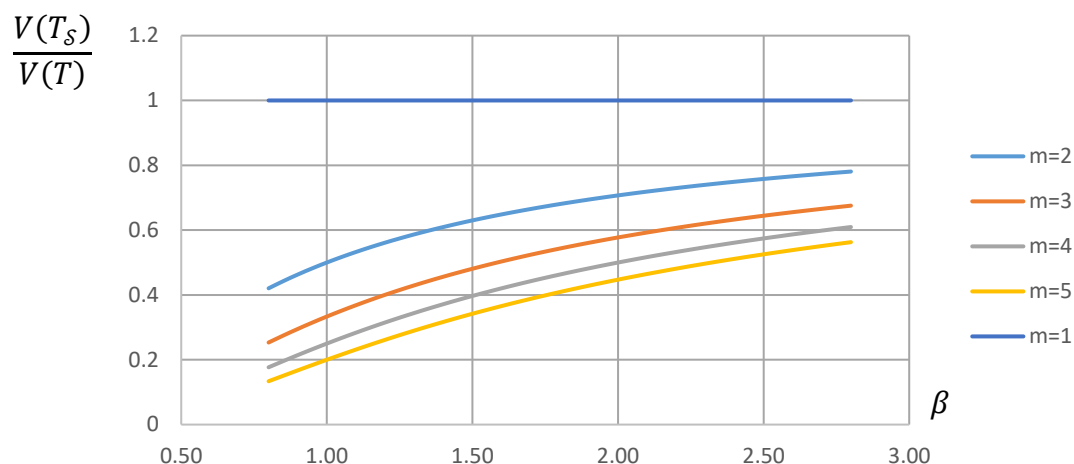


Fig. 2.4 Variația raportului dintre dispersiile liniei defectelor primare și populației, în funcție de m și β [MCO 17b]

După regimul de lucru, în cazul testelor de fiabilitate a rulmenților se utilizează încercările accelerate. Pentru scurtarea duratei încercărilor se procedează la creșterea constrângerilor, în raport cu condițiile de exploatare.

Factorul de accelerare se determină cu relația:

$$L_{10h} = \frac{1000000}{60 \cdot n} \cdot \left(\frac{C}{P}\right)^q \quad (2.13)$$

în care:

n = reprezintă turația de încercare, [rot/min].

După volumul produselor, încercările specifice fabricației de rulmenți sunt încercări efectuate pe eșantioane de volum redus.

Estimarea parametrilor repartiției Weibull și a indicatorilor de fiabilitate ai rulmenților testați prin metoda liniei defectelor primare se realizează prin prelucrarea statistică a valorilor experimentale obținute.

Pentru o estimare cu un grad de acuratețe ridicat se utilizează modelul repartiției Weibull triparametrice.

Valoarea estimată a parametrului de localizare, γ se determină din condiția de maxim a valorii coeficientului de corelație, conform subcapitolului 1.2.1. Odată ce această valoare este cunoscută, printr-o schimbare de variabilă aleatorie, de tipul:

$$X = T_S - \gamma, \quad (2.14)$$

obținem valorile experimentale pentru o repartiție Weibull biparametrică.

Estimațiile punctuale ale parametrilor liniei defectelor primare se obțin prin metoda verosimilității maxime. Valorile estimate ale parametrului de formă, $\hat{\beta}_S$ și ale celui de scală, $\hat{\eta}_S$ reprezintă soluția următorului sistem de ecuații de verosimilitate:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\beta}_s} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{\ell} x_i^{\hat{\beta}_s} \cdot \ln x_i}{\sum_{i=1}^{\ell} x_i^{\hat{\beta}_s}} = 0 \\ \hat{\eta}_s^{\hat{\beta}_s} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{\ell} x_i^{\hat{\beta}_s} \end{cases} \quad (2.15)$$

Pornind de la aceste valori ($\hat{\beta}_s$ și $\hat{\eta}_s$), parametrii populației se obțin utilizând relațiile (2.10). Valoarea estimată a durabilității nominale se estimează prin intermediul ecuației (2.8).

Realizarea inferențelor statistice presupune cunoașterea cuantilelor variabilelor aleatorii (2.11). Din păcate aceste valori nu se găsesc publicate în literatura de specialitate, pentru combinațiile uzuale ale parametrilor încercărilor efectuate prin metoda liniei defectelor primare.

Calculul acestor valori [MCO 17b], s-a realizat prin intermediul unui program de calcul Mathcad 14, dezvoltat având la bază algoritmul prezentat în fig. 2.5.

Realizare inferențelor statistice pentru populația Weibull este necesară extrapolarea acestor proprietăți la nivelul eșantionului de volum n , pe baza căruia s-a obținut prin încercare linia defectelor primare. Deoarece, valorile variabilelor aleatorii (2.11) sunt independente de parametrii repartiției, inferențele statistice ale parametrilor repartiției și ale durabilități nominale se realizează folosind următoarele ecuații:

Cazul parametrului de formă:

a. Estimatorul mediu nedeplasat al parametrului de formă - $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\beta}_s}{\bar{v}(\ell, \ell)} \quad (2.16)$$

În relația (2.16) s-a notat cu $\bar{v}(\ell, \ell)$ valoarea medie a variabilei aleatorii $v(\ell, \ell)$. Estimatorul punctual mediu nedeplasat, se calculează având la bază proprietatea că valoarea medie a estimațiilor este egală cu valoarea adevărată a parametrului ce se estimează.

b. Estimatorul median nedeplasat al parametrului de formă - $\hat{\beta}_{Me}$:

$$\hat{\beta}_{Me} = \frac{\hat{\beta}_s}{v_{0.50}(\ell, \ell)} \quad (2.17)$$

În relația (2.17) s-a notat cu $v_{0.50}(\ell, \ell)$ valoarea mediană a variației aleatorii $\hat{\beta}_s/\beta$. Estimatorul punctual median nedeplasat, (2.17), se determină din condiția:

$$Pr(\hat{\beta}_{Me} \leq \beta) = 0.50. \quad (2.18)$$

c. Intervalul de încredere bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1-\alpha$, se obține ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[v_{\alpha/2}(\ell, \ell) \leq \frac{\hat{\beta}_s}{\beta} \leq v_{1-\alpha/2}(\ell, \ell) \right] = 1 - \alpha. \quad (2.19)$$

Intervalul de încredere rezultă sub forma:

$$\frac{\hat{\beta}_s}{v_{1-\alpha/2}(\ell, \ell)} \leq \beta \leq \frac{\hat{\beta}_s}{v_{\alpha/2}(\ell, \ell)}. \quad (2.20)$$

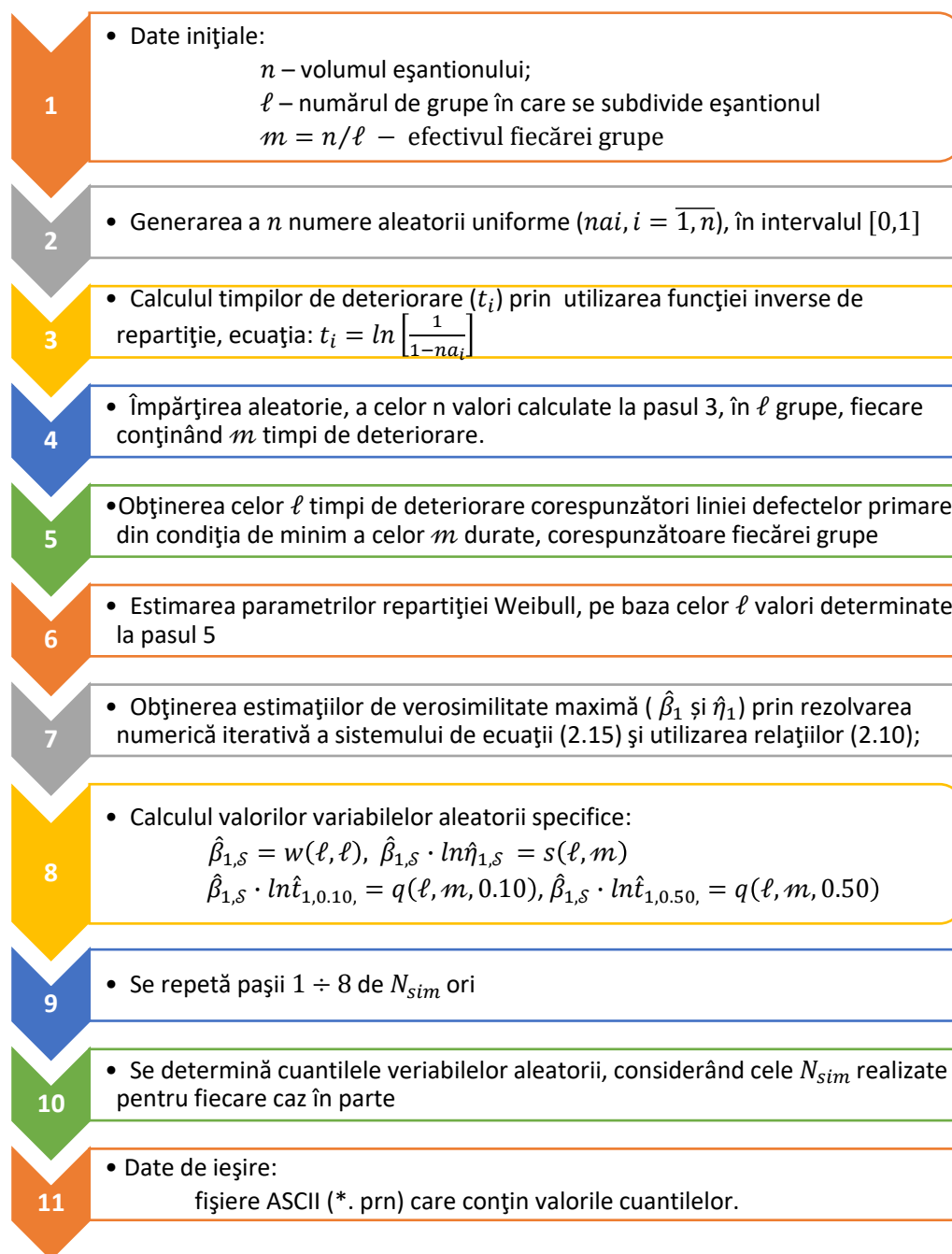


Fig. 2.5 Algoritm de calcul utilizat pentru simularea încercărilor efectuate prin metoda liniei defectelor primare și estimarea parametrilor folosind metoda verosimilității maxime [MCO 17b]

Cazul parametrului de scală

- a. Estimatorul mediu nedeplasat al parametrului de scală - $\hat{\eta}$:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta} \cdot e^{-\frac{\bar{s}(\ell, m)}{\hat{\beta}_s}} \quad (2.21)$$

- b. Estimatorul median nedeplasat al parametrului de scală - $\hat{\eta}_{Me}$:

$$\hat{\eta}_{Me} = \hat{\eta} \cdot e^{-\frac{s_{0.50}(\ell, m)}{\hat{\beta}_s}} \quad (2.22)$$

- c. Intervalul de încredere bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1-\alpha$, se obține ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[s_{\alpha/2}(\ell, m) \leq \hat{\beta}_s \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right) \leq s_{1-\alpha/2}(\ell, m) \right] = 1 - \alpha. \quad (2.23)$$

Intervalul de încredere rezultă sub forma:

$$\hat{\eta} \cdot \left[e^{\frac{-s_{1-\alpha/2}(\ell, m)}{\hat{\beta}_s}} \right] \leq \eta \leq \hat{\eta} \cdot \left[e^{\frac{-s_{\alpha/2}(\ell, m)}{\hat{\beta}_s}} \right]. \quad (2.24)$$

Cazul durabilității nominale, $L_{10} = t_{0.10}$

a. Estimatorul mediu nedeplasat al cuantilelor - $\hat{t}_{0.10}$:

$$\hat{t}_{0.10} = \hat{t}_{0.10} \cdot e^{\frac{-\bar{q}(\ell, m, 0.10)}{\hat{\beta}_s}}. \quad (2.25)$$

b. Estimatorul median nedeplasat al cuantilelor - $\hat{t}_{0.10, Me}$:

$$\hat{t}_{0.10, Me} = \hat{t}_{0.10} \cdot e^{\frac{-q_{0.50}(\ell, m, 0.10)}{\hat{\beta}_s}}. \quad (2.26)$$

c. Intervalul de încredere bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, se obține ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[q_{\alpha/2}(\ell, m, 0.10) \leq \hat{\beta}_s \cdot \ln \left(\frac{\hat{t}_{0.10}}{t_{0.10}} \right) \leq q_{1-\alpha/2}(\ell, m, 0.10) \right] = 1 - \alpha. \quad (2.27)$$

Rezolvând ecuația (2.27), se obține:

$$\hat{t}_{0.10} \cdot \left[e^{\frac{-q_{1-\alpha/2}(\ell, m, 0.10)}{\hat{\beta}_s}} \right] \leq t_{0.10} \leq \hat{t}_{0.10} \cdot \left[e^{\frac{-q_{\alpha/2}(\ell, m, 0.10)}{\hat{\beta}_s}} \right]. \quad (2.28)$$

Studiu de caz

În urma testării pe stand a unui lot de $n = 20$ de rulmenți radial-axiali cu role conice tip LM11949/LM11910, grupați aleatoriu cu $\ell = 5$ and $m = 4$ și solicitați cu o forță axială, $Pa = 450$ [daN] la o turație de 4000 [rpm] s-au obținut următoarele valori experimentale:

102, 138, 193, 267, 319,

exprimate în ore de funcționare.

Valoarea estimată a parametrului de localizare, este:

$$\hat{\gamma} = 63.759 [h].$$

Această valoare asigură un coeficient de corelație, $\rho(\hat{\gamma}) = 0.995$, valoare care indică o foarte bună corelație cu modelul repartiției Weibull.

Pentru a realiza inferențele statistice pentru parametrii și indicatorii de fiabilitate ai rulmenților testați pe stand, prin simulare numerică s-au obținut următoarele valori pentru variabilele aleatorii (2.11):

$$\begin{array}{lll} \bar{v}(5,5) = 1.448, & \bar{s}(5,4) = -0.686, & \bar{q}(5,4,0.10) = 0.328, \\ v_{0.50}(5,5) = 1.011, & s_{0.50}(5,4) = -0.347, & q_{0.50}(5,4,0.10) = 0.131, \\ v_{0.975}(5,5) = 3.522, & s_{0.975}(5,4) = 0.683, & q_{0.975}(5,4,0.10) = 3.038, \\ v_{0.025}(5,5) = 0.617, & s_{0.025}(5,4) = -4.248, & q_{0.025}(5,4,0.10) = -1.149, \end{array}$$

în condițiile a $N_{sim} = 10000$ simulări.

Rezultatele obținute, pentru un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.95$, sunt prezentate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1 Valorile estimate ale indicatorilor de fiabilitate [MCO 17b]

Parametrii repartiției Weibull	Valorile estimate ale indicatorilor de fiabilitate					
Parametrul de formă, β	$\hat{\beta}_S$	$\hat{\beta}$	$\hat{\hat{\beta}}$	$\hat{\beta}_{Me}$	$\hat{\beta}_L$	$\hat{\beta}_U$
	1.817	1.817	1.255	1.463	0.516	2.942
Parametrul de scală, η	$\hat{\eta}_S$	$\hat{\eta}$	$\hat{\hat{\eta}}$	$\hat{\eta}_{Me}$	$\hat{\eta}_L$	$\hat{\eta}_U$
	157.909	338.568	494.026	409.967	232.502	3504.76 9
Durabilitatea nominală, $t_{0.10}$	$\hat{t}_{0.10,S}$	$\hat{t}_{0.10}$	$\hat{\hat{t}}_{0.10}$	$\hat{t}_{0.10,Me}$	$\hat{t}_{0.10,L}$	$\hat{t}_{0.10,U}$
	109.543	161.922	135.165	150.655	30.437	304.683

Metoda de realizare a inferențelor statistice pentru parametrii și indicatorii de fiabilitate ai rulmenților testați pe stand prin metoda liniei defectelor primare se pretează foarte bine în cazul eșantioanelor de volum redus (cum este cazul încercărilor de fiabilitate ai rulmenților).

Încercările efectuate prin metoda liniei defectelor primare (Sudden Death Tests) oferă condiții mult mai avantajoase, din punctul de vedere al operațiilor de montare-remontare a rulmenților pe standul de încercări, al numărului de rulmenți care funcționează pe stand în timpul încercării, prin eliminarea rulmenților ajutători și obținerea unor dispersii mult mai mici pentru estimatorii liniei defectelor primare, comparativ cu încercările convenționale.

2.3 ANALIZA FIABILITĂȚII SCARIFICATORULUI TRACTAT

Un scarificator este un utilaj de dislocare a pământului, a bolovanilor și rădăcinilor, a straturilor dure de materiale fixate în sol, sau pentru dislocarea materialului compactat, asfaltului și substratului stâncos pentru a facilita decopertarea terenurilor, a rocilor relativ slabe (care nu pot fi desfăcute direct cu alte echipamente, cupe sau lame).

O altă utilizare a scarificatorului este afânarea adâncă, fără întoarcerea brazdei. Aceasta se face pentru spargerea stratului impermeabil de sol și pentru a permite infiltrarea apei și a aerului din straturile superioare.

Din punct de vedere constructiv, scarificatoarele pot fi:

- tractate de un tractor pe șenile sau alte mașini pentru construcții;
- montate în partea din față a unui tractor sau ca atașament pe un utilaj de construcții (buldozer, autogreder etc.); în cazul grederului cu motor, scarificatorul poate fi montat în față sau între axe.

Componenta activă a scarificatoarelor (dintele de sacrificat) poate fi de diferite tipuri (fig. 2.6), în funcție de condițiile de lucru reale: (a) dinți dreupți; (b), (c) dinții curbați; (d), (e), (f) dinții de construcții speciale (d. - cu călcâi, e - fără călcâi, f - cu vârful detașabil). Dinții pot fi montați rigizi sau articulați pe un cadru [VOL 01].

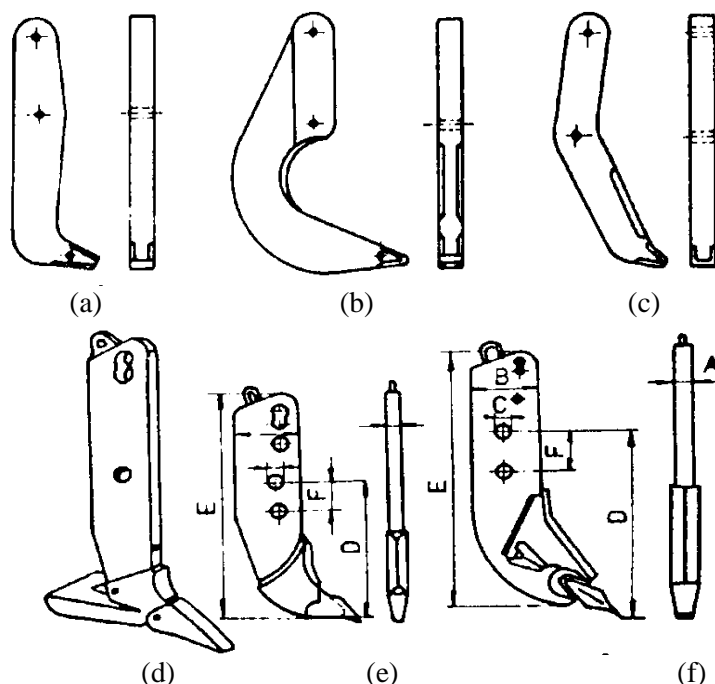


Fig. 2.6 Forme constructive ale dinților de scarificat [VOL 01]

În fig. 2.6 sunt prezentați dinții de scarificare, obișnuiți, utilizați ca atașament auxiliar pentru buldozer pentru executarea și reabilitarea drumurilor forestiere. Principalele caracteristici ale atașamentului în funcție de forța de tracțiune a mașinii de bază sunt prezentate în tabelul 2.2.

Tabelul 2.2 Caracteristici tehnice ale scarificatorului [VOL 01]

Parametrii scarificatorului	Forța de tracțiune [kN]					
	30	45	60	100	150	250
Numărul de dinți	3÷5	3÷5	3÷5	1÷5	1÷3	1÷3
Unghiul de rotație orizontal, [grd]	-	-	-	10÷15	10÷15	10÷15
Lungimea unui dinte, [cm]	45÷80	50÷80	60÷100	80÷140	80÷150	100÷190
Adâncimea maximă de tăiere, [cm]	20÷50	40÷60	35÷45	40÷100	50÷120	60÷150
Unghiul de tăiere, [grd]	40÷60	40÷60	35÷45	40÷80	40÷80	40÷80
Greutatea echipamentului, [t]	0.07÷0.19	0.12÷0.20	0.16÷0.21	0.18÷0.21	0.17÷0.24	0.20÷0.27

Organele active ale scarificatorului sunt dinții executați parțial sau total din oțel mangan. Dinții sunt montați pe suporturi inferioari montați, la rândul lor, pe o grindă transversală articulată la un suport intermediar atașat la tractor. Aceste organe sunt acționate de instalația hidraulică care fixează sau modifică poziția de înfigere a dinților. Scarificarea se face prin înfigerea dinților în teren. Datorită forței de tracțiune și efectului greutateii și al sistemului hidraulic de manevră care coboară, ridică sau menține scarificatorul într-o anumită poziție, dinții dislocă obiectele dure fixate în sol. Scarificatorul lucrează normal cu trei dinți drepiți sau cu trei dinți scormonitori. În terenuri ușoare se pot monta încă doi dinți suplimentari. În terenuri foarte tari se lucrează cu un singur dinte montat pe suportul central.

Comparativ cu activitățile obișnuite, în cazul reabilitării și întreținerii drumurilor forestiere, dimensiunile dinților de scarificat sunt mai mici. În acest mod, în fig. 2.7 este prezentat un model 3D de scarificator tractat care are caracteristici constructive capabile să susțină forța de tracțiune de 100 kN.

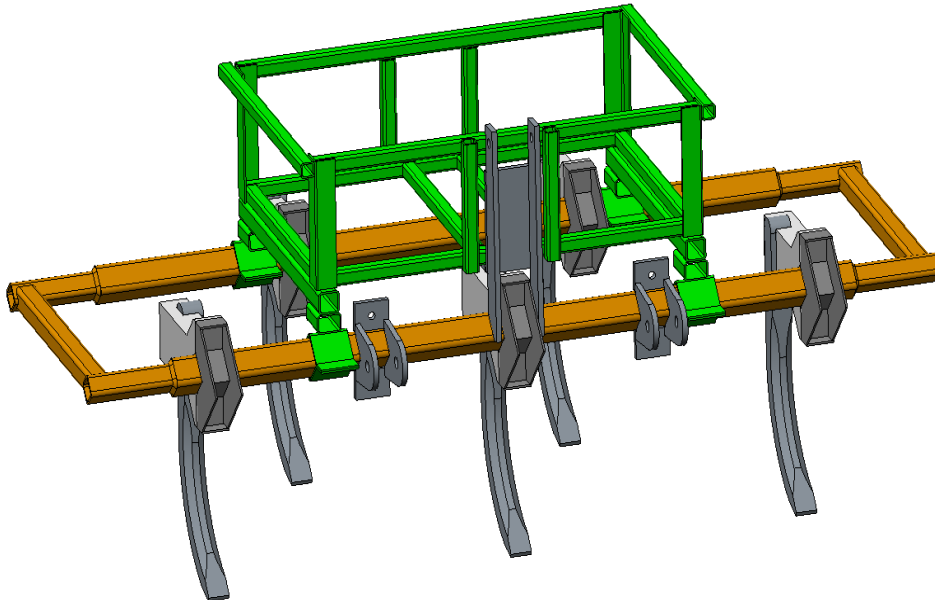


Fig. 2.7 Modelul 3D al scarificatorului tractat [MCO 17a]

Pentru analiza fiabilității dinților de scarificat ai scarificatorului tractat, în prima etapă, s-a identificat modelul statistic cel mai potrivit pentru o astfel de analiză. În acest sens, s-a utilizat testul general de concordanță, Anderson-Darling, aplicat asupra datelor experimentale, $y_i, i = \overline{1, n}$, luând în considerare patru repartiții statistice utilizate în analizele de fiabilitate: repartiția Weibull, repartiția log-normală, repartiția exponențială și repartiția normală [MCO 17a].

Aplicarea acestui test de concordanță, în cele patru cazuri, constă în calculul statisticii [KEC 93]:

$$A_n^2 = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[Q(y) - F(y)]^2}{F(y) \cdot [1 - F(y)]} \cdot dF(y). \quad (2.29)$$

Valoarea obținută reprezintă o măsură discrepantei dintre repartiția empirică, $Q(y)$, a valorilor de eșantionaj și repartiția teoretică, $F(y)$, considerată.

Dacă, pentru repartiția empirică se utilizează relațiile de calcul:

$$Q[y_{(i)}] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } Y < y_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & \text{pentru } y_{(i)} < Y < y_{(i+1)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ 1, & \text{pentru } Y > y_{(i)} \end{cases} \quad (2.30)$$

atunci, statistica testului Anderson-Darling rezultă sub forma:

$$A_n^2 = - \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot i}{n} \cdot \{ \ln F(y_{(i)}) + \ln [1 - F(y_{(n+1-i)})] \} - n. \quad (2.31)$$

Folosind rezultatele experimentale (tabelul 2.3), obținute prin urmărirea în funcționare a scarificatorului tractat, pentru dinții de scarificat, valorile calculate ale statisticii Anderson-Darling (conform tabelului 2.4) indică faptul că repartiția Weibull permite modelarea cu maximă acuratețe a duratei de funcționare a acestor echipamente.

Tabelul 2.3 Durabilitatea obținută în condiții reale de funcționare a dinților de scarificat [MCO 17a]

Dinte de scarificat	
Dintele nr.:	Durabilitatea [cicluri], $y_i, i = \overline{1, n}$
1	$1.000 \cdot 10^8$
2	$1.170 \cdot 10^8$
3	$1.330 \cdot 10^8$
4	$1.500 \cdot 10^8$
5	$1.670 \cdot 10^8$
6	$1.830 \cdot 10^8$

Tabelul 2.4 Valorile statisticii Anderson-Darling [MCO 17a]

Repartiția	Valorile statisticii Anderson-Darling, A_n^2
	Dinte de scarificat
Weibull	2.095
Log-normală	2.113
Exponențială	3.391
Normală	2.106

Reprezentarea grafică, pe rețele de probabilitate, a rezultatelor experimentale obținute, pentru cele patru modele statistice considerate este prezentată în fig. 2.8.

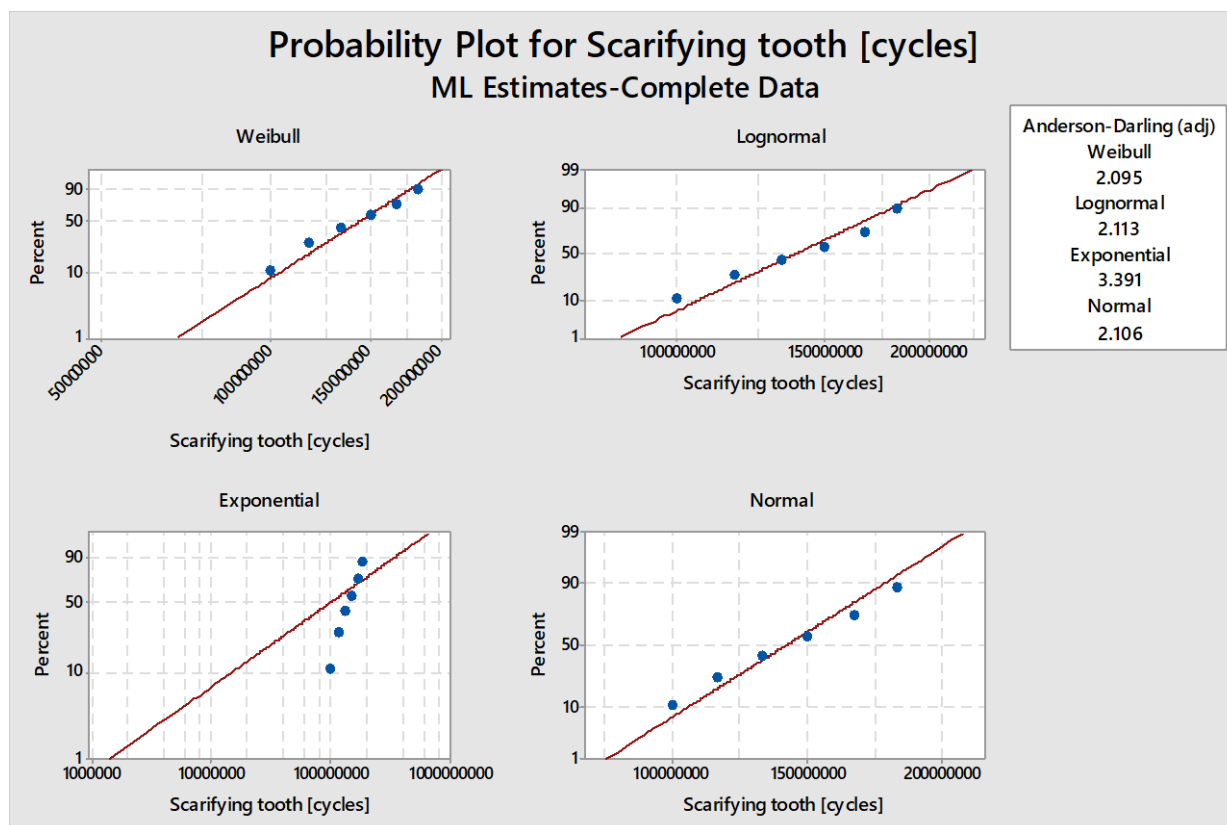


Fig. 2.8 Rețelele de probabilitate corespunzătoare datelor experimentale [MCO 17a]

Ținând cont de condițiile de lucru, de durata de funcționare, dar și de alți factori cum ar fi: factorii constructivi și cei tehnologici, se estimează fiabilitatea echipamentelor auxiliare ale grederului tractat utilizând repartiția Weibull triparametrică.

Valoarea estimată a parametrului de localizare, γ se determină din condiția de maxim a valorii coeficientului de corelație, conform subcapitolului 1.2.1. Valoarea parametrului de localizare, γ , indică valoarea duratei minime de viață a fiecărui subansamblu, estimată în condiții reale de funcționare. În tabelul 2.5 este prezentată valoarea estimată a parametrului γ , precum și valoarea coeficientului de corelație. Valoarea $\rho(\hat{\gamma}) = 0.998$, indică o foarte bună corelație cu modelul repartiției Weibull.

Tabelul 2.5 Valoarea estimată a parametrului de poziționare [MCO 17a]

Parametrul estimat:	Valoarea estimată
Coeficientul de corelație, ρ	0.99818
Parametrul de poziționare al repartiției Weibull, γ	$5.813 \cdot 10^7$

Odată ce această valoare este cunoscută, printr-o schimbare de variabilă aleatorie, de tipul $X = T - \gamma$, obținem valorile experimentale pentru o repartiție Weibull biparametrică. Aceste valori sunt:

$$4.1872 \cdot 10^7, 5.8872 \cdot 10^7, 7.4872 \cdot 10^7, 9.1872 \cdot 10^7, 1.0887 \cdot 10^8, 1.2487 \cdot 10^8.$$

Metoda de estimare punctuală folosită este metoda verosimilității maxime. În acest caz, valorile estimate ale parametrilor de formă și scală ale parametrilor repartiției Weibull biparametrice se obțin ca soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{\beta}} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \cdot \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}}} = 0 \\ \hat{\eta}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \end{cases} \quad (2.32)$$

Deoarece volumul eșantionului este foarte mic, $n = 6$, proprietățile asimptotice ale estimatorilor de verosimilitate maximă nu pot fi aplicate în acest caz. Estimațiile cu interval de încredere s-au calculat, în cazul aplicației Mathcad, pe baza a două variabile aleatorii:

$$\begin{cases} v(r, n) = \frac{\hat{\beta}}{\beta} \\ k(r, n) = \hat{\beta} \cdot \ln \left(\frac{\hat{\eta}}{\eta} \right) \end{cases} \quad (2.33)$$

independente de volumul eșantionului (n) și de tipul încercării ($n = r$, pentru încercări complete).

Astfel, pentru parametrul de formă:

- intervalul bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, se obține ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[v_{\alpha/2}(n, n) \leq \frac{\hat{\beta}}{\beta} \leq v_{1-\alpha/2}(n, n) \right] = 1 - \alpha \quad (2.34)$$

și este de forma:

$$\frac{\hat{\beta}}{v_{1-\alpha/2}(n, n)} \leq \beta \leq \frac{\hat{\beta}}{v_{\alpha/2}(n, n)}. \quad (2.35)$$

- estimăția medie nedeplasată este:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\beta}}{\bar{v}(n, n)}. \quad (2.36)$$

- estimăția mediană nedeplasată:

$$\hat{\beta}_{Me} = \frac{\hat{\beta}}{v_{0.50}(n, n)}. \quad (2.37)$$

Pentru parametrul de scală:

- intervalul bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, se obține ca soluție a ecuației de probabilitate:

$$Pr \left[k_{\alpha/2}(n, n) \leq \hat{\beta} \cdot \ln \frac{\hat{\eta}}{\eta} \leq k_{1-\alpha/2}(n, n) \right] = 1 - \alpha \quad (2.38)$$

și este de forma:

$$\hat{\eta} \cdot \left[e^{\frac{-k_{1-\alpha/2}(n, n)}{\hat{\beta}}} \right] \leq \eta \leq \hat{\eta} \cdot \left[e^{\frac{-k_{\alpha/2}(n, n)}{\hat{\beta}}} \right]. \quad (2.39)$$

- estimăția medie nedeplasată este:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta} \cdot e^{\frac{-\bar{k}(n, n)}{\hat{\beta}}}. \quad (2.40)$$

- estimăția mediană nedeplasată are expresia:

$$\hat{\eta}_{Me} = \hat{\eta} \cdot e^{\frac{-k_{0.50}(n, n)}{\hat{\beta}}}. \quad (2.41)$$

Estimațiile punctuale și cu interval de încredere pentru parametrii repartiției Weibull, calculate pe baza rezultatelor experimentale, sunt prezentate în tabelul 2.6. Nivelul de încredere utilizat este $1 - \alpha = 0.95$, iar valorile corespunzătoare a variabilelor aleatorii $v(r, n)$ și $k(r, n)$ au fost determinate folosind algoritmul de calcul descris în fig. 1.20. Rezultă, pentru cazul analizat, următoarele valori:

$$\begin{aligned} \bar{v}(6,6) &= 1.338, & \bar{k}(6,6) &= -0.0402, \\ v_{0.50}(6,6) &= 2.802, & k_{0.50}(6,6) &= -0.0399, \\ v_{0.975}(6,6) &= 5.252, & k_{0.975}(6,6) &= 1.208, \\ v_{0.025}(6,6) &= 1.132. & k_{0.025}(6,6) &= -1.301. \end{aligned}$$

Tabelul 2.6 Estimații parametrice cu interval de încredere 95% [MCO 17a]

Parametrii repartiției Weibull	Estimații parametrice cu interval de încredere 95%				
Parametrul de formă, β	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_{Me}$	β_L	β_U
	3.3322	2.4905	2.8026	1.1322	5.2526
Parametrul de scală, η	$\hat{\eta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\eta}_{Me}$	η_L	η_U
	$9.344 \cdot 10^7$	$9.457 \cdot 10^7$	$9.456 \cdot 10^7$	$6.502 \cdot 10^7$	$1.381 \cdot 10^8$

Valoarea mare, a parametrului de formă, $\beta = 3.3322$, indică faptul că se poate utiliza, la modelarea fiabilității și repartiția normală. La aceeași concluzie se poate ajunge și din analiza statisticilor Anderson-Darling, conform figurii 2.8 și tabelului 2.4.

Estimarea punctuală a parametrilor repartiției normale se realizează folosindu-se ecuațiile:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}{n-1}} \end{cases} \quad (2.42)$$

Semnificația celor doi parametri, ai repartiției normale, fiind:

μ – reprezintă media timpului de funcționare;

σ – reprezintă abaterea standard a timpului de funcționare,

Calculul intervalelor de încredere ale parametrilor oferă, de asemenea, informații prețioase despre cei doi indicatori de fiabilitate.

Relațiile de calcul utilizate sunt [POP 86]:

- pentru intervalul bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, al mediei:

$$\hat{\mu} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n} \leq \mu \leq \hat{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \hat{\sigma} / \sqrt{n}. \quad (2.43)$$

- pentru intervalul bilateral simetric, corespunzător unui nivel de încredere $1 - \alpha$, al abaterii standard:

$$\sqrt{\frac{(n-1) \cdot \hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1) \cdot \hat{\sigma}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}. \quad (2.44)$$

Estimațiile punctuale și cu interval de încredere pentru parametrii repartiției normale, determinate pe baza rezultatelor experimentale, sunt prezentate în tabelul 2.7. Nivelul de încredere utilizat este tot de $1 - \alpha = 0.95$.

Tabelul 2.7 Estimațiile parametrilor repartiției normale [MCO 17a]

Parametrii repartiției normale	Estimații parametriche cu interval de încredere 95%		
	$\hat{\mu}$	μ_L	μ_U
Media timpului de funcționare, μ	$1.4167 \cdot 10^8$	$1.0902 \cdot 10^8$	$1.7432 \cdot 10^8$
Abaterea standard a timpului de funcționare, σ	$\hat{\sigma}$	σ_L	σ_U
	$3.1111 \cdot 10^7$	$1.9419 \cdot 10^7$	$7.6302 \cdot 10^7$

Fiabilitatea dinților de scarificat, ai scarificatorului tractat, poate fi modelată prin utilizarea modelului repartiției Weibull triparametrică. În tabelul 2.8 este prezentată expresia analitică a funcției de fiabilitate, precum și valorile principalilor indicatori de fiabilitate, estimați pe baza rezultatelor experimentale prelevate din funcționarea acestui utilaj.

Analiza fiabilității dinților de scarificat, ai scarificatorului tractat, permite formularea următoarelor concluzii:

- Modelarea fiabilității celor trei echipamente se poate realiza, cu o precizie foarte bună, prin utilizarea modelului repartiției Weibull triparametrică.

- Valoarea duratei minime de viață, conform tabelului 2.8, estimată în condiții reale de funcționare este de $5.813 \cdot 10^7$ cicluri.

Tabelul 2.8 Indicatorii de fiabilitate ai dinților de scarificat [MCO 17a]

Subansamblu	Principalii indicatori de fiabilitate		
	$R(t)$	μ	σ
Dinte de scarificat	$e^{-\left(\frac{x-5.813 \cdot 10^7}{9.344 \cdot 10^7}\right)^{3.3322}}$	$1.416 \cdot 10^8$	$3.111 \cdot 10^7$

- Valorile mari ale parametrului de formă, ne permit să utilizăm în studiul de fiabilitate și repartiția normală. Acest fapt a condus la posibilitatea estimării punctuale și cu interval de încredere a duratei medii de funcționare a dinților de scarificat, ai scarificatorului tractat, precum și la estimarea abaterii standard a duratei de funcționare a acestora.
- Cunoașterea valorilor parametrilor modelului statistic al fiabilității, precum și valorile principalilor indicatori de fiabilitate, permit o abordare mult mai bună a activităților de mentenanță preventivă și o planificare realistă a acestora.

2.4 ANALIZA FIABILITĂȚII MAȘINII DE DEBITAT FURNIR

Furnirele estetice reprezintă furnire valoroase din punct de vedere estetic, având grosimi cuprinse între 0.55 și 1.2 mm, în funcție de specia lemnoasă utilizată. Grosimea furnirelor estetice este dată de densitatea, structura și penetrabilitatea speciilor lemnoase, după cum urmează [MIT 82]:

- speciile cu densitate mare și penetrabilitate redusă (nuc, păr) vor avea o grosime a furnirului de 0.55 mm;
- speciile cu densitate medie și porozitate redusă (anin, fag, paltin, cireș) vor avea o grosime a furnirului de 0.6÷0.7 mm;
- speciile cu densitate redusă și penetrabilitate mare (plop, tei) vor avea o grosime a furnirului de 0.7 mm;
- speciile cu vase mari și penetrabilitate ridicată (stejari, ulmi, frasin) vor avea o grosime a furnirului de 0.7÷0.8 mm;
- speciile de rășinoase vor avea o grosime de 1.0 mm;
- speciile cu defecte cu valoare estetică ridicată sau din rădăcină vor avea grosimea de 0.6 mm dacă este nuc și de 1.0÷1.2 mm dacă este plop.

Speciile lemnoase indigene des utilizate la fabricarea furnirelor estetice sunt anin, cireș, fag, molid, frasin, mesteacăn, nuc, paltin, par, plop, stejar, tei, etc.

Sucesiunea operațiilor fluxului tehnologic de realizare al furnirelor este prezentată în fig. 2.9. Dintre aceste operații cea mai importantă, din punctul de vedere al calității produsului final, o reprezintă operația de debitare a furnirelor.

Studiul de fiabilitate realizat a fost efectuat pentru o mașină orizontală de debitat furnir tip Slicer SM-H, fig. 2.10.

Datele utilizate în cadrul acestui studiu de caz au fost colectate pe o perioadă de un an, respectiv ianuarie ÷ decembrie 2004. În această perioadă, utilajul a funcționat continuu, 24 de ore din 24, șapte zile din șapte, realizând furnire de grosimi cuprinse între 0.5 și 1.2 mm.

Mașina orizontală de debitat furnir este dotată cu un dispozitiv de înregistrare automată a timpilor de oprire accidentală a utilajului. O aplicație scrisă în Visual Basic a permis determinarea rapidă a

timpului de funcționare al echipamentului. Au fost obținute următoarele valori experimentale, ale timpului de funcționare între două defectări accidentale, exprimate în minute [TOM 08]:

1400	9964	11440	3897	2782	7200	702	1426	500	9039	7167	22568
10027	2693	4310	2518	10080	4280	1355	6396	1144	1419	2854	2606
2673	10039	12955	8222	5382	2789	3895	7190	2301	2437	11339	5390
7189	5287	4187	2688	4308	2026	8084	4076	5728	4091	5326	2591
11513	2587	4278	4222	4206	1427	4247	2821	7101	11155	8502	2769
2405	5474	2840	4221	2537	2839	2786	4276	4212	1455	4246	8623
5747	2781	19684	7180	2750	5746	6869	4268	7128	14353	5502	5737
2863	18670										

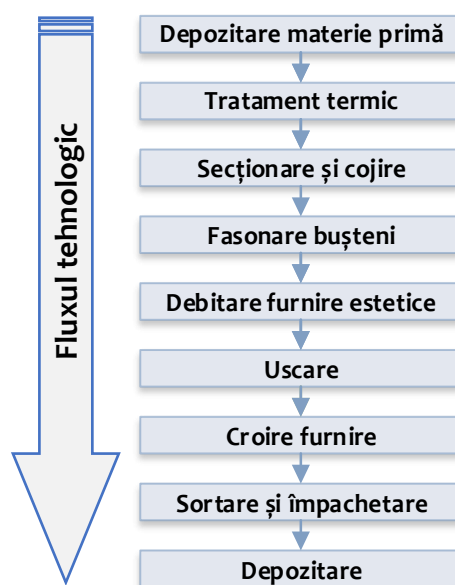


Fig. 2.9 Succesiunea operațiilor fluxului tehnologic de realizare al furnirelor [MIT 82]



Fig. 2.10 Mașina orizontală de debitat furnir tip Slicer SM-H

Prelucrarea statistică a timpilor de funcționare, între două defectări accidentale, are ca obiectiv identificarea unui model statistic și specificarea completă a acestuia. Etapele de calcul sunt cele din fig. 2.11 [MAR 04].

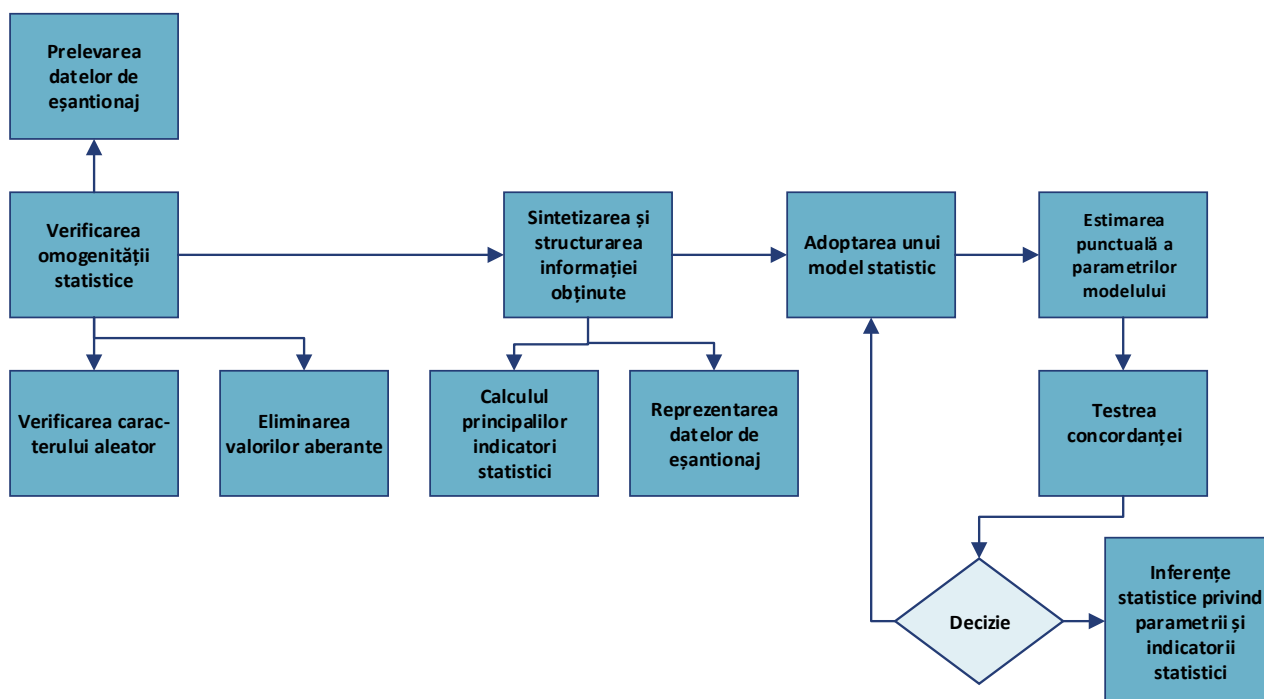


Fig. 2.11 Etapele analizei fiabilității și mentenabilității produselor [MAR 04]

Pentru parcurgerea acestor etape au fost realizate două aplicații Mathcad 14.

Primul program [TOM 08], este destinat verificării omogenității statistice (verificarea caracterului aleatoriu și identificarea și eliminarea valorilor aberante), precum și testarea concordanței datelor experimentale cu modelul statistic ales pentru modelarea datelor existente (datorită versatilității deosebite, s-a ales modelul repartiției Weibull).

În fig. 2.12 este prezentată schema logică a acestui program.

Verificarea caracterului aleatoriu se realizează prin metoda iterațiilor [POP 93]. În conformitate cu procedura recomandată, o iterație reprezintă valori numerice succesive, ale caracteristicii analizate, care au aceeași proprietate.

Iterațiile se determină după valoarea mediane, Me . Dacă:

- x_i , are valoare mai mare ca mediana \Rightarrow se notează cu „a”;
- x_i , are valoare mai mică, ca mediana \Rightarrow se notează cu „b”;
- x_i , are valoare egală cu mediana \Rightarrow se notează cu „m”.

Se determină, apoi, lungimea iterațiilor, respectiv numărul calificativelor consecutive, de același fel care alcătuiesc o iterație, poartă denumirea de lungime a iterației. Se ia în considerare valoarea maximă a acestor iterații, k_{max} .

Pe baza acestei valori se ia decizia. Și anume dacă:

$$k_{max} \leq k_{n,\alpha}, \quad (2.45)$$

se acceptă ipoteza privind caracterul aleatoriu al datelor de eșantionaj. Dacă:

$$k_{max} > k_{n,\alpha}, \quad (2.46)$$

se respinge ipoteza privind caracterul aleatoriu al datelor de eșantionaj.

În ecuațiile (2.45) și (2.46), prin $k_{n,\alpha}$ s-a notat valoarea critică a testului:

$$k_{n,\alpha} = \frac{\log \left[\frac{-0.43429 \cdot N}{\log(1 - \alpha)} \right]}{\log 2} - 1. \quad (2.46)$$

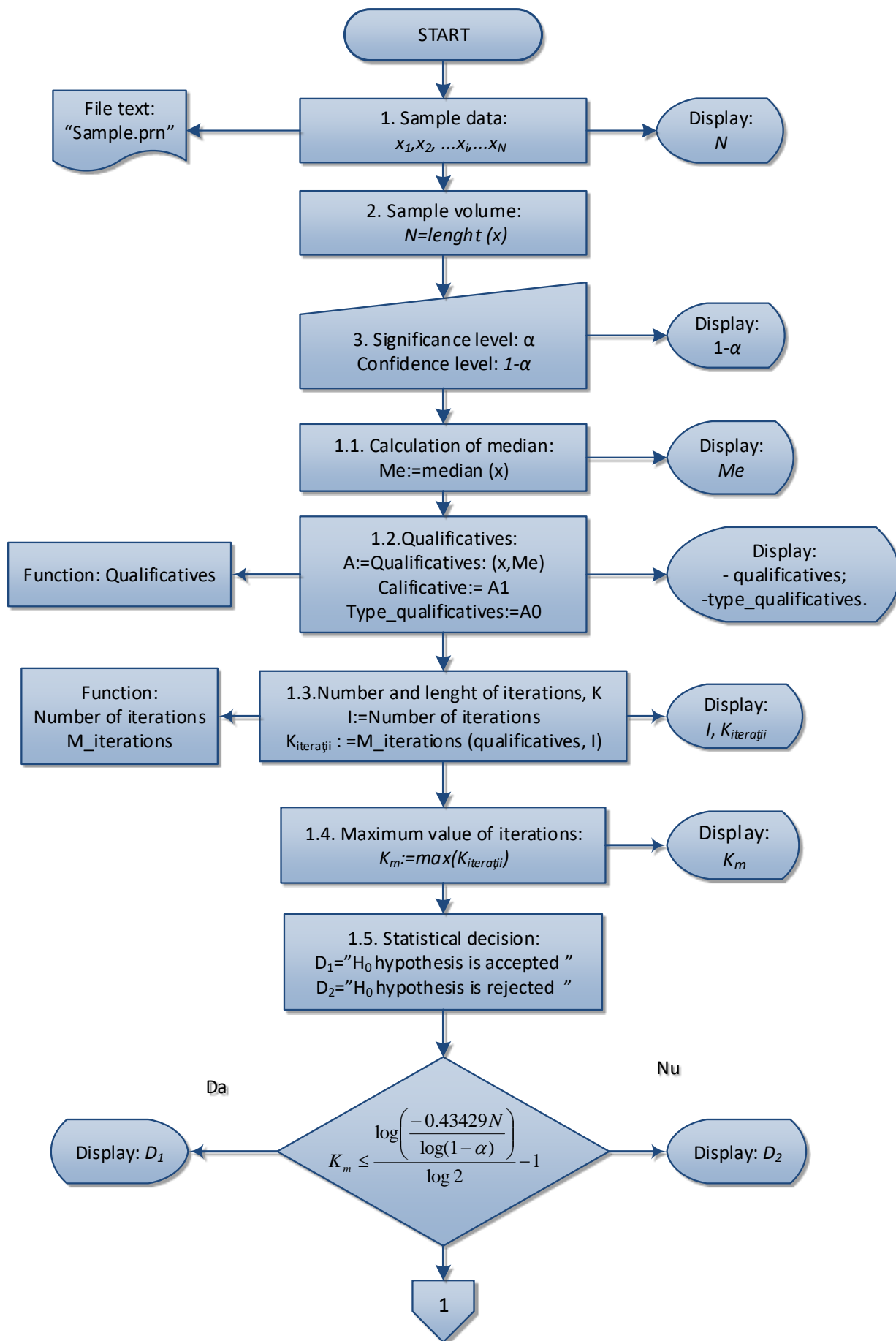


Fig. 2.12 Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [TOM 08]

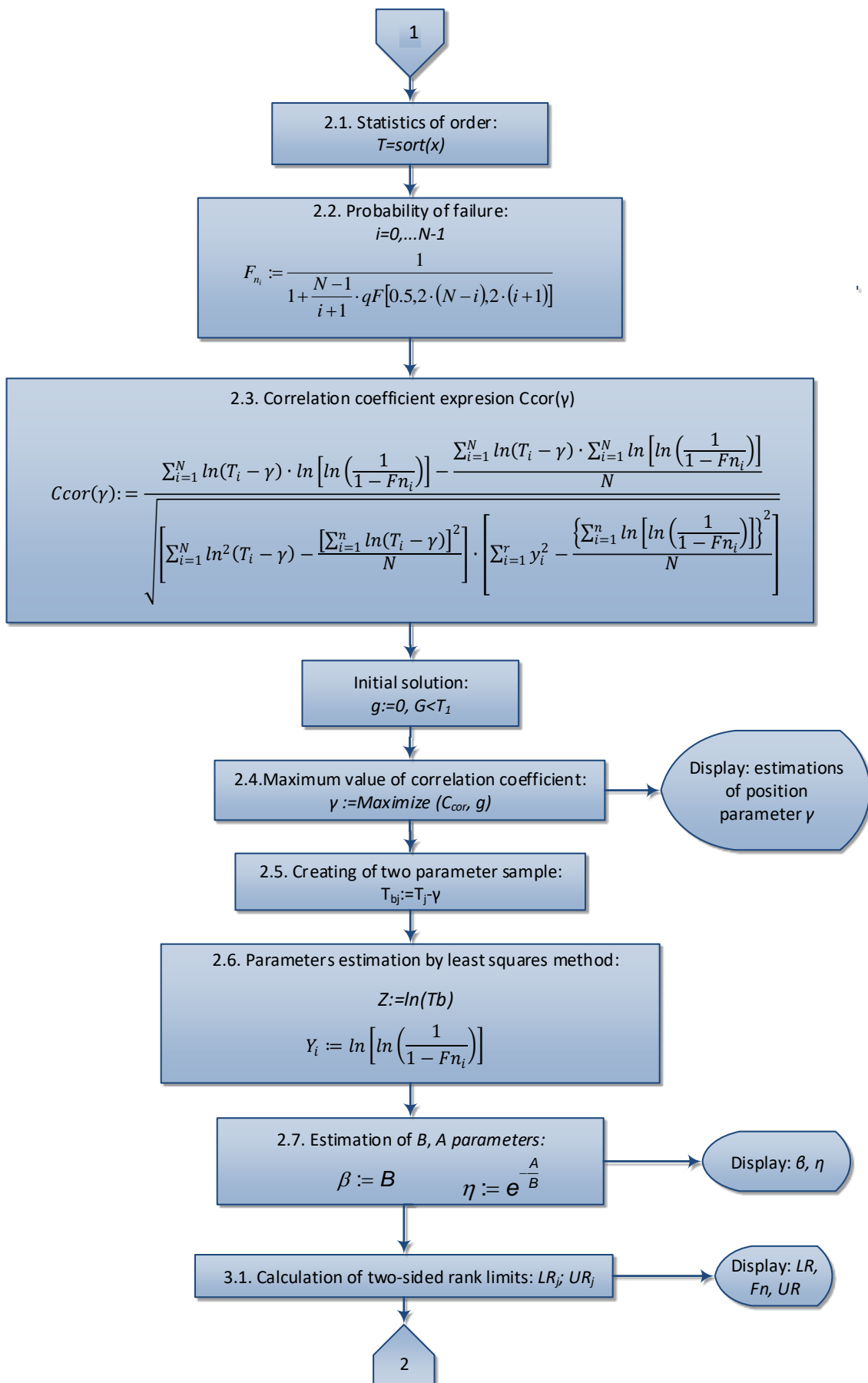


Fig. 2.12 (continuare) Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [TOM 08]

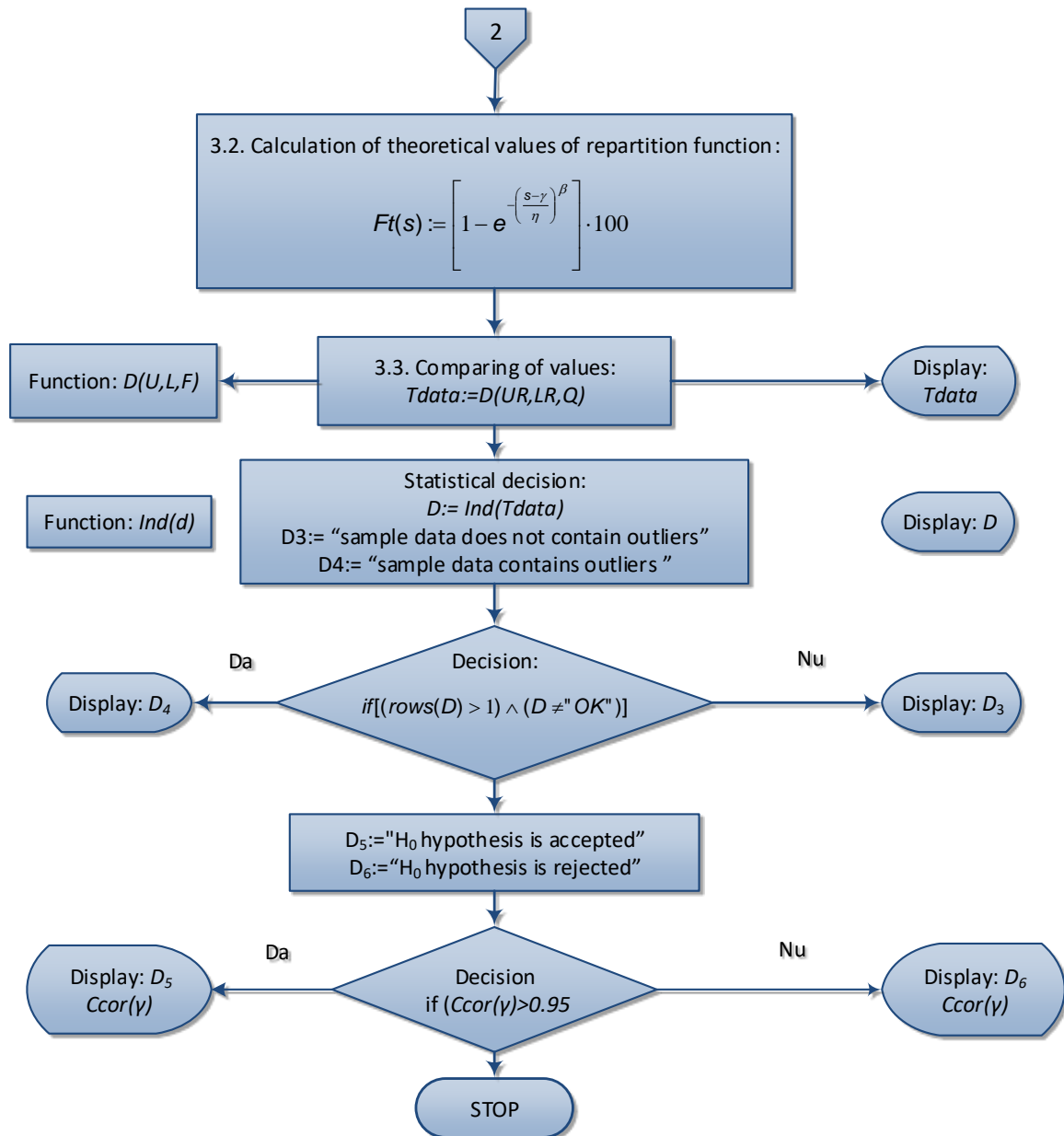


Fig. 2.12 (continuare) Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [TOM 08]

Identificarea valorilor aberante se realizează prin testul șirului limită [KEC 93]. Acest test presupune estimarea parametrilor modelului statistic utilizat. În cazul aplicației Mathcad realizate s-a folosit metoda celor mai mici pătrate. Valoarea estimată a parametrului de localizare, γ se determină din condiția de maxim a valorii coeficientului de corelație, conform subcapitolului 1.2.1.

Odată ce această valoare este cunoscută, printr-o schimbare de variabilă aleatorie, de tipul $X = T - \gamma$, obținem valorile experimentale pentru o repartiție Weibull biparametrică. În continuare, se utilizează metoda celor mai mici pătrate, prin rezolvarea ecuațiilor (1.23) și (1.47).

Pentru fiecare valoare de eșantionaj se calculează, cu ecuațiile (1.18) și (1.19), limitele de încredere.

Decizia, pentru valoarea minimă și maximă, a datelor experimentale, se ia astfel:

$$\begin{cases} t_{(1)} \text{ este valoare aberantă, dacă } F[t_{(1)}] \leq Fn_L(t_{(1)}) \\ t_{(N)} \text{ este valoare aberantă, dacă } F[t_{(N)}] \geq Fn_U(t_{(N)}) \end{cases}$$

Pentru celelalte $N - 2$ valori,

$$t_{(i)} \text{ este valoare aberantă, dacă } \begin{cases} F[t_{(i)}] \leq Fn_L(t_{(i)}) \\ F[t_{(i)}] \geq Fn_U(t_{(i)}) \end{cases}$$

Programul identifică, de asemenea și poziția în eșantion a valorilor aberante cu scopul de a putea elimina ușor valorile aberante.

Decizia privind concordanța datelor experimentale cu modelul repartiției Weibull se ia în funcție de valoarea coeficientului de corelație, dacă:

$$\rho(\gamma) > 0.95 \text{ modelul statistic se consideră corespunzător.}$$

În urma rulării acestui program cu valorile prezentate anterior, pentru un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.95\%$, rezultă:

$$k_{max} = 7 < k_{n,\alpha} = 6.092,$$

Deci, se acceptă ipoteza privind caracterul aleatoriu al datelor de eșantionaj.

Sunt identificate șapte valori aberante:

$$3895 \quad 7190 \quad 2591 \quad 2405 \quad 5502 \quad 5737 \quad 2863$$

Acestea vor fi eliminate dintre datele de eșantionaj.

Valoarea rezultată a coeficientului de corelație este $\rho(\gamma) = 0.9835$. Ea indică o bună corelație a datelor experimentale, corectate prin eliminarea valorilor aberante, cu modelul repartiției Weibull.

Cel de-al doilea program realizat este destinat estimării parametrilor și indicatorilor de fiabilitate ai mașinii de debitat furnir [MCO 08b]. Schema logică a acestui program de calcul Mathcad este prezentată în fig. 2.13.

Această aplicație permite estimarea parametrilor repartiției Weibull prin:

- metoda modificată a momentelor ce constă în rezolvarea sistemului de ecuații (1.61);
- metoda coeficientului de corelație și transformarea datelor în valori repartizate Weibull biparametric (conform subcapitolului 1.2.1);
- metoda celor mai mici pătrate, metodă ce presupune rezolvarea sistemelor de ecuații (1.23) și (1.47);
- metoda verosimilității maxime, ce constă în rezolvarea numerică iterativă a sistemului de ecuații (2.23);
- metoda clasică a momentelor, metodă ce presupune rezolvarea numerică iterativă a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\beta+1}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta+1}\right)} - 1 \right]^{1/2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}} \\ \eta = \frac{\bar{t}}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta+1}\right)} \end{cases} \quad (2.47)$$

Valorile estimate ale parametrilor modelului Weibull, calculate folosind programul descris anterior sunt prezentate în tabelul 2.9.

Deoarece volumul de eșantion este $n = 79$, folosind proprietățile asimptotice ale estimatorilor de verosimilitate maximă, se pot determina și intervalele de încredere ale parametrilor modelului Weibull. Procedura utilizată este cea descrisă la punctul 1.1. Rezultă, pentru un nivel de încredere $1 - \alpha = 0.95$:

- pentru parametrul de formă:

$$1.1731 \leq \beta \leq 1.6240.$$

- pentru parametrul de scală:

$$4623.35 \leq \eta \leq 6482.02.$$

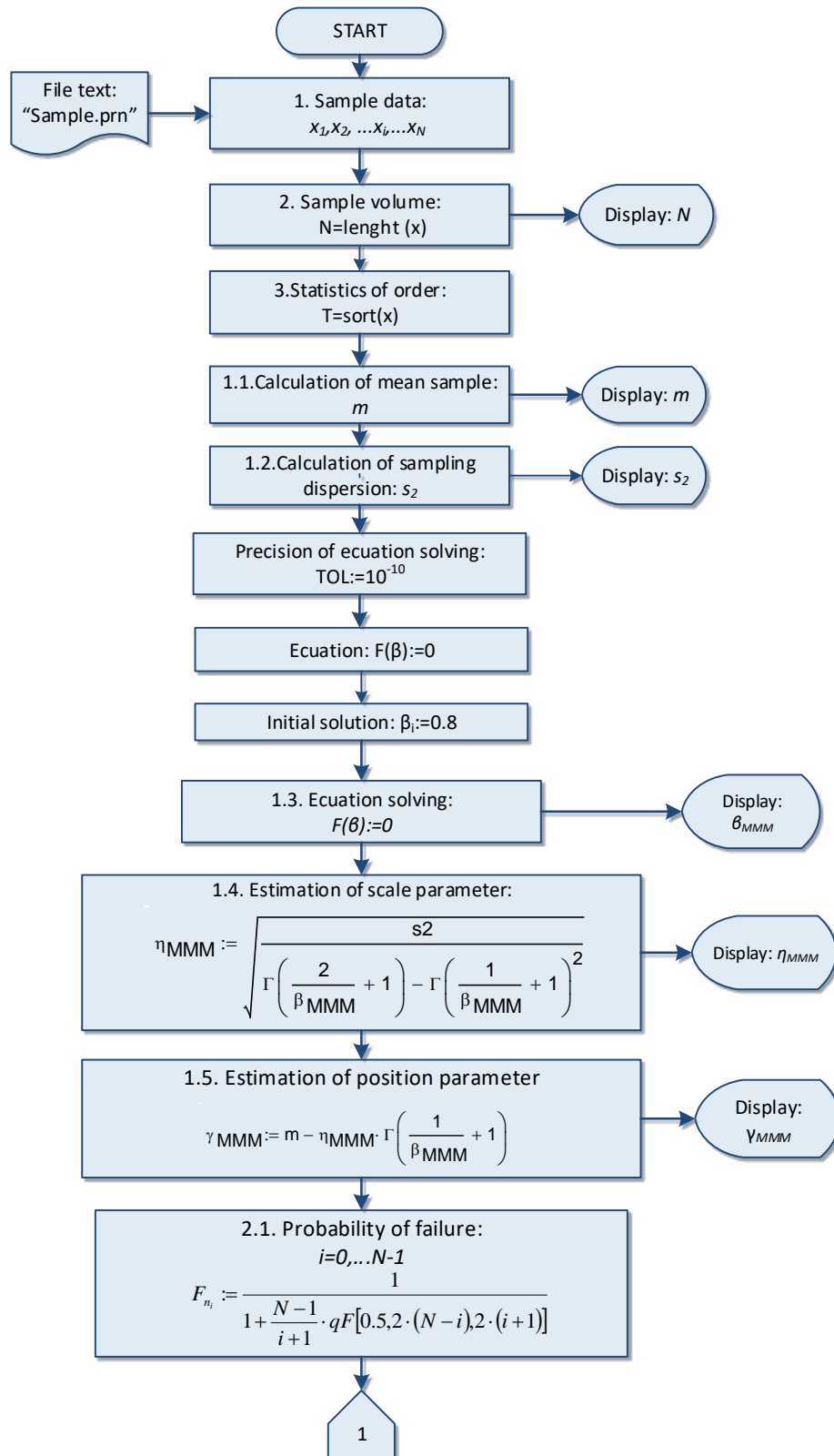


Fig. 2.13 Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [MCO 08b]

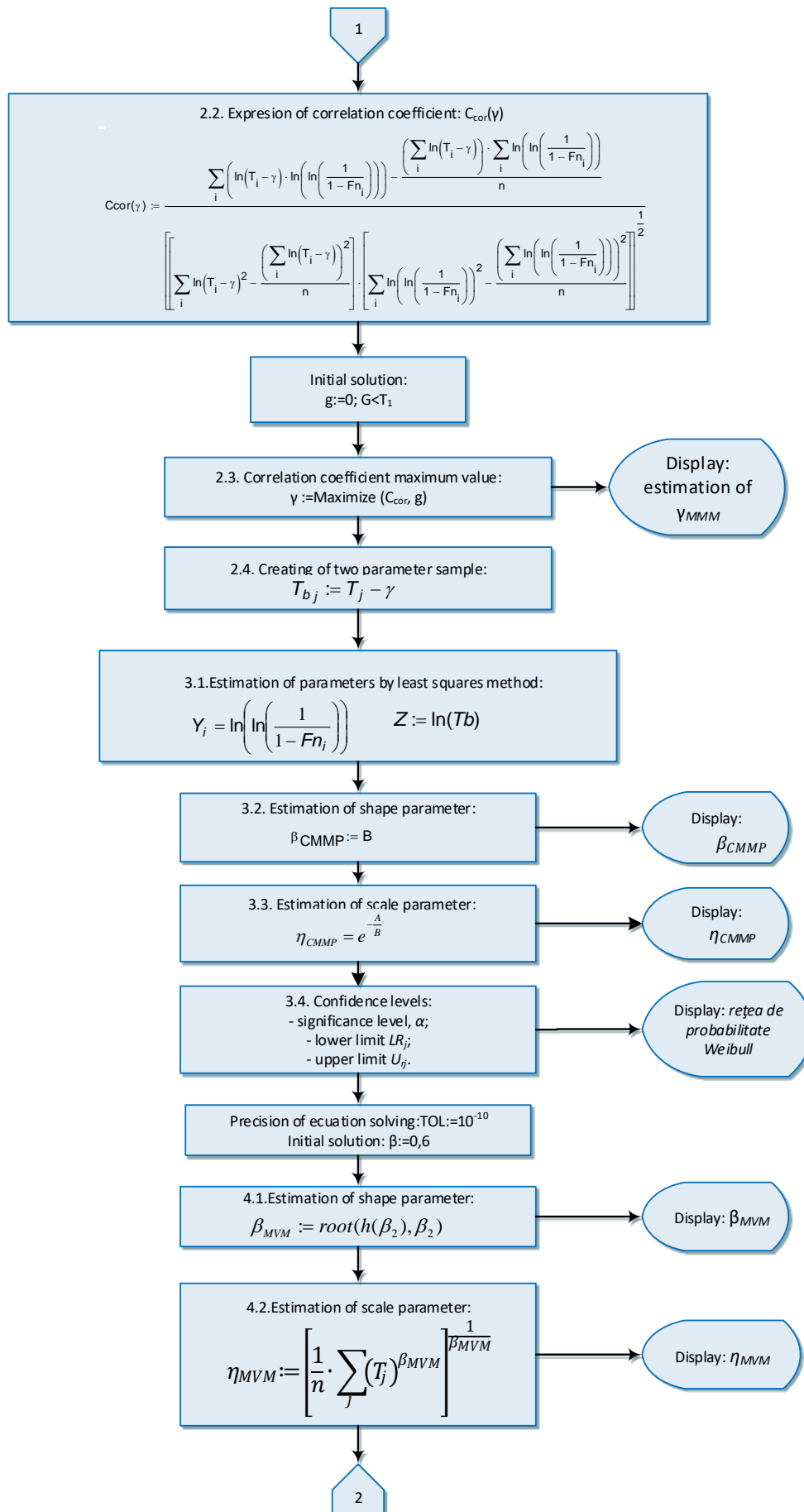


Fig. 2.13 (continuare) Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [MCO 08b]

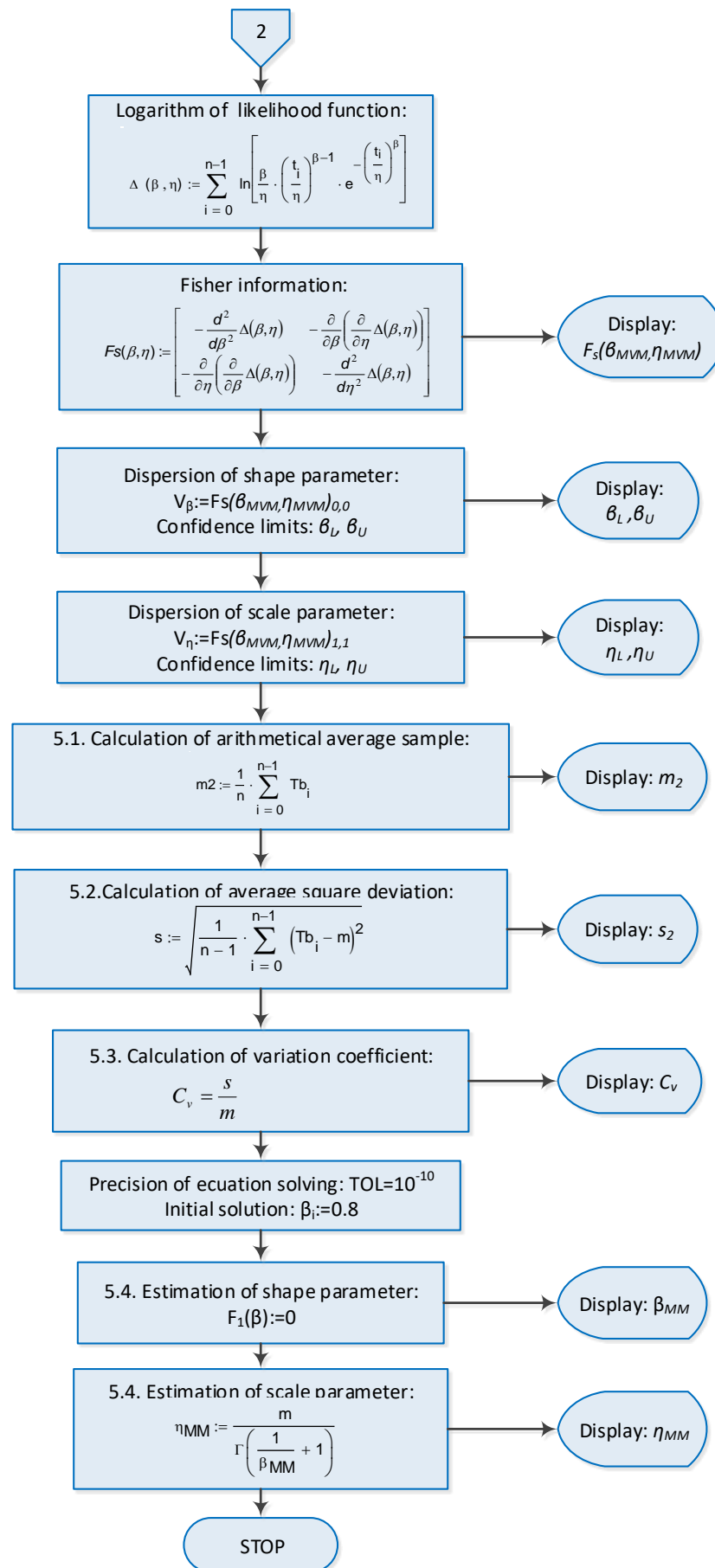


Fig. 2.13 (continuare) Schema logică a aplicației software realizată în Mathcad [MCO 08b]

În urma analizei fiabilității mașinii de debitat furnir, rezultă următoarele concluzii:

- Valorile estimate ale parametrilor repartiției Weibull diferă, în funcție de metoda de calcul utilizată, datorită faptului că la baza acestor metode stau principii diferite. Diferențele, însă, nu sunt semnificative.

Tabelul 2.9 Valorile estimate ale parametrilor modelului Weibull [MCO 08b]

Metoda de estimare utilizată:	Estimațiile punctuale ale parametrilor		
	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\gamma}$
Metoda modificată a momentelor	1.198	4994.903	579.491
Metoda celor mai mici pătrate	1.484	5450.070	306.320
Metoda verosimilității maxime	1.380	5474.360	306.320
Metoda clasică a momentelor	1350	5758.276	306.320

- Valoarea estimată a coeficientului de corelație:

$$\rho(\gamma) = 0.9835,$$

confirmă ipoteza că modelul repartiției Weibull este potrivit pentru modelarea datelor experimentale. La aceeași concluzie se poate ajunge și din analiza figurii 2.14.

- Dintre valorile prezentate în tabelul 2.9 se preferă valorile obținute prin utilizarea metodei verosimilității maxime deoarece sunt cele mai precise și în același timp permit și estimarea cu interval de încredere.
- Expresia funcției de fiabilitate a timpilor de funcționare până la defectare este:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-306.32}{5474.36}\right)^{1.38}}.$$

- Cunoașterea expresiei funcției de fiabilitate, a timpilor de funcționare până la defectare, permite formularea unor strategii realiste pentru mentenanța mașinii de debitat furnire.

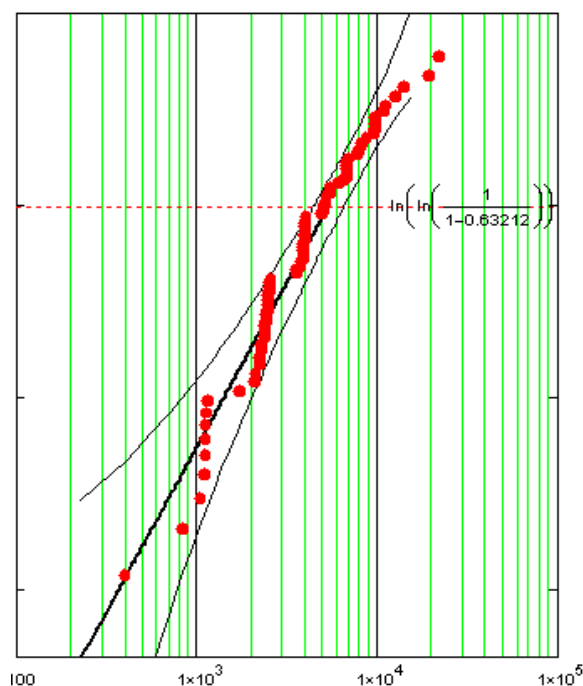


Fig. 2.14 Rețeaua de probabilitate a duratelor de funcționare a mașinii de debitat furnire [MCO 08b]

Concluzii

Rezultatele cercetărilor teoretice, experimentale și prin simulare numerică obținute în decursul anilor, după susținerea tezei de doctorat, permit evidențierea următoarelor concluzii.

În cadrul direcției de cercetare privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate:

- a. Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate ai repartiției Weibull:
 - elaborarea unei metode de estimare a parametrului de localizare, metodă ce are la bază liniarizarea convenabilă a modelului repartiției Weibull și obținerea estimației lui γ din condiția de maxim a valorii coeficientului de corelație;
 - realizarea un studiu teoretic comparativ privind modalitățile de estimare a parametrilor repartiției triparametrice Weibull. Au fost, de asemenea, analizate particularitățile utilizării metodelor grafice de estimare, metodei celor mai mici pătate, metodei modificate a momentelor și metodei verosimilității maxime;
 - elaborarea unui model matematic care permite proiectarea planurilor de încercări cenzurate pornind de la valorile principalilor parametri și indicatori de fiabilitate, precum și de la valori, impuse aprioric, pentru preciziile de estimare, a acestor parametri, astfel, încât pentru costul încercării să se obțină valorile cele mai avantajoase. Prin implementarea acestui model matematic, a fost realizată o aplicație software în Mathcad, care permite obținerea foarte simplă a soluțiilor problemei;
 - demonstrarea existenței și valabilității celor două variabile aleatorii, caracteristice încercărilor cenzurate, $\hat{\beta}/\beta = v(r, n)$ și $\hat{\beta} \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = k(r, n)$ și adaptarea utilizării lor în cazul încercărilor trunchiate. Realizarea un algoritm de simulare numerică prin intermediul căruia se pot determina valorile celor două variabile aleatorii;
 - dezvoltarea relațiilor care permit calculul intervalelor de încredere și verificarea ipotezelor statistice referitoare la parametrii și indicatorii de fiabilitate ai produselor, pornind de la valori experimentale obținute prin încercări trunchiate;
 - dezvoltarea unei metodologii de specificare completă a repartițiilor apriorice utilizate la estimarea parametrică bayesiană prin folosirea unui model matematic existent [SOL 69]. Estimarea repartiției apriorice a parametrului de formă utilizează informații obiective obținute în urma efectuării unor încercări de fiabilitate, anterioare experimentului analizat, coroborate cu rezultate obținute prin simulare numerică Monte-Carlo, folosind estimațiile liniare de tip BLIE. Estimarea parametrilor repartițiilor apriorice ale parametrul de scală utilizează repartiția gama și legăturile acesteia cu repartiția Weibull;
 - proiectarea unei aplicații software realizată în Mathcad, având la bază un algoritm original, care permite simularea încercărilor de fiabilitate, estimarea parametrilor, precum și analiza proprietăților estimatorilor bayesieni, comparativ cu estimatorii liniari de tip BLIE. Rezultatele obținute prin simulare numerică demonstrează corectitudinea modelului de calcul propus pentru estimarea parametrilor repartițiilor apriorice utilizate, precum și superioritatea proprietăților estimatorilor bayesieni, în special, în cazul utilizării eşantioanelor de volum redus și/sau puternic cenzurate.
- b. Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate ai repartiției exponențiale:
 - dezvoltarea și detalierea modului de utilizare al estimatorilor de tip bootstrap, precum și al preciziei lor pentru diferite tipuri de eşantioane exponențial repartizate. Această tehnică de estimare, dezvoltată în ultimii ani și având la bază utilizarea intensivă a calculatoarelor se adresează, în special, rezolvării unor situații în care estimatorul punctual este suficient de complicat de calculat și în care teoria statistică obișnuită nu poate fi aplicată pentru obținerea unor expresii matematice.
- c. Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate ai repartiției Rayleigh:

- elaborarea unei metode de realizare a inferențelor statistice pentru parametrii modelului statistic Rayleigh, bazată pe proprietățile asimptotice ale estimatorilor punctuali de verosimilitate maximă, aspect foarte puțin tratat și rezolvat în literatura de specialitate. S-au utilizat în acest caz, matricea informației Fisher, precum și metoda Delta cea care permite determinarea dispersiei unei funcții având ca argument valoarea estimației parametrilor repartiției analizate.
- d. Cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate ai repartiției lognormale:
 - elaborarea unei metode de calcul al intervalelor de încredere a estimației duratei de testare, astfel încât să fie posibilă realizarea mult mai realistă a activităților de planificare și alocare corespunzătoare de resurse pentru activitățile de testare, precum și validarea modelului de calcul realizat, prin simulare numerică.

În cadrul direcției de cercetare privind fiabilitatea produselor industriale se pot evidenția următoarele contribuții:

- Pentru determinarea *fiabilității previzionale a rulmenților* s-a realizat definirea concretă a problemei, precum și stabilirea ipotezelor simplificatoare care permit analiza de fiabilitate a funcționării rulmenților în cazul unei aplicații și s-a elaborat un model matematic de studiu. Metoda propusă presupune utilizarea unui instrument statistic complementar, FMEA (AMDE), pentru evidențierea defectărilor potențiale specifice în cazul unei aplicații concrete, stabilirea punctelor critice și studierea lor prin prisma probabilității de apariție.
- Pentru determinarea indicatorilor de fiabilitate ai rulmenților utilizând date experimentale obținute prin încercări efectuate prin metoda liniei defectelor primare s-au detaliat particularitățile de estimare, particularități determinate de specificul desfășurării acestui tip de încercare și s-a propus un algoritm de simulare numerică prin intermediul căruia se pot determina valorile a trei variabile aleatorii independente de parametrii repartiției, specifice acestui caz: $\hat{\beta}_s/\beta = v(l, l)$, $\hat{\beta}_s \cdot \ln(\hat{\eta}/\eta) = s(l, m)$ și $\hat{\beta}_s \cdot \ln(\hat{t}_{0.10}/t_{0.10}) = q(l, m, 0.10)$. Cercetarea se încheie cu un studiu de caz pentru rulmenți radial-axiali cu role conice tip LM11949/LM11910.
- *Analiza fiabilității scarificatorului tractat.* Cercetarea desfășurată, în acest caz, constă în identificarea modelului statistic cel mai potrivit modelării duratei de viață a dinților de scarificat, estimarea parametrilor modelului și realizarea inferențelor statistice. Au fost luate în considerare patru repartiții statistice utilizate în analizele de fiabilitate: repartiția Weibull, repartiția log-normală, repartiția exponențială și repartiția normală. Utilizarea testului general de concordanță, Anderson-Darling, aplicat datelor experimentale, a condus la decizia de utilizare a repartiției triparametrice Weibull. Pentru analiza duratei de viață a dinților de scarificat sau utilizat rezultatele experimentale, obținute din urmărirea în funcționare scarificatorului tractat.
- *Analiza fiabilității mașinii de debitat furnir.* Datele utilizate în cadrul acestui studiu de caz au fost colectate pe o perioadă de un an, respectiv ianuarie ÷ decembrie 2004. Prelucrarea statistică a timpilor de funcționare, între două defectări accidentale, a avut ca obiectiv identificarea unui model statistic și specificarea completă a acestuia. Pentru îndeplinirea acestui obiectiv au fost realizate două programe Mathcad. Primul program este destinat verificării omogenității statistice (verificarea caracterului aleatoriu, identificarea și eliminarea valorilor aberante), precum și testarea concordanței datelor experimentale cu modelul statistic ales. Cel de-al doilea program permite estimarea parametrilor repartiției statistice prin: metoda modificată a momentelor, metoda coeficientului de corelație, metoda celor mai mici pătrate, metoda verosimilității maxime și prin metoda clasică a momentelor. Rezultate obținute permit realizarea unor strategii de mentenanță realiste pentru întreținerea mașinii de debitat furnir.

(B-ii) PLANURI DE EVOLUȚIE ȘI DEZVOLTARE A CARIEREI

Autorul tezei de abilitare a absolvit Facultatea de TCM a Universității din Brașov, programul de studii Tehnologia Construcțiilor de Mașini, în anul 1984, cu media 10 la examenul de diplomă și media anilor de studii 9.92, obținând diploma de inginer mecanic nr. 1307/26 iunie 1984, în specialitatea T.C.M.

La absolvirea Facultății, în anul 1984, ca urmare a rezultatelor obținute a beneficiat de repartitie dublă. Astfel, a fost repartizat în cercetare la Institutul Național de Motoare Termice București, cu stagiu de doi ani la Întreprinderea de Construcții Aeronautice, SC "I.A.R. - Brașov" SA.

Pe perioada stagiaturii, activitatea desfășurată, a constat în proiectarea S.D.V.-isticii necesare producției, proiectare de tehnologii pentru diferite reperi de avioane și elicoptere, precum și tehnologii pentru mașinile-unelte cu comandă numerică, proiectare asistată de calculator (limbajul APT-RCV) a programelor pentru C.N.

În ianuarie 1987, autorul tezei s-a transferat, conform Dispoziției de repartizare nr. 341942 din 1984, la Institutul Național de Motoare Termice București (actualmente SC MASTER SA București) fiind încadrat la Filiala M2- Brașov, grupa *Proiectare Motoare*. Activitatea desfășurată în cadrul acestui colectiv a fost, în principal, axată pe proiectarea ansamblurilor și subansamblurilor familiilor de motoare Diesel, destinate uzinelor Tractorul – UTB și Autocamioane Brașov.

În luna iunie a anului 1990, în urma prezentării la concursul, organizat de Institutul de Cercetare și Proiectare Rulmenți și Organe de Asamblare, SC ICPROA SA Brașov, pentru ocuparea unui post inginer coordonator al Laboratorului de fiabilitate/durabilitate rulmenți, autorul prezentei teze s-a transferat la SC ICPROA SA Brașov, Atelierul 071- Proiectare Produse. Activitatea desfășurată în cadrul acestui colectiv a fost, în principal, axată pe coordonarea activităților de încercări la durabilitate/fiabilitate a rulmenților (probe de tip și de omologare, încercări comparative), încercări pentru cercetarea pierderii de vaselină la rulmenții etanșați sau capsulați; proiectarea și instrumentarea dispozitivelor necesare testării rulmenților; modernizarea activităților de testare calitativă a rulmenților în conformitate cu tendințele mondiale și europene de certificare a calității produselor industriale.

În noiembrie 1991 a fost numit în funcția de șef "*Laboratoare de studii cercetări și încercări produse*", din cadrul aceluiași atelier de proiectare – 071. În această calitate a condus și coordonat întreaga activitate desfășurată în cadrul laboratoarelor SC ICPROA SA Brașov și în paralel cu aceasta, a coordonat proiectarea și implementarea unui sistem de asigurare a calității (Manualul calității, realizarea procedurilor pentru activitățile specifice celor cinci laboratoare individuale specializate pe: măsurarea micro și macrogeometriei construcției interioare a rulmenților; determinări fizico-chimice și metalografice a materialelor de bază și auxiliare din fabricația de rulmenți; măsurarea și analiza nivelurilor de vibrații a rulmenților și testarea la fiabilitate/durabilitate a rulmenților), în scopul certificării, în conformitate cu cerințele standardelor internaționale ISO 9000 și a acreditării laboratoarelor și a personalului, în conformitate cu cerințele standardelor europene EN 45000.

O altă latură a activității desfășurate în cadrul SC ICPROA SA Brașov, o reprezintă activitățile de cercetare, care se înscriu pe linia optimizării și modernizării testelor calitative a loturilor de rulmenți, materializate prin:

- Studiul unor noi metode de estimare parametrică punctuală și cu interval de încredere a indicatorilor de fiabilitate a rulmenților.
- Simularea prin metoda Monte-Carlo a încercărilor de fiabilitate.

- Proiectarea unor modele funcționale pentru standurile de încercări la durabilitate.
- Monitorizarea standurilor de încercări a rulmenților prin achiziția în timp real a valorilor parametrilor ce caracterizează funcționarea rulmenților testați (nivelul de vibrații, temperatura de funcționare, presiunile din sistemele de forță ale standurilor etc.).
- Diagnosticarea defectelor rulmenților pe baza vibrodiagnozei.

De asemenea, în mai 1997, prin decizia nr. 3/16.05.1997 a Comisiei de examinare, constituită în cadrul Institutului de Cercetare și Proiectare Rulmenți și Organe de Asamblare, autorul tezei de abilitare a fost atestat pe funcția de cercetător științific.

În anul 1994 a fost înmatriculat la doctorat. Susținerea publică a tezei de doctorat, cu titlul *Optimizarea încercărilor de fiabilitate a rulmenților*, a avut loc în 19 martie 1999, la Universitatea *Transilvania* din Brașov, teză realizată sub coordonarea prof.univ.dr.ing. Ion POPESCU, iar în 23.06.1999 *Consiliul National de Atestare a Titlurilor, Diplomelor și Certificatelor Universitare* i-a acordat titlul de doctor inginer, în ramura Tehnică, specializarea Fiabilitate, cu diploma nr. 759/06 iulie 1999.

Un alt aspect al activităților profesionale desfășurate îl reprezintă consultanța în domeniul managementului calității. Această activitate are ca punct de plecare contractul de colaborare semnat în anul 1995, între Centrul Național de Formare, Consultanță și Management pentru Asigurarea Calității, C.N.F.C.M.A.C București – Universitatea *Transilvania* din Brașov – SC ICPROA SA Brașov. Inițial, activitatea de consultanță a vizat sectorul industrial brașovean, prin susținerea unor cursuri de formare în domeniul managementului calității. Ulterior, începând cu anul 1998, această activitate s-a materializat prin consultanța în domeniul implementării sistemelor calității. În această perioadă, a colaborat cu o serie de firme specializate în domeniu: S.C. TQ Services S.R.L. Brașov, S.C. Cosima S.R.L. Brașov și Institutul Național de Administrație.

În vederea îmbunătățirii continue a activității profesionale, autorul prezentei teze de abilitare a participat la cursuri de specializare în domeniul ingineriei industriale și managementului, după cum urmează:

- *"Proiectarea constructivă și tehnologică a rulmenților"*, SC Rulmentul SA Brașov - SC Global SRL București, 1990-1991.
- *"Strategia Întreprinderii"*, Universitatea Economică de Vară, Brașov - T.C.E. Brașov - J.C.E. Franța, august 1991.
- *"Fiabilitatea Sistemelor"*, Universitatea *Transilvania* din Brașov, Facultatea de Științe și Serviciul Cultural al Ambasadei Franceze, mai 1993.
- *"Proiectarea asistată de calculator (Metoda Elementelor Finite)"*, Ministerul Muncii și Protecției Sociale, aprilie 1994.
- *„Sisteme de managementul calității. ISO 9001:2000”*, Societatea Română pentru Asigurarea Calității, aprilie 2002.
- *„Curs limba franceză”* – nivel mediu, Alianța Franceză, Brașov, iunie 2005.
- *„Managementul calității”*, Universitatea *Transilvania* din Brașov, aprilie 2003.
- *„Manager sistem calitate”* Schema armonizată EOQ (European Organization for Quality), Asociația Română pentru Calitate, septembrie 2006.
- *„Auditor extern”*, Schema armonizată EOQ (European Organization for Quality), Asociația Română pentru Calitate, decembrie 2006.
- *„Project Management”*, Universitatea *Transilvania* din Brașov - High Tech Pentalog - Agenția Universitară a Francofoniei, iunie 2010.

În toată această perioadă, nu a încetat să păstreze legătura cu Universitatea *Transilvania* din Brașov. Astfel, între anii 1990 și 2000 a fost solicitat să desfășoare activitate didactică, în calitate de cadru didactic asociat, la Facultatea de Inginerie Tehnologică, Catedra T.C.M. și OMMR.

În anul 2000, a susținut concursul pentru ocuparea unui post de *șef de lucrări* din cadrul Catedrei T.C.M., fiind încadrat pe post începând cu data de 06 martie 2000.

Din octombrie 2004, autorul prezentei teze este încadrat la Catedra TCM, a Facultății de Inginerie Tehnologică, pe un post de conferențiar universitar ca urmare a participării la concursul organizat de Universitatea *Transilvania* din Brașov.

Activitatea didactică desfășurată în acești 17 ani constă în susținerea de cursuri și ore de aplicații (seminar, laborator sau proiect) la diferite discipline încadrate următoarele domenii de interes: managementul calității, metode numerice în inginerie, probabilități și statistică aplicată, fiabilitate și cercetare experimentală.

Astfel, în prezent autorul prezentei teze de abilitare este titular la disciplinele:

- *Probabilități și statistică aplicată*, programul de studii de licență Ingineria și managementul calității, anul III.
- *Managementul calității*, programul de studii de licență Ingineria și managementul calității, anul IV.
- *Statistică aplicată*, programele de studii de licență IEI, IEI-ID, IMA, anul II de studii
- *Sistemul de management al calității*, programul de studii de masterat Managementul calității, anul I.
- *Probabilități și statistică aplicată*, programul de studii de masterat Managementul calității, anul I.
- *Proiectarea experimentelor*, programul de studii de masterat Ingineria proceselor de fabricație avansate, anul I.

În ceea ce privește acoperirea cu material didactic a disciplinelor, la care își desfășoară activitatea, au fost elaborate cinci cărți / manuale / monografii publicate în edituri naționale recunoscute, toate fiind recenzate de colective de specialiști din rândul cadrelor didactice universitare. Dintre acestea, la două este unic autor.

Au mai fost elaborate și șase suporturi de curs / îndrumare / cataloage de produse, dintre care la două este prim autor.

O altă componentă a activității didactice desfășurate de autor o constituie coordonarea lucrărilor de diplomă și disertație, circa 150 lucrări, precum și coordonarea de lucrări în cadrul Sesiunii cercurilor științifice studențești, în medie trei pe an, multe dintre ele apreciate pozitiv și premiate de către comisiile de evaluare.

În ceea ce privește experiența de management, analiză și evaluare în învățământ, autorul prezentei teze de abilitare a avut responsabilități de conducere, după cum urmează:

- Prodecan cu activitatea studenților și legătura cu mediul economic și socio-cultural, internaționalizare, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2016 – prezent.
- Prodecan cu activitatea studenților și legătura cu mediul economic și socio-cultural, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2012 – 2016.
- Coordonatorul Sesiunii cercurilor științifice studențești la nivelul facultății de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2012 – 2016.
- Președintele Comisiei de evaluare a lucrărilor prezentate la Sesiunea Cercurilor Științifice Studențești, Secțiunea 2: Tehnologii de fabricație, echipamente tehnologice și ingineria calității, 2011-2017.

- Președintele comisiei de licență a programului de studii Ingineria și Managementul Calității, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2015-2017.
- Președintele comisiei de disertație a programului de studii Managementul Calității, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2013-2016,

precum și responsabilități de membru în:

- Senatul Universității *Transilvania* din Brașov, 2016 – prezent.
- Consiliul Facultății de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2008 – prezent.
- Juriul Conferinței Absolvenții în fața companiilor – AFCO, Secțiunea I. Inginerie mecanică, Inginerie tehnologică, Inginerie economică, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2014 – 2017.
- Comisia pentru evaluarea și asigurare a calității, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2011-2017.
- Comisia de îndrumare a doctorandului BRAGA Cristian Ion, coordonator științific prof.dr.ing. NEDELICU Anișor, domeniul de doctorat Inginerie și management, forma de doctorat cu frecvență redusă, 2015.
- Comisia de îndrumare a doctorandului LEONTE Alexandru, coordonator științific prof.dr.ing. NEDELICU Anișor, domeniul de doctorat Inginerie și management, forma de doctorat cu frecvență, cu bursă, 2013.
- Comisia de îndrumare a doctorandului ORZAN Iulian Alexandru, coordonator științific prof.dr.ing. BUZATU Constantin, domeniul de doctorat Inginerie industrială, forma de doctorat cu frecvență cu taxă, 2012.
- Comisia de îndrumare a doctorandului NĂSULEA Daniel, coordonator științific prof.dr.ing. OANCEA Gheorghe, domeniul de doctorat Inginerie industrială, forma de doctorat cu frecvență, 2015.
- Comisia de îndrumare a doctorandului DAICU Raluca, coordonator științific prof.dr.ing. OANCEA Gheorghe, domeniul de doctorat Inginerie industrială, forma de doctorat cu frecvență, 2014.
- Comisia de licență a programului de studii Ingineria securității în industrie, Facultatea de Știința și Ingineria Materialelor, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2011-2014.
- Comisia de licență a programului de studii Construcții aerospațiale, Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2009-2012.
- Comisia de licență a programului de studii Productică, Facultatea de Inginerie Tehnologică, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2004-2006.
- Comisia de licență a programului de studii de masterat postuniversitar Ingineria și managementul calității, Catedra UNESCO, Facultatea de Inginerie Tehnologică, Universitatea *Transilvania* din Brașov, 2004-2010.

Continuitatea și natura preocupărilor profesionale în domeniul Ingineriei industriale, practica uzinală și de cercetare câștigată în acest domeniu, precum și orientările științifice spre utilizarea calculatoarelor în inginerie l-au angajat în următoarele direcții de activitate: probabilități și statistică aplicată, fiabilitate, managementul calității și cercetarea experimentală.

Direcțiile, mai sus menționate, se regăsesc în toate activitățile de cercetare științifică și didactică desfășurate, inclusiv în cadrul tezei de doctorat.

În ceea ce privește activitatea de cercetare științifică, trebuie menționat faptul că domeniul în care autorul tezei de abilitare a activat, timp de 34 ani, adică de la absolvirea facultății și până în prezent este cel al *Ingineriei Industriale*. În acest domeniu, care reprezintă specializarea autorului, atât prin prisma secției absolvite (TCM), cât și ca doctorat (Fiabilitate), preocupările au vizat constant, câteva direcții prioritare, mai întâi ca inginer proiectant, apoi ca cercetător științific și apoi în calitate de cadru didactic universitar: *proiectarea constructivă și tehnologică în construcția de mașini, fiabilitate, managementul calității, cercetarea experimentală și prelucrarea informatizată a datelor*.

Aceste domenii de cercetare sau materializat prin elaborarea a 39 granturi / proiecte câștigate prin competiție sau contracte cu mediul socio-economic (un proiect pe fonduri structurale, finanțat prin POS-CCE, Axa 2; două granturi CNCISIS; un proiect POSDRU; un Bridge Grant; două proiecte în cadrul Programul National de Cercetare Științifică și Dezvoltare Tehnologică - RELANSIN, Subprogramul III – RELANSIN MODERNIZARE; 4 contracte în cadrul Programul național „ORIZONT 2000”; 12 contracte în cadrul Programul National 4.1 "Dezvoltare tehnologică în construcția de mașini"; 17 contracte directe cu diverși beneficiari). La 19 dintre aceste granturi / proiecte câștigate prin competiție sau contracte cu mediul socio-economic autorul a fost director sau responsabil, iar la restul de 20 membru în echipă.

Rezultate remarcabile, obținute în urma cercetărilor științifice, au fost publicate în reviste de specialitate. Este vorba de 28 de articole dintre care [ZAH 17], [MCO 13] și [ZAH 12a] sunt articole indexate în reviste ISI Thomson Reuters.

De asemenea, au fost publicare 37 de articole în volume ale conferințelor internaționale, naționale cu participare internațională și naționale. Dintre acestea, șase articole au fost publicate în volumele unor manifestări științifice indexate ISI Thomson Reuters: [MCO 17a], [MCO 17b], [ZAH 12b], [ZAH 11a], [ZAH 11b], [MCO 09] și 11 articole în reviste și volumele unor manifestări științifice indexate în alte baze de date internaționale.

Recunoașterea și impactul activității științifice a autorului s-a materializat prin citări ale lucrărilor [MCO 13] și [ZAH 12a] în articole indexate ISI și citări ale articolului [MCO 13] în articole indexate BDI.

Tot ca o recunoaștere a rezultatelor activității științifice, autorul tezei de abilitare a participat, în calitate de membru în colectivele de organizare, comitete științifice ale revistelor / manifestărilor științifice și/sau recenzor:

- a. Membru în Comitetul științific și recenzor al The 13th International Conference On Modern Technologies In Manufacturing, Department of Manufacturing Engineering (DME) – TU Cluj-Napoca, 12-13 October 2017 – Cluj-Napoca.
- b. Membru în Comitetul științific, Comitetul de organizare, chairman și recenzor al International Conference Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '16, November 3÷4, Brașov, Romania, 2016, <http://www.unitbv.ro/cosme16/en/scope.html>.
- c. Membru în Comitetul de recenzori al revistei Technical Gazette, Journal of technical faculties of the Juraj Strossmayer University of Osijek, Croația.
- d. Membru în Comitetul de organizare, chairman și recenzor al *International Conference Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '12*, September 16÷18, Brașov, Romania, 2012, <http://www.unitbv.ro/cosme12/en/index.html>.
- e. Membru în Comitetul de organizare al Conferinței Absolvenții în fața companiilor – AFCO 2017, Brașov, 9 mai, 2017, Universitatea *Transilvania* din Brașov.
- f. Membru în Comitetul de organizare al Conferinței Absolvenții în fața companiilor – AFCO 2016, Brașov, 12 mai 2016, Universitatea *Transilvania* din Brașov.
- g. Membru în Comitetul de organizare al Conferinței Absolvenții în fața companiilor – AFCO 2015, Brașov, 14 mai 2015, Universitatea *Transilvania* din Brașov.

- h. Membru în Comitetul de organizare, chairman și recenzor al International Conference „Computing and Solutions in Manufacturing Engineering” – CoSME '08, September 25÷27, Brașov, Romania, 2008.
- i. Membru în Comitetul de organizare și chairman al International Conference Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '04, September 16÷18, Brașov – Sinaia, Romania, 2004.

Autorul tezei a participat și la:

1. Dezvoltarea laboratorului didactic: Ingineria și managementul calității, fiabilității și riscurilor industriale, perioada: 2007 - prezent. În prezent este responsabilul acestui laborator didactic.
2. Dezvoltarea și coordonarea centrului de cercetare: D.18 - Managementul calității, Institutul de cercetare – dezvoltare al Universității *Transilvania* din Brașov (ICDT), perioada: 2007 - 2011.
3. Coordonarea centrului de cercetare: Ingineria și managementul calității, Departamentul de Ingineria Fabricației, perioada: 2012 – prezent.

Membru în asociații profesionale:

- a. Asociația Română de Tribologie.
- b. Asociația Universitară de Ingineria Fabricației – AUIF.

Societatea cunoașterii, informatizarea educației, procesul de globalizare, problematica lumii contemporane, decalajul existent între sistemele de învățământ din Europa, dinamica accentuată a piețelor muncii, multiplicarea furnizorilor de educație superioară și creșterea competiției între universități, au dus la profunde și multidimensionale transformări la nivelul universităților europene, în vederea sporirii competitivității acestora pe plan internațional, fapt ce a impus un nou mod de gândire și concepere a întregului sistem de învățământ superior.

În acest context, direcțiile principale planificate, pentru dezvoltarea unei carierei academice, trebuie să țină cont de cele două laturi principale:

a. *Planuri de dezvoltare a activității didactice*

Învățământul superior este chemat să asigure generațiilor viitoare o educație și o pregătire care să le permită să contribuie la menținerea echilibrului din mediul natural și din cel al vieții, formarea la fiecare absolvent a acelor noi trăsături de personalitate în măsură să le asigure integrarea rapidă la dinamica des schimbătoare a societății viitoare.

Activitatea didactică constituie o sarcină prioritară prin care informațiile sunt transmise studenților în vederea formării și dezvoltării intelectuale a acestora. Dezvoltarea activității didactice se va baza pe îmbunătățirea continuă a metodologiei de predare sprijinind și implicând studenții în procesul de învățare, prin:

- implementarea conceptului de învățământ centrat pe student, pornind de principiile: studenții au stiluri diferite de învățare; studenții au nevoi și interese diferite; studenții au diferite experiențe și cunoștințe acumulate în timp; învățarea are nevoie de cooperare între studenți și cadrul didactic, astfel încât să asigure studenților un salt cultural și social, nu doar cantitativ, ci mai ales calitativ;

- îmbunătățirea activității didactice având în vedere evaluarea rezultatelor învățării, abilitățile studenților de rezolvare a problemelor, de lucru în echipă, capacitatea lor de gândire critică, eliminarea învățării prin memorare sau prin activități ineficiente și plictisitoare;
- înlocuirea prelegerilor cu abordarea teoriei și a aplicațiilor practice pe bază de dialog astfel încât studenții să fie motivați și să participe activ și cu plăcere la activitățile de învățare;
- utilizarea tehnologiilor educaționale moderne și a tehnologiilor de formare bazate pe utilizarea computerului și a produselor software moderne, prezentări PowerPoint, prezentări video, laboratoare experimentale;
- elaborarea de cursuri și îndrumare de laborator pentru acoperirea disciplinelor la care autorul tezei de abilitare este titular:
 - *Probabilități și statistică aplicată*, programul de studii de licență Ingineria și managementul calității și programul de studii de masterat Managementul calității.
 - *Managementul calității*, programul de studii de licență Ingineria și managementul calității.
 - *Statistică aplicată*, programele de studii de licență IEI, IEI-ID, IMA.
 - *Sistemul de management al calității*, programul de studii de masterat Managementul calității.
 - *Proiectarea experimentelor*, programul de studii de masterat Ingineria proceselor de fabricație avansate.
- actualizarea, modernizarea suporturilor de curs și publicarea periodică în format tipărit sau electronic, a unor ediții actualizate;
- conținutul cursurilor și al aplicațiilor vor avea ca obiective capacitatea studenților de a acționa în rezolvarea diverselor probleme prin: gândire critică, gândire logică, experimentare și creativitate, precum și prin lucrul în echipă;
- sprijinirea și încurajarea studenților să participe la cercurile științifice studențești, activități de cercetare, conferințe și simpozioane destinate lor;
- continuarea activității de coordonare a studenților și a masteranzilor la proiectele de diplomă și respectiv, la proiectele de disertație prin identificarea de subiecte interesante și care pot rezolva anumite probleme cu care se confruntă mediul economic.

b. Planuri de dezvoltare a activității de cercetare științifică

În cadrul învățământului superior, activitatea didactică nu poate și nu trebuie disociată de activitatea de cercetare în așa fel, încât învățământul să aibă capacitatea de a ține pasul cu evoluția cerințelor și exigențelor societății, a cunoașterii în general și a cunoașterii științifice.

În acest sens, direcțiile principale planificate pentru dezvoltarea activității de cercetare științifică, sunt:

- continuarea cercetării științifice pe direcțiile detaliate pe parcursul acestei teze de abilitare:
 - cercetări privind estimarea parametrilor și indicatorilor de fiabilitate;
 - cercetări privind fiabilitatea produselor industriale,

precum și abordarea unor noi direcții de cercetare în domeniile:

- managementul calității;

- utilizarea și dezvoltarea instrumentelor calității;
- proiectarea experimentelor;
- continuarea îmbunătățirii și dezvoltării infrastructurii de cercetare din laboratoarele departamentului de Ingineria fabricației;
- utilizarea infrastructurii de cercetare a centrului de cercetare științifică Tehnologii și sisteme avansate de fabricație, a Institutul de cercetare – dezvoltare al universității *Transilvania* din Brașov;
- implicarea mult mai activă în contracte de cercetare;
- publicarea unor articole în jurnale de referință în domeniu și în reviste, din zonele Q1 și Q2, indexate ISI Thompson Reuters cu factor de impact și scor relativ de influență și în bazele de date internaționale recunoscute de Consiliul National al Cercetării Științifice;
- prezentarea unor lucrări și participarea la conferințele desfășurate în domeniu, cu precădere de nivel internațional și pe cât posibil indexate ISI, desfășurate atât în țară, cât și în străinătate;
- atragerea de fonduri prin contracte cu terți sau proiecte de consultanță.

(B-iii) BIBLIOGRAFIE

- [CAN 70] Canfield, R.V., A Bayesian Approach to Reliability Estimation Using a Loss Function, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-19, nr. 1, 1970.
- [CAN 77] Canfield, R.V., Teed, J.C., Selecting the Prior Distribution in Bayesian Estimation, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-26, nr.4, 1977.
- [CAT 83] Cătuneanu, V.M., Mihalache, A., Bazele teoretice ale fiabilității, Ed. Academiei, București, 1983.
- [CHA 91] Changsen, W., Analysis of Rolling Element Bearings, Mechanical Engineering Publications LTD, London, 1991.
- [CRO 95] Crowder, M.J., Kimber, A.C., Smih, R.L., Sweeting, T.J., Statistical Analysis of Reliability Data, Chapman & Hall, London, 1995.
- [DEV 10] Devore, J.L., Probability and Statistics for Engineering and Sciences, Brooks/Cole, Boston, 2010.
- [ESC 85] Eschmann, P., ș.a., Ball and Roller Bearings Theory, Design and Application, John Wiley & Sons, Ltd., 1985.
- [GAF 85] Gafițanu, M., ș.a., - Rulmenți. Proiectare și tehnologie, vol.I și II, Ed.Tehnică, București, 1985.
- [GER 89] Gertsbakh, I.B., Statistical Reliability Theory, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.
- [GIB 76] Gibra, I.N., Probability and Statistical Inference for Scientist and Engineers, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [HAH 67] Hahn, G.J., Shapiro, S.S., Statistical Models in Engineering, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [HAR 91] Harris, T.A., Rolling Bearing Analysis, 3-rd. Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [ISA 83] Isaic-Maniu, Al., Metoda Weibull. Aplicații, Ed. Academiei, București, 1983.
- [ISA 86] Isaic-Maniu, Al., Vodă, V. Gh., Fiabilitatea, șansă și risc, Ed. Tehnică, București, 1986.
- [KEC 82] Kececioglu, D.B., Bayesian Testing with Applications, The University of Arizona, Tucson, 1982.
- [KEC 91] Kececioglu, D.B., Reliability Engineering Handbook, vol. I și II, PTR Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [KEC 93] Kececioglu, D.B., Reliability & Life Testing Handbook, vol. I, PTR Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [KEC 94] Kececioglu, D.B., Reliability & Life Testing Handbook, vol. II, PTR Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [KRI 06] Krishnamoorthy, K., Handbook of Statistical Distributions with Applications, Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
- [MAN 74] Mann, N.R., ș.a., Methods for Statistical Analysis of Reliability & Life Test Data, John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- [MAR 04] Marele, S., **Morariu, C.O.**, The Role of Reliability and Maintainability Analysis in Products Quality, Buletinul Conferinței "First international conference Mechanics

- and Machine Elements”, Sofia, Bulgaria, 4÷6 noiembrie, 2004, Heron-Press, 2005, ISBN 954-580-173-5, pag. 158÷162.
- [MAR 95] Martinescu, I., Popescu, I., Fiabilitate, Ed. Gryphon, Braşov, 1995.
- [MCC 12] McCool, J.I., Using the Weibull Distribution. Reliability, Modeling, and Inference, John Wiley & Sons, Inc. Publication, Hoboken, New Jersey, 2012.
- [MCC 74a] McCool, J.I., Inference on Weibull percentiles and Shape Parameter from Maximum Likelihood Estimates, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-19, nr. 1, 1974.
- [MCC 74b] McCool, J.I., Inference on Weibull Percentiles From Sudden Death Tests using Maximum Likelihood, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-19, nr. 4, 1974.
- [MCC 75] McCool, J.I., Multiple Comparison for Weibull Parameters, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-24, nr.3, 1975.
- [MCC 80] McCool, J.I., Confidence Limits for Weibull Regression with Censored data, IEEE Transactions on Reliability, vol. R- 29, nr. 2, 1980.
- [MCO 00a] **Morariu, C.O.**, Popescu, I., Inferențe statistice Bayesiene pentru repartiția Weibull, utilizată ca model global al fiabilității produselor, Buletinul Științific al Sesiunii Naționale de Comunicări Științifice, Ediția a III-a, Anul II, Numărul 2 (12), Academia Forțelor Aeriene Henri Coandă, Braşov, 2000, ISSN 1453-0139, pag. 19-28.
- [MCO 00b] **Morariu, C.O.**, Estimații de verosimilitate maximă pentru repartiția Rayleigh, Buletinul Științific al Sesiunii Naționale de Comunicări Științifice, Ediția a III-a, Anul II, Numărul 2 (12), Academia Forțelor Aeriene Henri Coandă, Braşov, 2000, ISSN 1453-0139, pag. 29-36.
- [MCO 02] **Morariu, C.O.**, Şimon, A.E., The Optimized Design of the Testing Plans for the Weibull Distribution, Annals of DAAAM for 2002 & Proceedings, Vienna, 2002, ISBN 3-901509-29-1, pag. 363-364.
- [MCO 03] **Morariu, C.O.**, Şimon, A.E., Testing Plans for the Weibull Distribution, Bulletin of the *Transilvania* University of Braşov, Vol. 10 (45) – New Series, 2003, pag 137-140, ISSN 1223-9631.
- [MCO 04a] **Morariu, C.O.**, Inference on Weibull Parameters from a Censored Life Test Using Maximum Likelihood Estimates Method, Buletinul primei Conferințe Internaționale „Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME ’04”, Braşov-Sinaia, România, 16÷18 septembrie, 2004, ISBN 973-635-372-9, pag. 249÷250, CD - ISBN 973-635-373-7, pag. 697÷700.
- [MCO 04b] **Morariu, C.O.**, Păunescu, T., Informatică Aplicată în Inginerie. Mathcad 2001, Editura Universității *Transilvania*, Braşov, 2004, ISBN 973–635–302–8.
- [MCO 04c] **Morariu, C.O.**, Şimon, A.E., Estimation of the Weibull Location Parameter through the Correlation Coefficient Method, Bulletin of the *Transilvania* University of Braşov, Vol. 11 (46) – New Series, 2004, ISSN 1223-9631, pag. 187÷190.
- [MCO 04d] **Morariu, C.O.**, Şimon, A.E., Studies Concerning the Estimation of the Location Parameter for Weibull Distribution, Buletinul celei de-a II-a Conferințe Internaționale “Challenges in Higher Education and Research in 21st Century”, Sozopol, Bulgaria, 2-5 iunie, 2004, ISBN 954-580-158-1, pag. 323÷326.
- [MCO 04e] **Morariu, C.O.**, Şimon, A.E., Utilization of Maximum Likelihood Estimators for Weibull Distribution, for Time-Truncated Tests, Academic Journal of Manufacturing Engineering, vol. 2, nr. 3/2004, Ed. Politehnica, Timișoara, 2004, ISSN 1583-7904, pag. 27÷31.

- [MCO 08a] **Morariu, C.O.**, Optimisation of The Estimating Manners For The Reliability Indicators, Suplimentul revistei Academic Journal of Manufacturing Engineering – AJME, Issue 2/2008, Editura Politehnica Timișoara, 2008, pag. 56 ÷ 62, ISSN 1583-7904, lucrare susținută la 2nd International Conference on Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '08, 25÷27 septembrie, 2008, Brașov, România.
- [MCO 08b] **Morariu, C.O.**, Toma, V., Mărăscu-Klein, V., Mathcad program for estimating the Weibull distribution parameters, Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering, Volume VII (XVII), 2008, CD-ROM Edition, pag. 2804÷2811, ISSN 1583 - 0691. Lucrare susținută la Annual Session of Scientific Papers "IMT ORADEA - 2008" Oradea, Felix Spa, Hotel Crisana, 29 ÷ 30 mai, 2008.
- [MCO 08c] **Morariu, C.O.**, Studies Concerning the Rate Between Life and Reliability of Bearings, Proceedings of the Sixth International Conference on “Challenges in Higher Education and Research in 21st Century”, Sozopol, Bulgaria, 4-7 iunie, 2008, Heron Press Ltd., ISBN 978-954-580-247-8, pag. 189÷191.
- [MCO 09] **Morariu, C.O.**, Optimization of the Estimates for the Weibull Reliability Indicators usig BLIE, Proceeding of the 1st International Conference on Manufacturing Engineering, Quality and Production Systems (MEOAPS ,09), volumul II, Universitatea *Transilvania* din Brașov, World Scientific and Engineering Academy and Society, Brașov, România, 24 ÷ 26 sept., 2009, WSEAS Press, ISBN 978-960-474-122-9, ISSN 1970-2769, pag. 388 ÷ 392.
- [MCO 10] **Morariu, C.O.**, Probabilități și statistică aplicată, volumul I, Editura Universității *Transilvania*, Brașov, 2010, ISBN 978-973-598-816-6 (gen.) și ISBN 978-973-598-817-3 (vol. I).
- [MCO 11] **Morariu C.O.**, Zaharia, S.M., The Calculation of the Testing Period of the Reliability of Products by Using the Model of Exponential Distribution, 12th WSEAS International Conference on NEURAL NETWORKS, 11-13 Aprilie, 2011, Brașov, Romania, ISBN 978-960-474-292-9, pag. 169-173.
- [MCO 12a] **Morariu C.O.**, Zaharia S.M., Calculation Method Of The Testing Period Of Products Using The Model Of Lognormal Distribution, lucrare susținută la 3rd International Conference on Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '12, 25÷26 octombrie, 2012, Brașov, România, Academic Journal of Manufacturing Engineering, ISSN: 1583-7904, vol. 10, nr. 3, 2012.
- [MCO 12b] **Morariu C.O.**, Zaharia S.M., Udroi, R., The Study Of The Bootstrap Estimate Accuracy In The Case Of Exponential Distribution, lucrare susținută la 3rd International Conference on Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '12, 25÷26 octombrie, 2012, Brașov, România, Academic Journal of Manufacturing Engineering, ISSN: 1583-7904, vol. 10, nr. 3, 2012.
- [MCO 13] **Morariu C.O.**, Zaharia S.M., A New Method for Determining the Reliability Testing Period Using Weibull Distribution, Acta Polytechnica Hungarica, ISSN 1785-8860, Vol 10, No. 7, 2013, pag. 171-186.
- [MCO 14] **Morariu, C.O.**, Statistică aplicată (CD), Editura Universității *Transilvania* din Brașov, Brașov, 2014, ISBN 978-606-19-0397-9.
- [MCO 15] **Morariu C.O.**, Zaharia S.M., Preliminary reliability of bearings, Revista Mechanical Testing and Diagnosis, Volume 3, pp. 5-12, 2015 (V), ISSN 2247 – 9635.
- [MCO 17a] **Morariu C.O.**, Dumitrașcu, A.E., Ciobanu, D.V., Reliability analysis of scarifying tooth for traileed scarifier, lucrare susținută la 4th International Conference on

- Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '16, MATEC Web of Conferences, vol. 94, Article Number: UNSP 04009, 2017.
- [MCO 17b] **Morariu C.O.**, Zaharia S.M., Statistical inferences for bearings life using sudden death test, lucrare susținută la 4th International Conference on Computing and Solutions in Manufacturing Engineering – CoSME '16, MATEC Web of Conferences, vol. 94, Article Number: UNSP 04010, 2017.
- [MCO 98a] **Morariu, C.O.**, Popescu, I., Metodă de proiectare optimizată a încercărilor de fiabilitate a rulmenților, Buletinul celui de-al VI-lea Simpozion național cu participare internațională „PRASIC '98”, Vol. II – Organe de mașini. Transmisii mecanice, Universitatea *Transilvania*, Brașov, 1998, ISBN 973-98796-0-8, pag. 137-140.
- [MCO 98b] **Morariu, C.O.**, Popescu, I., Noi metode de specificare completă a repartițiilor apriorice utilizate în tehnicile Bayesiene de estimare a parametrilor modelului Weibull, Buletinul celui de-al VI-lea Simpozion național cu participare internațională „PRASIC '98”, Vol. II – Organe de mașini. Transmisii mecanice, Universitatea *Transilvania*, Brașov, 1998, ISBN 973-98796-0-8, pag. 141-144.
- [MIH 76] Mihoc, Gh., ș.a., Bazele matematice ale teoriei fiabilității, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
- [MIT 82] Mitișor, Al., Istrate, V., Tehnologia furnirelor, placajelor și plăcilor din fibre de lemn, Editura Tehnică, București, 1982.
- [MON 03] Montgomery, D.C., Runger, G.C., Applied Statistics and Probability for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.
- [MON 11] Montgomery, D.C., Runger, G.C., Hubele, N.F., Engineering Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2011.
- [MOT 94] Moțoiu, R., Ingineria Calității, Ed. Chiminform DATA S.A., București, 1994.
- [POP 76] Popescu, I., Bearing Life and Reliability, The University of Arizona, Tucson, Arizona, 1976.
- [POP 79] Popescu, I., ș.a., Testarea fiabilității rulmenților prin metoda liniei defectelor primare, în Buletinul celei de a VII-a sesiuni de comunicări tehnico-științifice, CITCCSIT, Brașov, 1979.
- [POP 86] Popescu, I., Bazele cercetării experimentale în tehnologia construcțiilor de mașini. Universitatea *Transilvania*, Brașov, 1986.
- [POP 93] Popescu, I., ș.a, Fiabilitate. Bazele teoretice, Univ. *Transilvania* din Brașov, 1993.
- [REL 05] ReliaSoft, Life Data Analysis Reference, ReliaSoft Publishing, Tucson Arizona, 2005.
- [SIM 02] Șimon, A.E., **Morariu, C.O.**, The Optimized Design of the Testing Plans for the Exponential Distribution, Annals of DAAAM for 2002 & Proceedings, Vienna, 2002, ISBN 3-901509-29-1, pag. 505-506.
- [SMI 85] Smith, D.J., Reliability and Maintainability in Perspective, MacMillan Publishers, 1985.
- [SOL 68] Soland, R.M., Bayesian Analysis of the Weibull Process with Unknown Scale Parameter and Its Application to Acceptance Sampling, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-17, nr. 2, 1968.
- [SOL 69] Soland, R.M., Bayesian Analysis of the Weibull Process with Unknown Scale and Shape Parameters, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-18, nr. 4, 1969.

- [TAR 89] Târcolea, C., ș.a., Tehnici actuale în teoria fiabilității, Ed. Științifică și Enciclopedică București, 1989.
- [TOM 08] Toma, V., **Morariu, C.O.**, Mărăscu-Klein, V., Mathcad program for checking randomness of samples, eliminating outlier data and testing the concordance with the Weibull distribution, Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering, Volume VII (XVII), 2008, CD-ROM Edition, pag. 1619÷1628, ISSN 1583 - 0691. Lucrare susținută la Annual Session of Scientific Papers "IMT ORADEA - 2008" Oradea, Felix Spa, Hotel Crișana, 29 ÷ 30 mai, 2008.
- [VOL 01] Volvo motor grader. Ripper / scarifier attachment. Volvo Construction Equipment Group, Ref. No. 21 2 434 1036, Canada 1/2001- 10,0, https://www.volvoce.com/SiteCollectionDocuments/VCE/History/10_motor%20graders/07%20Volvo/All%20common/V%20G%20RipperS%202124341036-0101.pdf
- [WAT 02] Watzatka, G., **Morariu, C.O.**, Fiabilitatea previzională a rulmenților radiali cu bile, Buletinul celui de-al VII-lea Simpozion național cu participare internațională „PRASIC '02”, Vol. II – Organe de mașini. Transmisii mecanice, Universitatea Transilvania, Brașov, 2002, ISBN 973-635-075-4, pag. 85-88.
- [WIE 83] Wiener, U., ș.a., Aplicații ale rețelelor probabiliste în tehnică, Ed. Tehnică, București, 1983.
- [ZAH 11a] Zaharia, S.M., Martinescu, I., **Morariu, C.O.**, Optimization the reliability testing using product lifecycle and cost management, International Conference on Manufacturing Science and Education - MSE 2011, Sibiu-Romania, ISSN 1843 - 2522, Vol.1, 2-5 Iunie 2011, pag. 373-376.
- [ZAH 11b] Zaharia, S.M., Martinescu, I., Morariu, C.O., Analyzing Accelerated Life Testing With Censored Data, International Conference on Manufacturing Science and Education - MSE 2011- Sibiu-Romania, ISSN 1843 -2522, Vol.1, 2-5 Iunie 2011, pag. 377-380.
- [ZAH 12a] Zaharia S.M., Martinescu I., **Morariu C.O.**, Life time prediction using accelerated test data of the specimens from mechanical element, Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability, Polonia, ISSN: 1507:2711, Volume 14, No. 2, 2012, pag. 99-106.
- [ZAH 12b] Zaharia S.M., Martinescu I., **Morariu C.O.**, Statistical Processing Of Accelerated Life Data With Two Stresses Using Monte-Carlo Simulation Method, Proceedings of the 8th International DAAAM Baltic Conference, Industrial Engineering, Design Engineering, 19-21 April 2012, Tallinn, Estonia.
- [ZAH 13] Zaharia S.M., **Morariu C.O.**, Reliability and lifetime estimation of ball bearings under accelerated reliability and durability testing, Revista Metalurgia International, ISSN 1582-2214, No. 5, 2013, pag. 90-96.
- [ZAH 14] Zaharia S.M., **Morariu C.O.**, Statistical processing of censored data under accelerated reliability testing for radial ball bearing, Revista Fiabilitate și Durabilitate - Fiability & Durability, nr. 1/2014, Editura “Academica Brâncuși”, Târgu Jiu, ISSN 844 – 640X, pag. 57-63.
- [ZAH 17] Zaharia, S.M., **Morariu, C.O.**, Nedelcu, A., Pop, M.A., Experimental Study of Static and Fatigue Behavior of CFRP-Balsa Sandwiches under Three-point Flexural Loading, BioResources, ISSN 1930-2126, vol 12, No, 2 (2017).